

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

РЯДЫ И НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Для студентов учреждений
высшего образования

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ РЯДЫ И НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Допущено
Министерством образования Республики Беларусь
в качестве учебного пособия
для студентов учреждений высшего образования
по физическим, математическим и экономическим
специальностям



Минск
«Вышэйшая школа»
2015

УДК 517.382(075.8)
ББК 22.161я73
М34

Авторы: О.А. Кастрица, С.А. Мазаник, А.Ф. Наумович, Н.Ф. Наумович

Рецензенты: кафедра высшей математики УО «Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники»; профессор кафедры высшей математики УО «Белорусский государственный экономический университет», доктор физико-математических наук *М.П. Дымков*

Все права на данное издание защищены. Воспроизведение всей книги или любой ее части не может быть осуществлено без разрешения издательства.

Математический анализ. Ряды и несобственные интегралы :
М34 учеб. пособие / О. А. Кастрица [и др.]. – Минск : Вышэйшая школа, 2015. – 389 с. : ил.
ISBN 978-985-06-2636-3.

Даны необходимые теоретические сведения, которые сопровождаются большим количеством примеров, поясняющих введенные понятия и теоремы. Приведены образцы контрольных работ с решениями и упражнения для самостоятельного выполнения, снабженные ответами.

Для студентов учреждений высшего образования по физическим, математическим и экономическим специальностям. Может быть полезно преподавателям, аспирантам, магистрантам и студентам всех естественнонаучных специальностей.

УДК 517.382(075.8)
ББК 22.161я73

ISBN 978-985-06-2636-3

© Оформление. УП «Издательство
“Вышэйшая школа”», 2015

ПРЕДИСЛОВИЕ

Разделы анализа, где рассматриваются функции, которые определяются как суммы рядов или интегралы, зависящие от параметра, в том числе несобственные, представляют существенные трудности при изучении. Это обусловлено сложностью теорем, позволяющих выяснять свойства таких функций и правила применения к этим функциям обычных операций математического анализа (переход к пределу, дифференцирование, интегрирование). Теоремы такого рода обычно содержат ряд условий, которые не всегда легко проверить. Как правило, эти условия связаны с понятием равномерного предельного перехода.

Глубокое понимание теорем и приобретение навыков их применения на практике достигается только путем выполнения достаточного количества специальных упражнений и решения задач. Роль преподавателя в этом процессе чрезвычайно важна. Но в последнее время в учебном процессе университетов делается серьезный упор на самостоятельную работу студентов. Самостоятельное изучение математики всегда было достаточно трудным делом, а изучение упомянутых выше разделов — особенно трудным. Авторы надеются, что данное пособие окажет студентам помощь при изучении рядов и несобственных интегралов, зависящих от параметров.

Учебное пособие написано на основании многолетнего опыта преподавания математического анализа на факультете прикладной математики и информатики Белорусского государственного университета. Пособие состоит из семи глав, построенных по одному и тому же принципу. В первой части каждой главы приводится необходимый теоретический материал (определения, теоремы и т.д.), который сопровождается большим количеством примеров, поясняющих введенные понятия и теоремы. Доказательства не приводятся. Исключение составляет глава 6, посвященная так называемым именованным интегралам. Приведенные здесь доказательства являются дополнительной иллюстрацией применения теоретического материала двух предыдущих глав к вычислению и исследованию интегралов, имеющих важное значение для математического анализа и его приложений. Во второй части главы содержится большое количество упражнений для самостоятельного выполнения. Работа с этими упражнениями позволит студентам приобрести опыт исследования математических объектов, изучаемых в соответствующей главе. Разумеется, выполнение всех упражнений не обязательно. Даны ответы и указания к упражнениям. В третьей части главы приводится вариант контрольной работы для проверки усвоения материала главы.

Авторы выражают глубокую признательность рецензентам — профессору М.П. Дымкову, профессору Н.В. Цегельнику и доценту Л.А. Ко-

ных за внимательное прочтение рукописи и ценные замечания и советы, позволившие улучшить пособие, а также сотрудникам кафедры высшей математики Белорусского государственного университета, постоянное общение с которыми способствовало созданию этой книги.

Все отзывы и пожелания просим направлять по адресу: УП «Издательство “Вышэйшая школа”», пр. Победителей, 11, 220048, Минск.

Авторы

ГЛАВА 1. ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ И БЕСКОНЕЧНЫЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ

1.1. Сходимость числового ряда

1.1.1. Основные понятия

Рассмотрим числовую последовательность (a_n) . Отправляясь от нее, построим последовательность (S_n) , полагая, что

$$\begin{aligned} S_1 &= a_1, \\ S_2 &= a_1 + a_2, \\ S_3 &= a_1 + a_2 + a_3, \\ &\dots\dots\dots \\ S_n &= \sum_{k=1}^n a_k, \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

Последовательность (S_n) удобно изучать, записав ее в виде выражения (бесконечной суммы)

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k, \tag{1.1}$$

называемого *числовым рядом* (кратко — *рядом*). Числа a_k называют *членами ряда*. Суммы S_n , $n = 1, 2, \dots$, называют *частными суммами ряда* (1.1). Если последовательность (S_n) сходится, т.е. если существует конечный предел $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$, то говорят, что ряд (1.1) *сходится*, и число S называют *суммой ряда*. В этом случае пишут:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = S.$$

В противном случае говорят, что ряд *расходится*.

З а м е ч а н и я. 1. Если $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = +\infty$ или $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = -\infty$, то допустима

запись $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = +\infty$ или $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = -\infty$ соответственно.

2. Нумерация членов ряда может начинаться не обязательно с $k=1$, а, например, с $k=0$. Индекс суммирования может быть любым, т.е.

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{i=1}^{\infty} a_i = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+1} = \dots$$

Таким образом, *сходимость ряда — это сходимость последовательности его частных сумм*; *сумма ряда — это предел последовательности его частных сумм*.

Пример. Исследовать ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$ на сходимость.

Решение. Изучим частную сумму ряда:

$$\begin{aligned} S_{n-1} &= \ln\left(1 - \frac{1}{2^2}\right) + \ln\left(1 - \frac{1}{3^2}\right) + \ln\left(1 - \frac{1}{4^2}\right) + \dots + \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \\ &= \ln\left(\left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2}\right)\left(1 - \frac{1}{4^2}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)\right) = \left[-\frac{1}{k^2} = \left(1 - \frac{1}{k}\right)\left(1 + \frac{1}{k}\right) = \right. \\ &= \left. \frac{(k-1)(k+1)}{kk} \right] = \ln \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 2} \cdot \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 3} \cdot \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 4} \cdot \dots \cdot \frac{(n-1)(n+1)}{nn} = \ln \frac{n+1}{2n}. \end{aligned}$$

Так как $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \frac{n+1}{2n} = \ln \frac{1}{2} = -\ln 2$, то ряд сходится и его сумма $S = -\ln 2$.

Пример. Исследовать ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$ на сходимость.

Решение. Имеем:

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \\ &= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \\ &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}, \end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 1.$$

Значит, ряд сходится и имеет сумму $S = 1$.

Пример. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k = -1 + 1 - 1 + 1 - \dots$ имеет частные суммы $S_1 = -1$, $S_2 = 0$, $S_3 = 1$, $S_4 = 0, \dots$. Последовательность (S_n) не имеет предела. Значит, ряд расходится.

Ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k \quad (1.2)$$

называют *геометрическим рядом*. Частная сумма этого ряда

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} q^k = 1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1} = \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

при $q \neq 1$ и $S_n = n$, если $q = 1$.

Если $|q| < 1$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{1 - q}$. Если же $|q| \geq 1$, то S_n не имеет конечного предела.

Таким образом, геометрический ряд сходится, если $|q| < 1$, и расходится, если $|q| \geq 1$.

Если $q \geq 1$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = +\infty$. Поэтому

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \begin{cases} \frac{1}{1 - q}, & \text{если } |q| < 1, \\ +\infty, & \text{если } q \geq 1. \end{cases}$$

1.1.2. Общие принципы сходимости рядов

Если удалить несколько первых членов ряда (1.1), например первые m членов, то получим новый ряд $\sum_{k=m+1}^{\infty} a_k$, который называют *остатком ряда* (1.1). Для любого $n > m$ имеет место соотношение

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^m a_k + \sum_{k=m+1}^n a_k,$$

поэтому

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^m a_k + \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=m+1}^n a_k,$$

причем конечный предел в левой части равенства существует тогда и только тогда, когда существует конечный предел в правой части. Отсюда следует:

- 1) если ряд сходится, то сходится и любой его остаток;
- 2) если сходится какой-либо остаток ряда, то сходится и ряд;
- 3) если расходится какой-либо остаток ряда, то расходится и ряд;
- 4) если ряд сходится, то $\sigma_m = \sum_{k=m+1}^{\infty} a_k$ — сумма остатка; при этом

$S = S_m + \sigma_m$ и $\lim_{m \rightarrow \infty} \sigma_m = 0$, т.е. последовательность (σ_m) бесконечно малая.

Пусть ряды $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ сходятся и $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Тогда сходится и ряд $\sum_{k=1}^{\infty} (\alpha a_k + \beta b_k)$, причем

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\alpha a_k + \beta b_k) = \alpha \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \beta \sum_{k=1}^{\infty} b_k.$$

В частности, $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha a_k = \alpha \sum_{k=1}^{\infty} a_k$, $\sum_{k=1}^{\infty} (a_k \pm b_k) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \pm \sum_{k=1}^{\infty} b_k$.

Пусть ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится, а ряд $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ расходится. Если $\beta \neq 0$, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} (\alpha a_k + \beta b_k)$ расходится.

Если оба ряда расходятся, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} (\alpha a_k + \beta b_k)$ может оказаться как сходящимся, так и расходящимся.

Пример. Исследовать ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8+3(-1)^n}{2^{n+2}}$ на сходимость.

Решение. Представим ряд в виде линейной комбинации рядов:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8+3(-1)^n}{2^{n+2}} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} + \frac{3}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n}.$$

Ряды $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n}$ сходятся как геометрические ряды, следовательно, сходится и линейная комбинация этих рядов, т.е. исходный ряд.

Пусть ряд (1.1) сходится и имеет сумму S . Так как $S_n = S_{n-1} + a_n$, то в пределе, когда $n \rightarrow \infty$, получаем:

$$S = S + \lim_{n \rightarrow \infty} a_n,$$

откуда следует, что для сходящегося ряда (1.1) выполняется условие

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0. \quad (1.3)$$

Условие (1.3) является необходимым для сходимости ряда. Если это условие не выполнено, то ряд расходится.

Пример. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2+5}{10n^2+2}$ расходится, так как

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2+5}{10n^2+2} = \frac{3}{10} \neq 0,$$

т.е. не выполнено необходимое условие сходимости.

Пример. Исследовать ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n^2-1}{3n^2+1} \right)^{n^2+2}$ на сходимость.

Решение. Найдем предел:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n^2-1}{3n^2+1} \right)^{n^2+2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{3n^2+1} \right)^{n^2+2} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-2(n^2+2)}{3n^2+1}} = e^{-\frac{2}{3}}.$$

Так как $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$, то ряд расходится.

Рассмотрим так называемый *гармонический ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}. \quad (1.4)$$

Необходимое условие сходимости (1.3) для него выполняется. Предположим, что этот ряд сходится и имеет сумму S . Тогда, поскольку

$$S_{2n} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} = S_n + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n} > S_n + n \cdot \frac{1}{2n} = S_n + \frac{1}{2},$$

при $n \rightarrow \infty$ получаем противоречие: $S \geq S + 1/2$.

Следовательно, гармонический ряд расходится, хотя (еще раз обращаем на это внимание) необходимое условие сходимости для него выполнено.

Сходимость ряда равносильна сходимости последовательности (S_n) его частных сумм. В соответствии с критерием Коши это означает, что любые частные суммы S_n и S_m с достаточно большими номерами n и m мало отличаются одна от другой. Отсюда получаем приведенный ниже критерий.

Критерий Коши сходимости ряда. Для сходимости ряда необходимо и достаточно, чтобы

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists v_\varepsilon, \quad \forall n \geq v_\varepsilon, \quad \forall m > n \Rightarrow \left| \sum_{k=n+1}^m a_k \right| \leq \varepsilon.$$

Пример. Рассмотрим ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin k^2}{2^{k-1}}$. Возьмем любое $\varepsilon > 0$. Имеем:

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=n+1}^m \frac{\sin k^2}{2^k} \right| &\leq \sum_{k=n+1}^m \frac{|\sin k^2|}{2^k} \leq \sum_{k=n+1}^m \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{n+1}} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^{m-n-1}} \right) < \\ &< \frac{1}{2^{n+1}} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^{m-n-1}} + \dots \right) = \frac{1}{2^{n+1}} \frac{1}{1-1/2} = \frac{1}{2^n} \leq \varepsilon, \end{aligned}$$

если $n \geq v_\varepsilon = \log_2 \frac{1}{\varepsilon}$, для любого $m > n$. На основании критерия Коши заключаем, что ряд сходится.

Пример. Ряд $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{\ln k}$ расходится, так как

$$\left| \frac{1}{\ln(n+1)} + \dots + \frac{1}{\ln m} \right| > \frac{m-n}{\ln m} = [\text{при } m=2n] = \frac{n}{\ln 2n} > \varepsilon = \frac{1}{2} \quad \forall n \geq 2.$$

Действительно, функция $f(x) = \frac{x}{\ln 2x}$, $x \geq 1$, достигает минимума в точке $x = e/2$. Минимальное значение выражения $n/(\ln 2n)$ достигается при $n = 2$ и равно $1/\ln 2 > 1$.

Отметим, что $1/\ln k \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$, т.е. необходимое условие сходимости ряда выполнено.

З а м е ч а н и е. Можно рассматривать и ряды с комплексными членами $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, $a_k = \alpha_k + i\beta_k$. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится тогда и только тогда, когда сходятся оба ряда $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty} \beta_k$. При этом

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k + i \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k.$$

Пример. Пусть $q = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) \in \mathbb{C}$. Ряд $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$ (как и при $q \in \mathbb{R}$) сходится и имеет сумму $1/(1-q)$, если $|q| < 1$, и расходится, если $|q| \geq 1$.

Если $r = |q| < 1$, то

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} q^k &= \sum_{k=0}^{\infty} r^k (\cos k\varphi + i \sin k\varphi) = \frac{1}{1-q} = \frac{1}{1-r(\cos \varphi + i \sin \varphi)} = \\ &= \frac{1-r \cos \varphi + i r \sin \varphi}{(1-r \cos \varphi)^2 + r^2 \sin^2 \varphi} = \frac{1-r \cos \varphi}{1-2r \cos \varphi + r^2} + i \frac{r \sin \varphi}{1-2r \cos \varphi + r^2}. \end{aligned}$$

Приравнявая действительные и мнимые части этого равенства, получаем:

$$1 + r \cos \varphi + r^2 \cos 2\varphi + \dots + r^n \cos n\varphi + \dots = \frac{1-r \cos \varphi}{1-2r \cos \varphi + r^2},$$

$$r \sin \varphi + r^2 \sin 2\varphi + \dots + r^n \sin n\varphi + \dots = \frac{r \sin \varphi}{1-2r \cos \varphi + r^2}.$$

Пример. Исследовать ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1-i\sqrt{3}}{1+i} \right)^n$ на сходимость.

Решение. Поскольку $\left| \left(\frac{1-i\sqrt{3}}{1+i} \right)^n \right| = \left(\frac{2}{\sqrt{2}} \right)^n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, то ряд расходится,

так как не выполнено необходимое условие сходимости ряда.

1.1.3. Знакопостоянные ряды

Будем рассматривать ряды, у которых $a_k \geq 0$ при всех k . Такие ряды называют *положительными*. Последовательность частных сумм положительного ряда возрастает, поскольку при любом $n \geq 2$

$$S_n = S_{n-1} + a_n \geq S_{n-1}.$$

Воспользовавшись критерием сходимости монотонной последовательности, получаем приведенный ниже критерий.

Критерий сходимости положительного ряда. Для сходимости положительного ряда необходимо и достаточно, чтобы последовательность его частных сумм (S_n) была ограничена сверху, т.е.

$$\exists M, \quad \forall n \Rightarrow S_n = \sum_{k=1}^n a_k \leq M.$$

Если последовательность (S_n) не ограничена, то $S_n \rightarrow +\infty$, ряд расходится и $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = +\infty$.

Пример. Так как $(1+1/n)^n < e$ при всех натуральных n , то $n \ln(1+1/n) < 1$, следовательно, $1/n > \ln(n+1) - \ln n$. Складывая неравенства

$$1 > \ln 2, \quad \frac{1}{2} > \ln 3 - \ln 2, \dots, \quad \frac{1}{n} > \ln(n+1) - \ln n,$$

получаем:

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} > \ln(n+1).$$

Сумма S_n — частная сумма гармонического ряда. Из полученного неравенства следует, что последовательность (S_n) не ограничена, следовательно, ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ расходится (что и было показано ранее).

Ряд, у которого $a_k \leq 0$ при всех k , называют *отрицательным*. Изучение такого ряда сводится к изучению положительного ряда $\sum_{k=1}^{\infty} (-a_k)$, поэтому в дальнейшем будем рассматривать положительные ряды.

Признаки сравнения. В ряде случаев установить поведение ряда, т.е. его сходимость или расходимость, можно, сравнивая его члены с членами другого (эталонного) ряда, поведение которого известно.

В качестве эталонных рядов часто используют гармонический ряд (1.4) и положительный геометрический ряд (1.2) при $q > 0$.

Рассмотрим положительные ряды (1.1) и

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k. \quad (1.5)$$

Признак сравнения 1. Пусть $a_k \leq cb_k$ при всех k , где c — постоянная, $c > 0$. Тогда:

- 1) если сходится ряд $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$, то сходится и ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$;
- 2) если расходится ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, то расходится и ряд $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$.

Замечание. Признак сравнения 1 применим также и тогда, когда $a_k \leq cb_k$ не для всех k , а лишь для любого $k > m$. В этом случае можно отбросить m первых членов рядов (1.1) и (1.5), что, как известно, не по-

влияет на их сходимость, и использовать признак для остатков этих рядов.

Пример. Ряд $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k + 5}$ сходится, так как $\frac{1}{2^k + 5} < \frac{1}{2^k}$ для любого k ; ряд $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k}$ сходится (это геометрический ряд, $q = 1/2 < 1$).

Пример. Исследовать ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n + \sin^2 n}{n^2 - \cos n}$ на сходимость.

Решение. Так как

$$\frac{n + \sin^2 n}{n^2 - \cos n} \geq \frac{n}{n^2 + 1} \geq \frac{n}{n^2 + n^2} = \frac{1}{2n},$$

а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ расходится, то исходный ряд расходится.

Признак сравнения 2. Пусть $b_k > 0$ при любом k и существует предел

$l = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_k}{b_k}, 0 \leq l \leq +\infty$. Тогда:

1) если $0 < l < +\infty$, то оба ряда сходятся или оба ряда расходятся;

2) если $l = 0$, то из сходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ следует сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$;

3) если $l = +\infty$, то из расходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ следует расходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

Пример. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{10k-2}$ сравним с гармоническим рядом $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$. Так как

$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{10k-2} : \frac{1}{k} \right) = \frac{1}{10}$ и ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ расходится, то и рассматриваемый ряд расходится.

Пример. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{10^k - k}$ сравним с геометрическим сходящимся рядом $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{10^k}$.

Поскольку $\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{10^k - k} : \frac{1}{10^k} \right) = 1$, то заданный ряд также сходится.

Интегральный признак. Пусть функция $f(x)$ определена на $[1; +\infty)$ и $f(k) = a_k, k = 1, 2, \dots$.

Теорема 1.1. Если функция $f(x)$ положительна и убывает, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$

сходится тогда и только тогда, когда существует конечный предел

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_1^A f(x) dx.$$

Замечание. Принято обозначать $\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_1^A f(x) dx = \int_1^{+\infty} f(x) dx$. Интеграл $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ называют несобственным. Если упомянутый предел конечен, то несобственный интеграл называют сходящимся. В противном случае интеграл расходится.

Пример. Обобщенный гармонический ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \leq 1$.

При $\alpha = 1$ данный ряд — гармонический, он расходится. При $\alpha \leq 0$ ряд расходится, так как $1/k^\alpha \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$.

Пусть $\alpha > 0, \alpha \neq 1$. Рассмотрим функцию $f(x) = 1/x^\alpha$. Она удовлетворяет условию теоремы 1.1. Несобственный интеграл

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \left. \frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \right|_1^{+\infty} = \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1}, & \text{если } \alpha > 1, \\ +\infty, & \text{если } \alpha < 1, \end{cases}$$

поэтому интеграл, а значит, и ряд сходятся при $\alpha > 1$ и расходятся при $0 < \alpha < 1$.

Использование обобщенного гармонического ряда в качестве эталонного в признаках сравнения позволяет получить другие признаки сходимости ряда.

Степенной признак сравнения. Пусть $a_k \sim c/k^p$ при $k \rightarrow \infty$, $c > 0$. Если $p > 1$, то ряд (1.1) сходится; если $p \leq 1$, то ряд (1.1) расходится.

Пример. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k-1}{k\sqrt{k}+3}$ расходится, так как

$$\frac{2k-1}{k\sqrt{k}+3} \sim \frac{2k}{k\sqrt{k}} = \frac{2}{k^{0.5}}.$$

Пример. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k-1}{(k+1)\sqrt{k^3+3}}$ сходится, поскольку

$$\frac{2k-1}{(k+1)\sqrt{k^3+3}} \sim \frac{2k}{k\sqrt{k^3}} = \frac{2}{k^{1.5}}.$$

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	3
Глава 1. Числовые ряды и бесконечные произведения	5
1.1. Сходимость числового ряда	5
1.1.1. Основные понятия	5
1.1.2. Общие принципы сходимости рядов	7
1.1.3. Знакопостоянные ряды	11
1.1.4. Знакопеременные ряды	21
1.2. Действия над рядами	28
1.2.1. Группировка членов ряда	28
1.2.2. Перестановка членов ряда	29
1.2.3. Перемножение рядов	29
1.3. Повторные и двойные ряды	32
1.3.1. Сходимость двойного ряда	32
1.3.2. Свойства двойных рядов	36
1.4. Бесконечные произведения	39
1.4.1. Основные понятия	39
1.4.2. Сходимость бесконечного произведения	40
1.4.3. Действия с бесконечными произведениями	45
<i>Упражнения</i>	<i>45</i>
<i>Ответы</i>	<i>56</i>
<i>Вариант контрольной работы</i>	<i>58</i>
Глава 2. Функциональные последовательности и ряды	63
2.1. Сходимость функциональных последовательностей и рядов	63
2.1.1. Поточечная сходимость функциональных последовательностей и рядов	63
2.1.2. Равномерная сходимость функциональных последовательностей	65
2.1.3. Равномерная сходимость функциональных рядов	68
2.1.4. Признаки равномерной сходимости функциональных рядов ...	70
2.2. Функциональные свойства рядов и последовательностей	75
2.2.1. Основные теоремы	75
2.2.2. Локальная равномерная сходимость	81
	385

2.2.3. Рекомендации по исследованию рядов на равномерную сходимость	84
<i>Упражнения</i>	85
<i>Ответы и указания</i>	94
<i>Задания для лабораторных работ</i>	97
<i>Вариант контрольной работы</i>	102
Глава 3. Степенные ряды	109
3.1. Сходимость степенного ряда	109
3.1.1. Интервал сходимости степенного ряда	109
3.1.2. Радиус сходимости степенного ряда	109
3.1.3. Множество сходимости степенного ряда	110
3.1.4. Степенные ряды с комплексными членами	116
3.2. Свойства суммы степенного ряда	118
3.2.1. Непрерывность суммы степенного ряда	118
3.2.2. Почленное интегрирование степенного ряда	118
3.2.3. Почленное дифференцирование степенного ряда	119
3.3. Представление функций степенными рядами	121
3.3.1. Ряд Тейлора	121
3.3.2. Основные разложения	123
3.4. Действия со степенными рядами	125
3.4.1. Линейная комбинация степенных рядов	125
3.4.2. Перемножение степенных рядов	126
3.4.3. Композиция степенных рядов (подстановка ряда в ряд)	127
3.4.4. Деление степенных рядов	128
3.4.5. Приемы разложения функций в степенные ряды	130
3.5. Использование степенных рядов	137
3.6. Обобщенное суммирование числовых рядов	142
<i>Упражнения</i>	145
<i>Ответы</i>	151
<i>Вариант контрольной работы</i>	156
Глава 4. Несобственные интегралы	163
4.1. Несобственный интеграл по неограниченному промежутку	163
4.1.1. Несобственный интеграл первого рода	163
4.1.2. Вычисление и преобразование НИ-1	168
4.1.3. НИ-1 от положительных функций	169
4.1.4. НИ-1 от произвольных функций	175

4.1.5. Несобственный интеграл по произвольному неограниченному промежутку	179
4.2. Несобственный интеграл от неограниченной функции	180
4.2.1. Несобственный интеграл второго рода	180
4.2.2. Вычисление и преобразование НИ-2	185
4.2.3. НИ-2 от положительных функций	187
4.2.4. НИ-2 от произвольных функций	194
4.2.5. Несобственные интегралы смешанного типа	197
4.3. Главное значение несобственных интегралов	201
4.3.1. Главное значение НИ-1	201
4.3.2. Главное значение НИ-2	202
<i>Упражнения</i>	202
<i>Ответы</i>	215
<i>Вариант контрольной работы</i>	217
Глава 5. Интегралы, зависящие от параметра	223
5.1. Частные пределы	223
5.1.1. Частные и равномерные частные пределы	223
5.1.2. Критерии равномерной сходимости	225
5.1.3. Непрерывность частного предела	228
5.2. Интеграл, зависящий от параметра	229
5.2.1. Функция, определяемая как интеграл	229
5.2.2. Переход к пределу в ИЗОП	230
5.2.3. Интегрирование ИЗОП	232
5.2.4. Дифференцирование ИЗОП	233
5.2.5. ИЗОП с переменными пределами	235
5.3. Несобственный интеграл первого рода, зависящий от параметра	238
5.3.1. Определение несобственного интеграла первого рода, зависящего от параметра	238
5.3.2. Критерии равномерной сходимости НИЗОП-1	241
5.3.3. Признаки равномерной сходимости НИЗОП-1	244
5.3.4. Непрерывность НИЗОП-1	248
5.3.5. Дифференцирование НИЗОП-1	251
5.3.6. Интегрирование НИЗОП-1	252
5.4. Несобственный интеграл второго рода, зависящий от параметра	254
5.4.1. Определение несобственного интеграла второго рода, зависящего от параметра	254
5.4.2. Равномерная сходимость НИЗОП-2	256

5.4.3. Признаки равномерной сходимости НИЗОП-2	258
<i>Упражнения</i>	263
<i>Ответы</i>	271
<i>Вариант контрольной работы</i>	273
Глава 6. Именные интегралы	280
6.1. Эйлеровы интегралы	280
6.1.1. Интеграл Эйлера	280
6.1.2. В-функция Эйлера	284
6.1.3. Г-функция Эйлера	288
6.2. Другие именные интегралы	299
6.2.1. Интеграл Пуассона	299
6.2.2. Интеграл Дирихле	302
6.2.3. Разрывный множитель Дирихле	305
6.2.4. Интегралы Лапласа	306
6.2.5. Интегралы Фруллани	308
6.2.6. Интегралы Френеля	312
<i>Упражнения</i>	317
<i>Ответы</i>	320
<i>Вариант контрольной работы</i>	321
Глава 7. Ряды и интегралы Фурье	326
7.1. Ортогональные системы функций	326
7.1.1. Скалярное произведение функций	326
7.1.2. Тригонометрическая система	327
7.1.3. Расстояние между функциями	328
7.1.4. Тригонометрические многочлены наилучшего приближения ...	329
7.1.5. Тригонометрический ряд Фурье	331
7.2. Ряд Фурье периодической функции	333
7.2.1. Периодические функции	333
7.2.2. Ряд Фурье четной (нечетной) функции	334
7.2.3. Сходимость ряда Фурье в точке	337
7.2.4. Равномерная сходимость ряда Фурье	342
7.3. Ряд Фурье функции, заданной на промежутке	345
7.3.1. Неравенство Бесселя	345
7.3.2. Сходимость в среднем ряда Фурье	345
7.4. Представление функций рядами Фурье специального вида	348

7.4.1. Разложение в ряд по косинусам (синусам)	348
7.4.2. Комплексная форма ряда Фурье	352
7.4.3. Ряд Фурье периодической функции с произвольным периодом	353
7.5. Интеграл Фурье	358
7.5.1. Представление функции интегралом Фурье	358
7.5.2. Интеграл Фурье четной (нечетной) функции	361
7.6. Интегральное преобразование Фурье	365
7.6.1. Преобразование Фурье	365
7.6.2. Косинус-преобразование и синус-преобразование Фурье	366
7.6.3. Основные свойства преобразования Фурье	368
<i>Упражнения</i>	369
<i>Ответы</i>	372
<i>Вариант контрольной работы</i>	375
Рекомендуемая литература	384

Учебное издание

Кастрица Олег Адамович
Мазаник Сергей Алексеевич
Наумович Адольф Федорович
Наумович Нил Федорович

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Ряды и несобственные интегралы

Учебное пособие

Редактор *Е.В. Мальшева*
Художественный редактор *В.А. Ярошевич*
Технический редактор *Н.А. Лебедевич*
Корректоры *О.И. Голденкова, Т.В. Кульнис, Е.З. Липень*
Компьютерная верстка *А.Н. Бабенковой*

Подписано в печать 20.11.2015. Формат 60×84/16. Бумага офсетная. Гарнитура «NewtonC».
Офсетная печать. Усл. печ. л. 22,78. Уч.-изд. л. 21,2. Тираж 500 экз. Заказ 496.

Республиканское унитарное предприятие «Издательство “Вышэйшая школа”».

Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий № 1/3 от 08.07.2013.

Пр. Победителей, 11, 220048, Минск.

e-mail: market@vshph.com <http://vshph.com>

Открытое акционерное общество «Полиграфкомбинат им. Я. Коласа».

Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий № 2/3 от 04.10.2013.

Ул. Корженевского, 20, 220024, Минск.