Гурова З.И.
Каролинская С.Н.
Осипова А.П.

# Математический анализ. Начальный курс с примерами и задачами

МОСКВА
ФИЗМАТЛИТ ®

УДК 517
ББК 22.161
Г 95

Гурова З. И., Каролинская С. Н., Осипова А. П. **Математический анализ. Начальный курс с примерами и задачами.** / Под ред. А.И. Кибзуна. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. — 352 с. — ISBN 978-5-9221-0829-4.

Изложены основные сведения из начальных разделов курса математического анализа для втузов — «Введение в анализ», «Основы дифференциального исчисления функций одной переменной», «Методы интегрирования функций одной переменной», «Числовые ряды».

Приведены краткая теория, типовые примеры и задачи для самостоятельного решения. Предложены алгоритмы методов решения различных классов задач.

Пособие может быть использовано и как учебник, и как задачник студентами технических специальностей, курсантами военных училищ, учащимися техникумов и средних школ.

Рецензенты:
кафедра математики Военной академии ракетных войск
стратегического назначения имени Петра Великого
(зав. кафедрой д.т.н. профессор В.В. Блаженков);
д. ф.-м. н. профессор МГУ В.М. Пасконов

ISBN 978-5-9221-0829-4

# СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие редактора серии . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 7
Предисловие . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 8

Г л а в а I. **Введение в анализ** . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 10

§ 1. Некоторые сведения из теории множеств . . . . . . . . . . . . 10

1.1. Основные понятия (10). 1.2. Операции над множествами (10). 1.3. Элементы логической символики (11). 1.4. Основные числовые множества (12). 1.5. Геометрическая интерпретация множества действительных чисел. Окрестность точки (12). 1.6. Ограниченные и неограниченные множества (13). 1.7. Типовые примеры (14). 1.8. Задачи для самостоятельного решения (15).

§ 2. Числовые последовательности. Предел последовательности 16

2.1. Основные определения (16). 2.2. Предел последовательности (18). 2.3. Свойства сходящихся последовательностей (21). 2.4. Типовые примеры (23). 2.5. Задачи для самостоятельного решения (23).

§ 3. Функции. Предел функции . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 24

3.1. Основные определения. Способы задания функций (24). 3.2. Сложная, обратная и параметрически заданная функции (25). 3.3. Элементарные функции (27). 3.4. Монотонные функции (29). 3.5. Ограниченные функции (29). 3.6. Предел функции (30). 3.7. Односторонние пределы функции (36). 3.8. Типовые примеры (38). 3.9. Задачи для самостоятельного решения (39).

§ 4. Теоремы о пределах функций . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 39

4.1. Основные теоремы о пределах функций (39). 4.2. Бесконечно малые и бесконечно большие функции и их свойства (41). 4.3. Теоремы о пределах функций, связанные с арифметическими операциями (45). 4.4. Теоремы о пределах функций, связанные с неравенствами (47). 4.5. Типовые примеры (50). 4.6. Задачи для самостоятельного решения (54).

§ 5. Замечательные пределы. Сравнение бесконечно малых функций . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 54

5.1. Замечательные пределы (54). 5.2. Сравнение бесконечно малых функций (58). 5.3. Свойства эквивалентных бесконечно малых функций (60). 5.4. Типовые примеры (63). 5.5. Задачи для самостоятельного решения (70).

§ 6. Непрерывность функций . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 71

6.1. Основные определения (71). 6.2. Свойства функций, непрерывных в точке (73). 6.3. Непрерывность функций на интервале, полуинтервале, отрезке (77). 6.4. Свойства функций, непрерывных на отрезке (78). 6.5. Точки разрыва функций и их классификация (78). 6.6. Типовые примеры (80). 6.7. Задачи для самостоятельного решения (85).

Г л а в а II. **Основы дифференциального исчисления функций одной переменной** . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 87

§ 7. Производная функции, ее свойства и приложения . . . . . . 87

7.1. Определение производной функции в точке (87). 7.2. Табличное дифференцирование. Производные основных элементарных функций (89). 7.3. Свойства производной (92). 7.4. Геометрический и механический смысл производной (94). 7.5. Уравнения касательной и нормали к графику функции (96). 7.6. Типовые примеры (97). 7.7. Задачи для самостоятельного решения (101).

§ 8. Дифференцирование сложной функции, обратной функции и параметрически заданной функции . . . . . . . . . . . . . . 102

8.1. Производная сложной функции. Логарифмическая производная (102). 8.2. Производная обратной функции. Производные обратных тригонометрических функций (105). 8.3. Производная параметрически заданной функции (107). 8.4. Типовые примеры (109). 8.5. Задачи для самостоятельного решения (111).

§ 9. Дифференциал функции, его свойства и приложения . . . . 112

9.1. Дифференцируемость функции. Дифференциал (112). 9.2. Свойства дифференциала (114). 9.3. Геометрический смысл дифференциала. Вычисление приближенных значений функций с помощью дифференциала (115). 9.4. Инвариантность формы записи дифференциала (116). 9.5. Типовые примеры (117). 9.6. Задачи для самостоятельного решения (119).

§ 10. Производные и дифференциалы высших порядков . . . . . 120

10.1. Производные высших порядков (120). 10.2. Формула Лейбница (122). 10.3. Дифференциалы высших порядков (124). 10.4. Типовые примеры (126). 10.5. Задачи для самостоятельного решения (129).

§ 11. Основные теоремы дифференциального исчисления. Раскрытие неопределенностей . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 130

11.1. Теорема Ролля (теорема о нуле производной) (130). 11.2. Теорема Лагранжа. Формула конечных приращений (131). 11.3. Теорема Коши. Обобщенная формула конечных приращений (133). 11.4. Раскрытие неопределенностей. Правило Лопиталя (134). 11.5. Типовые примеры (141). 11.6. Задачи для самостоятельного решения (145).

§ 12. Формула Тейлора . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 146
12.1. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано (146). 12.2. Формула Тейлора для некоторых основных элементарных функций (150). 12.3. Различные формы остаточного члена (152). 12.4. Типовые примеры (155). 12.5. Задачи для самостоятельного решения (159).

§ 13. Возрастание, убывание, экстремум функции . . . . . . . . . 160
13.1. Возрастание и убывание функции (160). 13.2. Экстремум функции (163). 13.3. Наибольшее и наименьшее значения функции (168). 13.4. Типовые примеры (172). 13.5. Задачи для самостоятельного решения (175).

§ 14. Выпуклость, вогнутость, точки перегиба кривой. Асимптоты кривой . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 176
14.1. Выпуклость, вогнутость, точки перегиба кривой (176). 14.2. Асимптоты кривой (180). 14.3. Типовые примеры (183). 14.4. Задачи для самостоятельного решения (185).

§ 15. Исследование функций и построение их графиков . . . . . 186
15.1. Схема исследования функции (186). 15.2. Типовые примеры (186). 15.3. Задачи для самостоятельного решения (195).

Г л а в а III. **Методы интегрирования функций одной переменной** . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 196

§ 16. Первообразная функции и неопределенный интеграл . . . . 196
16.1. Определение и свойства неопределенного интеграла (196). 16.2. Основные методы интегрирования (198). 16.3. Типовые примеры (207). 16.4. Задачи для самостоятельного решения (210).

§ 17. Интегрирование рациональных дробей . . . . . . . . . . . 211
17.1. Краткие сведения из алгебры многочленов (211). 17.2. Интегрирование элементарных дробей (214). 17.3. Интегрирование рациональных дробей (218). 17.4. Типовые примеры (220). 17.5. Задачи для самостоятельного решения (227).

§ 18. Интегрирование тригонометрических функций . . . . . . . 227
18.1. Универсальная тригонометрическая подстановка (227). 18.2. Интегрирование функций, нечетных относительно $\sin x$ или $\cos x$ (230). 18.3. Интегрирование функций, четных относительно $\sin x$ и $\cos x$ (232). 18.4. Интегрирование произведений синусов и косинусов различных аргументов (234). 18.5. Типовые примеры (235). 18.6. Задачи для самостоятельного решения (239).

§ 19. Интегрирование некоторых иррациональных функций . . . 240
19.1. Интегрирование функций, рациональных относительно аргумента и корня из дробно-линейной функции (240). 19.2. Интегрирование функций, рациональных относительно аргумента и квадратного корня из квадратного трехчлена (241). 19.3. Типовые примеры (248). 19.4. Задачи для самостоятельного решения (258).

Глава IV. **Числовые ряды** . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 260
§ 20. Основные определения и свойства числовых рядов . . . . . 260
20.1. Основные определения (260). 20.2. Основные свойства рядов (265). 20.3. Критерий Коши сходимости ряда (270). 20.4. Типовые примеры (271). 20.5. Задачи для самостоятельного решения (274).
§ 21. Знакопостоянные ряды . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 275
21.1. Критерий сходимости знакопостоянных рядов (275). 21.2. Достаточные признаки сходимости и расходимости рядов с неотрицательными членами (277). 21.3. Типовые примеры (289). 21.4. Задачи для самостоятельного решения (297).
§ 22. Знакопеременные ряды . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 298
22.1. Знакочередующиеся ряды (298). 22.2. Абсолютно и условно сходящиеся ряды (302). 22.3. Признаки Даламбера и Коши для знакопеременных рядов (303). 22.4. Свойства абсолютно и условно сходящихся рядов (305). 22.5. Типовые примеры (307). 22.6. Задачи для самостоятельного решения (312).
§ 23. Последовательности и ряды с комплексными членами . . . 313
23.1. Краткие сведения о комплексных числах (313). 23.2. Последовательности с комплексными членами (318). 23.3. Ряды с комплексными членами (321). 23.4. Типовые примеры (324). 23.5. Задачи для самостоятельного решения (329).
Приложение . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 331
§ 24. Краткие сведения об интегралах с бесконечными пределами 331

Ответы к задачам для самостоятельного решения . . . . . . . . . . . 336
Список литературы . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 343
Справочный материал . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 344
Предметный указатель . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 347

# ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА СЕРИИ

В 1973 году на факультете прикладной математики Московского государственного авиационного института (технического университета) академиком В. С. Пугачевым была создана кафедра теории вероятностей и математической статистики. За прошедший период времени на кафедре под научно-методическим руководством В. С. Пугачева были созданы и прочитаны оригинальные учебные курсы по таким дисциплинам, как «Теория вероятностей и математическая статистика», «Случайные процессы», «Математический анализ» и др. На суд читателя выносится серия учебных пособий по трем названным дисциплинам, которые отражают накопленный опыт преподавания этих дисциплин студентам технического университета МАИ, специализирующимся в области прикладной математики, радиоэлектроники, машиностроения и систем управления. Отличительной чертой данных пособий является максимально лаконичное изложение материала при достаточно полном описании современного состояния изучаемых предметов. Кроме того, значительную часть пособий занимают многочисленные примеры и задачи с решениями, что позволяет использовать эти пособия не только для чтения лекционных курсов, но и для проведения практических и лабораторных занятий. Структура изложения курсов такова, что эти пособия могут одновременно играть роль учебника, задачника и справочника. Поэтому пособия могут быть полезны как преподавателям и студентам, так и инженерам.

*Проф., д. ф.-м. н. А. И. Кибзун*

# ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящее учебное пособие содержит основные сведения из начальных разделов курса математического анализа во втузе. Оно состоит из четырех глав и приложения.

Каждый параграф соответствующей главы включает в себя теорию с иллюстративными примерами, типовые примеры и задачи для самостоятельного решения. В целях доступности изложения доказаны только те теоремы, которые опираются на имеющиеся в пособии сведения. Доказательства некоторых теорем и решения отдельных примеров приведены лишь для частных случаев. Доказательства сложных теорем опущены.

В первой главе изложены краткие сведения из теории множеств, основные понятия и теоремы теории пределов последовательностей и функций одной переменной, различные методы вычисления пределов, свойства и способы исследования непрерывных функций.

Вторая глава содержит основы дифференциального исчисления функций одной переменной: определения, свойства, приложения производной и дифференциала первого и высших порядков, формулы для их вычисления. Приведены основные теоремы дифференциального исчисления (теоремы Ролля, Лагранжа, Коши), способы раскрытия неопределенностей различного вида, схема исследования функций и построения их графиков.

В третьей главе даны определения и свойства первообразной и неопределенного интеграла, методы интегрирования заменой переменной и по частям. Глава включает приемы интегрирования рациональных дробей, тригонометрических функций, некоторых иррациональных функций.

Четвертая глава посвящена теории числовых рядов. В ней изложены определения, свойства и основные признаки сходимости рядов с действительными членами. Кроме того, она содержит некоторые сведения о комплексных числах и признаках сходимости последовательностей и рядов с комплексными членами.

В приложении приведены краткие сведения о несобственных интегралах с бесконечными пределами. В конце пособия помещены ответы к задачам для самостоятельного решения.

Для определений, теорем и формул введена двойная нумерация; первое число соответствует номеру параграфу, второе — номеру определения, теоремы или формулы внутри параграфа.

К особенностям данного начального курса относятся:

— краткое изложение теории;

— большое число типовых примеров с подробными решениями;

— алгоритмизация методов решения различных классов задач. Кроме того, содержание каждого параграфа соответствует, как правило, одной лекции и одному занятию в традиционном курсе математического анализа во втузе.

Пособие может служить как учебником, так и задачником с типовыми примерами для студентов технических специальностей, курсантов военных училищ, учащихся техникумов и средних школ.

При подготовке пособия был использован многолетний опыт преподавания авторами курса математического анализа на технических факультетах МАИ.

Авторы благодарны Р. И. Шаюкову за большую работу по набору текста и разработке оригинал-макета настоящей книги.

ГЛАВА I

# ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИЗ

## § 1. Некоторые сведения из теории множеств

**1.1. Основные понятия.** В математике первичными понятиями являются понятия множества и элемента множества. Множества обозначают большими латинскими буквами $A, B, \ldots,$ а их элементы — малыми $a, b, \ldots$ Если элемент $a$ принадлежит множеству $A$, то пишут $a \in A$ или $A \ni a$. В противном случае пишут $a \notin A$ или $a \overline{\in} A$. Если элементы $a_1, a_2, \ldots, a_n$ принадлежат множеству $A$, то записывают $a_1, a_2, \ldots, a_n \in A$.

Определение 1.1. Множество $A$ называется *подмножеством* множества $B$, если любой элемент множества $A$ является элементом множества $B$. Пишут $A \subset B$ или $B \supset A$ и говорят, что множество $A$ *включено* в множество $B$ или $B$ *включает* $A$.

Определение 1.2. Множества $A$ и $B$ называются *равными*, если они состоят из одних и тех же элементов. Записывают $A = B$.

Если множество $A$ включено в множество $B$ или совпадает с ним, то пишут $A \subseteq B$ или $B \supseteq A$.

Если множество $A$ состоит из элементов $a_1, a_2, \ldots, a_n$, то пишут $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Если множество $A$ состоит из элементов, обладающих определенным свойством, то пишут $A = \{a : \ \ldots\}$, где в фигурных скобках после двоеточия записывают указанное свойство. Например, запись $A = \{a : \ a^2 - 1 > 0\}$ означает, что множество $A$ состоит из элементов $a$ таких, что $a^2 - 1 > 0$.

Определение 1.3. Множество называется *конечным*, если оно содержит конечное число элементов. Например, конечно множество дней недели.

Определение 1.4. Множество, не являющееся конечным, называется *бесконечным*. Примером бесконечного множества может служить множество всех целых положительных чисел.

Определение 1.5. Множество, не содержащее ни одного элемента, называется *пустым* и обозначается $\varnothing$.

**1.2. Операции над множествами.**

Определение 1.6. Множество $C$, состоящее из всех элементов двух множеств $A$ и $B$, называется *объединением* множеств $A$ и $B$ и обозначается $C = A \cup B$.

Определение 1.7. Множество $C$, состоящее из всех элементов, одновременно принадлежащих как множеству $A$, так и множеству $B$, называется *пересечением* множеств $A$ и $B$ и обозначается $C = A \cap B$.

Определение 1.8. Множество $C$, состоящее из всех элементов множества $A$, не принадлежащих множеству $B$, называется *разностью* множеств $A$ и $B$ и обозначается $C = A \setminus B$.

Определение 1.9. Если множество $B$ является подмножеством множества $A$, то множество $A \setminus B$ называется *дополнением* $B$ до $A$.

На рис. 1.1 дана графическая иллюстрация введенных операций над множествами $A$ и $B$. Заштрихованная часть плоскости соответствует объединению (рис. 1.1, *а*), пересечению (рис. 1.1, *б*), разности (рис. 1.1, *в*) множеств $A$ и $B$ и дополнению множества $B$ до $A$ (рис. 1.1, *г*).

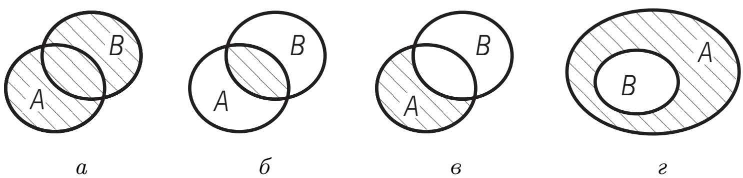


Рис. 1.1

Пусть, например, $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{2, 4, 6, 8\}$. Тогда $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8\}$, $A \cap B = \{2, 4\}$, $A \setminus B = \{1, 3, 5\}$. Дополнение множества $B$ до множества $A$ не определено, так как множество $B$ не является подмножеством множества $A$.

**1.3. Элементы логической символики.** В табл. 1.1 приведены наиболее часто используемые логические символы.

Таблица 1.1

| Символ | Значение символа |
|---|---|
| $\Rightarrow$ | «следует»; «выполняется» |
| $\Longleftrightarrow$ | равносильность утверждений, стоящих по разные стороны от символа; «необходимо и достаточно»; «тогда и только тогда» |
| $\forall$ | «для каждого»; «для любого»; «для всякого»; «каждый»; «любой»; «всякий» |
| $\exists$ | «существует»; «найдется» |
| : | «такой, что» |

Так запись $\forall\, x : \ |x| < 2 \ \Rightarrow \ x^2 < 4$ означает: «для каждого $x$ такого, что $|x| < 2$, выполняется неравенство $x^2 < 4$».

**1.4. Основные числовые множества.** Обычно используют следующие обозначения некоторых числовых множеств:

$\mathbf{N} = \{1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}$ — *множество натуральных чисел*;

$\mathbf{Z} = \{\ldots, -n, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, n, \ldots\}$ — *множество целых чисел*;

$\mathbf{R}$ — *множество действительных чисел.*

Очевидно, что $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{R}$.

В табл. 1.2 приведены наиболее часто используемые подмножества множества $\mathbf{R}$. Пусть $x, a, b \in \mathbf{R}$.

Таблица 1.2

| Множество | Название | Обозначение |
|---|---|---|
| $\{x:\ a \leqslant x \leqslant b\}$ | отрезок | $[a, b]$ |
| $\{x:\ a < x < b\}$ | интервал | $(a, b)$ или $]a, b[$ |
| $\{x:\ a < x \leqslant b\}$ | полуинтервал | $(a, b]$ или $]a, b]$ |
| $\{x:\ a \leqslant x < b\}$ | полуинтервал | $[a, b)$ или $[a, b[$ |
| $\{x:\ x \geqslant a\}$ | бесконечный полуинтервал | $[a, +\infty)$ или $[a, +\infty[$ |
| $\{x:\ x \leqslant a\}$ | бесконечный полуинтервал | $(-\infty, a]$ или $]-\infty, a]$ |
| $\{x:\ x > a\}$ | бесконечный интервал | $(a, +\infty)$ или $]a, +\infty[$ |
| $\{x:\ x < a\}$ | бесконечный интервал | $(-\infty, a)$ или $]-\infty, a[$ |
| $\{x:\ -\infty < x < +\infty\}$ | бесконечный интервал | $(-\infty, +\infty)$ или $]-\infty, +\infty[$ |

Определение 1.10. Все приведенные в табл. 1.2 множества называют *числовыми промежутками* или, короче, *промежутками.* Промежутки $(a, +\infty)$, $[a, +\infty)$, $(-\infty, a]$, $(-\infty, a)$, $(-\infty, +\infty)$ являются *бесконечными*, а промежутки $[a, b]$, $(a, b)$, $[a, b)$, $(a, b]$ — *конечными.* Числа $a$ и $b$ называют *концами*, а число $b - a$ — *длиной* конечного промежутка.

**1.5. Геометрическая интерпретация множества действительных чисел. Окрестность точки.**

Определение 1.11. Прямая, на которой выбраны направление, начало отсчета — точка $O$ — и масштаб, называется *числовой осью.* Между действительными числами и точками числовой оси существует взаимно-однозначное соответствие: числу $m \in \mathbf{R}$ соответствует на оси точка $M$ с абсциссой $m$. И обратно, каждой точке $M$ числовой оси соответствует число $m \in \mathbf{R}$ — абсцисса этой точки. Точка $M$ лежит справа от точки $O$, если $m > 0$; слева от точки $O$, если $m < 0$;

совпадает с точкой $O$, если $m = 0$. Поэтому действительные числа часто называют *точками*, что позволяет геометрически изображать числовые промежутки на числовой оси.

Определение 1.12. Любой интервал числовой оси, содержащий данную точку $a$, называют *окрестностью* этой точки и обозначают $\mathrm{O}(a)$. Если этот интервал симметричен относительно точки $a$ и имеет длину $2\varepsilon$, то его называют *$\varepsilon$-окрестностью* точки $a$ и обозначают $\mathrm{O}_\varepsilon(a)$. Очевидно, что любая точка $x \in \mathrm{O}_\varepsilon(a)$ удовлетворяет неравенствам $a - \varepsilon < x < a + \varepsilon$.

Определение 1.13. Правой (левой) *$\delta$-полуокрестностью* точки $a$ называют интервал $a < x < a + \delta$ $(a - \delta < x < a)$ и обозначают $\mathrm{O}_\delta^+(a)$ $(\mathrm{O}_\delta^-(a))$.

Определение 1.14. Окрестность точки $a$ без самой точки $a$ называют *проколотой окрестностью* этой точки и обозначают $\mathrm{O}(a) \setminus a$.

Определение 1.15. Множество значений $x$, для которых $|x| > M$, где $M > 0$ — некоторое число, называют *$M$-окрестностью* символа $\infty$ и обозначают $\mathrm{O}_M(\infty)$. Множество значений $x > M$ (или $x < M$), где $M \in \mathbf{R}$, называют *$M$-окрестностью* символа $+\infty$ (или $-\infty$) и обозначают $\mathrm{O}_M(+\infty)$ (или $\mathrm{O}_M(-\infty)$).

Определение 1.16. Точка $a$ называется *внутренней* точкой множества $A$, если существует окрестность этой точки, содержащая точки только этого множества и не содержащая точек, не принадлежащих множеству $A$. Точка $a$ называется *граничной* точкой множества $A$, если любая ее окрестность содержит как точки, принадлежащие множеству $A$, так и точки, не принадлежащие множеству $A$.

Например, $x = 1$ для полуинтервала $[0, 2)$ есть внутренняя точка, $x = 0$, $x = 2$ — граничные точки, причем точка $x = 0$ принадлежит данному полуинтервалу, а точка $x = 2$ — не принадлежит.

### 1.6. Ограниченные и неограниченные множества.

Определение 1.17. Множество $A \subset \mathbf{R}$ называется *ограниченным сверху*, если $\exists\, M \in \mathbf{R}:\ x \leqslant M \ \ \forall\, x \in A$.

Определение 1.18. Множество $A \subset \mathbf{R}$ называется *ограниченным снизу*, если $\exists\, m \in \mathbf{R}:\ x \geqslant m \ \ \forall\, x \in A$.

Определение 1.19. Множество $A \subset \mathbf{R}$ называется *ограниченным*, если оно ограничено и сверху, и снизу, т. е. $\exists\, m, M \in \mathbf{R}:$ $m \leqslant x \leqslant M \quad \forall\, x \in A$. Из этого определения следует, что множество $A \subset \mathbf{R}$ ограничено, если $\exists\, c > 0$, $c \in \mathbf{R}:\ |x| \leqslant c \ \ \forall\, x \in A$.

Определение 1.20. Множество, не являющееся ограниченным, называется *неограниченным*.

Например, множество $A = \{x:\ x < 2\}$ ограничено сверху, так как $x < 2 \ \ \forall\, x \in A \quad (M = 2)$. Множество $A = \{n:\ n \in \mathbf{N}\}$ ограничено снизу, так как $n \geqslant 1 \ \ \forall n \in \mathbf{N} \quad (m=1)$. Ограниченными являются множества точек отрезка, конечного интервала или конечного полуинтервала. Множество $A = \{x_n:\ x_n = \dfrac{1}{n},\ n \in \mathbf{N}\}$ ограничено, так как $0 < \dfrac{1}{n} \leqslant 1$, или $\left|\dfrac{1}{n}\right| \leqslant 1 \ \ \forall n \in \mathbf{N} \quad (c=1)$.

Множество $A = \{x:\ |x-2| \geqslant 1\}$, состоящее из элементов $x$, для которых $x \geqslant 3$ или $x \leqslant 1$, является неограниченным.

**1.7. Типовые примеры.**

Пример 1. Записать множество

$$A = \{x : x^3 - 3x^2 + 2x = 0,\ x \in \mathbf{R}\},$$

перечислив его элементы.

Решение. Элементами множества $A$ являются корни уравнения $x^3 - 3x^2 + 2x = 0$. Разложим левую часть этого уравнения на множители: $x^3 - 3x^2 + 2x = x(x-1)(x-2)$. Следовательно, $A = \{0, 1, 2\}$. ■

Пример 2. Записать множество

$$A = \left\{x :\ \frac{1}{4} \leqslant 2^x < 5,\ x \in \mathbf{Z}\right\},$$

перечислив его элементы.

Решение. Запишем данные неравенства в виде $2^{-2} \leqslant 2^x < 5$. Логарифмируя все части неравенств по основанию 2, получим $-2 \leqslant x < \log_2 5$. По условию $x \in \mathbf{Z}$. Тогда в силу последних неравенств имеем $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$. ■

Пример 3. Проверить, будут ли равны множества $A = \{1, 4, 8, 12\}$ и $B = \{4, 1, 12, 8\}$.

Решение. Данные множества равны, так как они состоят из одних и тех же элементов. ■

Пример 4. Найти множества $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, если $A = \{x : -1 < x \leqslant 2\}$, $B = \{x : 1 \leqslant x < 4\}$, $x \in \mathbf{R}$.

Решение. $A \cup B = \{x : -1 < x < 4\}$; $A \cap B = \{x : 1 \leqslant x \leqslant 2\}$; $A \setminus B = \{x : -1 < x < 1\}$; $B \setminus A = \{x : 2 < x < 4\}$. ■

Пример 5. Является ли ограниченным снизу множество $A = \{x : x^2 + 1 > 0,\ x \in \mathbf{R}\}$?

Решение. Неравенство $x^2 + 1 > 0$ выполняется при любом $x \in (-\infty, +\infty)$, т.е. не существует числа $m$ такого, что $\forall x \in A$ выполнялось бы неравенство $x \geqslant m$. Следовательно, множество $A$ не является ограниченным снизу. ■

Пример 6. Ограничено ли сверху множество точек полуинтервала $[2, 10)$?

Решение. Ограничено, так как $x < 10$ для любого $x \in [2, 10)$. ■

Пример 7. Какие из указанных ниже множеств ограничены?

$$A_1 = \{x : 0 < x < 1\}; \qquad A_4 = \{x : x \in [1,3]\};$$
$$A_2 = \{x : x \in \mathbf{N}\}; \qquad A_5 = \{x : x \in ([1,2] \cup [1,+\infty))\};$$
$$A_3 = \{x : |x| > 1\}; \qquad A_6 = \{x : x \in [-3,8) \cup (-1,9]\}.$$

Решение. Множества $A_1, A_4, A_6$ ограничены. Действительно, для множества $A_1$ существует число $c$ (например, $c = 1$) такое, что $|x| < c \quad \forall\, x \in A_1$. Для множества $A_4$ таким числом будет, например, число $c = 3$, так как $|x| \leqslant 3 \quad \forall\, x \in A_4$. Для множества $A_6$ число $c = 9$, так как $|x| \leqslant 9 \quad \forall\, x \in A_6$. Множества $A_2, A_3, A_5$ неограничены.

### 1.8. Задачи для самостоятельного решения.

**1.** Записать множество
$$A = \{x : x^2 - 3x - 4 \leqslant 0,\ x \in \mathbf{N}\},$$
перечислив его элементы.

**2.** Записать множество всех действительных чисел $x$, элементами которого не являются корни уравнения $x^2 - 9x + 20 = 0$.

**3.** Найти объединение множеств $A$ и $B$, если $A = \{x : x^2 + 2x - 3 \leqslant 0\}$, $B = \{x : x^2 - 6x - 16 > 0\}$.

**4.** Найти пересечение множеств $A$ и $B$, если $A = \{x : (x-1)(x^2 - 5x + 6) = 0\}$, $B = \{x : (x-2)(x^2 - x) = 0\}$.

**5.** Найти разность множеств $A$ и $B$, если $A = \{x : x > 0,\ x \in \mathbf{R}\}$, $B = \{x : |x| < 1,\ x \in \mathbf{R}\}$.

**6.** Какие из перечисленных ниже множеств являются ограниченными снизу?

$$A_1 = \{x : |x| > 1\}; \qquad A_6 = \{x : 0 \leqslant x < +\infty\};$$
$$A_2 = \{x : |x| < 1\}; \qquad A_7 = \{1, 10, 100, 1000\};$$
$$A_3 = \{x : x < 0\}; \qquad A_8 = \{x : x(x-5) < 0\};$$
$$A_4 = \{x : -4 < x \leqslant 3\}; \qquad A_9 = \{x : x \in (-\infty, -1]\};$$
$$A_5 = \{x : -\infty < x < 0\}; \qquad A_{10} = \left\{x : x = \frac{n}{n+1}, n \in \mathbf{N}\right\}.$$

**7.** Какие из перечисленных ниже множеств являются ограниченными сверху?

$$B_1 = \left\{x : x = \frac{1}{2^n},\ n \in \mathbf{N}\right\}; \qquad B_6 = \left\{x : x = \frac{n}{n+1},\ n \in \mathbf{N}\right\};$$
$$B_2 = \{x : x^2 - 6x + 8 = 0\}; \qquad B_7 = \left\{x : \cos x \sin x = \frac{1}{2}\right\};$$
$$B_3 = \{x : (x-1)(x+2) > 0\}; \qquad B_8 = \{x : x \in [1,8]\};$$
$$B_4 = \{x : 0 < x < 1\}; \qquad B_9 = \{x : x \in (-\infty, +\infty)\}.$$
$$B_5 = \{x : x^2 - 3x < 0\};$$

**8.** Какие из перечисленных ниже множеств являются ограниченными?

$C_1 = \{x : |x| > 2\}$; $C_5 = \{x : |x| \leqslant 1\}$;

$C_2 = \{x : -x^2 + 2x + 8 < 0\}$; $C_6 = \{x : x \in (-1, 10)\}$;

$C_3 = \left\{x : x = 1 + \dfrac{(-1)^n}{n},\ n \in \mathbf{N}\right\}$; $C_7 = \{x : x \in (4, 6]\}$.

$C_4 = \{x : x = 2^n,\ n \in \mathbf{N}\}$;

## § 2. Числовые последовательности. Предел последовательности

### 2.1. Основные определения.

Определение 2.1. Пусть каждому натуральному числу $n = 1, 2, 3, \ldots$ $(n \in \mathbf{N})$ поставлено в соответствие по определенному закону некоторое действительное число $x_n \in \mathbf{R}$. Тогда множество занумерованных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ называется *числовой последовательностью* или *последовательностью* и обозначается символом $\{x_n\}$, т. е. $\{x_n\} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$. Отдельные числа $x_n$ называются элементами или членами последовательности $\{x_n\}$.

Приведем примеры последовательностей:

1) $\{n\} = \{1, 2, \ldots, n, \ldots\}$;

2) $\left\{\dfrac{(-1)^n}{n}\right\} = \left\{-1, \dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{3}, \ldots\right\}$;

3) $\{(-1)^n\} = \{-1, 1, -1, \ldots\}$;

4) $\left\{\dfrac{2n-1}{n}\right\} = \left\{1, \dfrac{3}{2}, \dfrac{5}{3}, \ldots\right\}$.

Определение 2.2. Последовательность $\{x_n\}$ называется *неубывающей* (*невозрастающей*), если $\forall\, n \in \mathbf{N}$ выполняется неравенство $x_n \leqslant x_{n+1}$ $(x_n \geqslant x_{n+1})$. Последовательность $\{x_n\}$ называется *возрастающей* (*убывающей*), если $\forall\, n \in \mathbf{N}$ выполняется неравенство $x_n < x_{n+1}$ $(x_n > x_{n+1})$.

Неубывающие и невозрастающие последовательности называются *монотонными*, а возрастающие и убывающие — *строго монотонными*.

Укажем примеры таких последовательностей:

1) $1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{4}, \ldots$ — убывающая (строго монотонная) последовательность;

2) 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, … — неубывающая (монотонная) последовательность;

3) 2, 4, 6, 8, 10, … — возрастающая (строго монотонная) последовательность;

4) $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{10}, \ldots$ — невозрастающая (монотонная) последовательность;

5) последовательность $-1, 1, -1, \ldots$ не является ни монотонной, ни, тем более, строго монотонной;

6) последовательность $1, -\frac{1}{2}, 3, -\frac{1}{4}, 5, -\frac{1}{6}, \ldots$ также не является монотонной.

Пример 2.1. Доказать, что последовательность $\{x_n\} = \left\{ \frac{2^n}{n!} \right\}$, $n \in \mathbf{N}$, строго убывает начиная с $n = 2$.

Решение. Рассмотрим отношение

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{2^{n+1} n!}{(n+1)!\, 2^n} = \frac{2}{n+1}.$$

Очевидно, что при $n \geqslant 2$ справедливы неравенства $\frac{x_{n+1}}{x_n} \leqslant \frac{2}{3} < 1$. Следовательно, $x_{n+1} < x_n$ при $n \geqslant 2$, т. е. данная последовательность убывает начиная с $n = 2$. ■

Определение 2.3. Последовательность $\{x_n\}$ называется *ограниченной сверху*, если $\exists\, M \in \mathbf{R}: \; x_n \leqslant M \;\; \forall\, n \in \mathbf{N}$ (см. определение 1.17).

Определение 2.4. Последовательность $\{x_n\}$ называется *ограниченной снизу*, если $\exists\, m \in \mathbf{R}: \; x_n \geqslant m \;\; \forall\, n \in \mathbf{N}$ (см. определение 1.18).

Определение 2.5. Последовательность $\{x_n\}$ называется *ограниченной*, если $\exists\, c > 0,\; c \in \mathbf{R}: \; |x_n| \leqslant c \;\; \forall\, n \in \mathbf{N}$.

Например, последовательность $\{-n\} = \{-1, -2, -3, \ldots\}$ ограничена сверху, так как $x_n = -n < 0 \;\; \forall\, n \in \mathbf{N}$ $(M = 0)$. Последовательность $\{n\} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ ограничена снизу, так как $x_n = n \geqslant 1$ $\forall\, n \in \mathbf{N}$ $(m = 1)$. Последовательность $\left\{ \frac{1}{n} \right\} = \left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots \right\}$ ограничена, так как $0 < \frac{1}{n} \leqslant 1$, или $\left| \frac{1}{n} \right| \leqslant 1$, $\forall\, n \in \mathbf{N}$ $(c = 1)$.

Определение 2.6. Пусть задана произвольная последовательность $\{x_n\}$. Тогда любая последовательность $\{x_{n_k}\} = \{x_{n_1}, x_{n_2}, x_{n_3}, \ldots\}$ из элементов $x_n$, где $n_k$ образует возрастающую последовательность натуральных чисел $(n_k \in \mathbf{N},\; n_1 < n_2 < n_3 < \ldots)$, называется *подпоследовательностью* исходной последовательности $\{x_n\}$.

Так, для последовательности $\{x_n\} = \left\{ \frac{1}{n} \right\} = \left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots \right\}$ последовательность $\{x_{n_k}\} = \left\{ \frac{1}{2n-1} \right\} = \left\{ 1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \ldots \right\}$ является ее подпоследовательностью.

### 2.2. Предел последовательности.

Определение 2.7. Число $a$ называется *пределом последовательности* $\{x_n\}$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется номер $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbf{N}$ такой, что для всех номеров $n > n_0$ выполняется неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$. Пишут

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \quad \text{или} \quad x_n \to a \text{ при } n \to \infty.$$

В символической форме это определение имеет вид

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \iff$$
$$\iff \forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbf{N} :\ \forall\, n > n_0 \ \Rightarrow\ |x_n - a| < \varepsilon.$$

Последнее неравенство равносильно двойному неравенству $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$. Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется номер $n_0(\varepsilon)$ такой, что начиная с номера $n_0 + 1$ все члены $x_n$ последовательности попадут в интервал $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$. В этом интервале будет лежать бесконечное множество членов последовательности $x_{n_0+1}, x_{n_0+2}, \ldots$, а вне интервала — конечное число членов последовательности $x_1, x_2, \ldots, x_{n_0}$ (рис. 2.1).

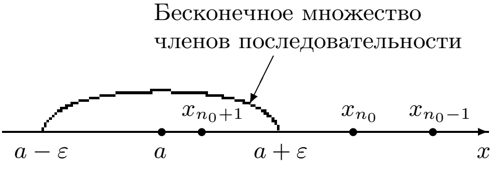


Рис. 2.1

Пример 2.2. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n+1}{n} = 2$.

Решение. Для доказательства, согласно определению 2.7, следует найти для произвольно заданного числа $\varepsilon > 0$ номер $n_0$ такой, что $\forall\, n > n_0$ выполнялось бы неравенство $\left|\dfrac{2n+1}{n} - 2\right| < \varepsilon$. Из последнего неравенства находим

$$\left|\frac{2n+1}{n} - 2\right| = \left|2 + \frac{1}{n} - 2\right| = \left|\frac{1}{n}\right| < \varepsilon, \quad \text{или} \quad n > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Если положить $n_0 = \left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$, где символом $\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$ обозначена целая часть числа $\dfrac{1}{\varepsilon}$, то при всех $n > n_0 = \left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$ $(n \in \mathbf{N})$ будут справедливы неравенства

$$n > \frac{1}{\varepsilon}, \quad \frac{1}{n} < \varepsilon, \quad \frac{1}{n} = \left|\frac{1}{n}\right| = \left|\frac{2n+1}{n} - 2\right| < \varepsilon.$$

Таким образом, для заданного $\varepsilon > 0$ найден номер $n_0 = \left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$ такой, что для всех $n > n_0$ выполняется неравенство $\left|\dfrac{2n+1}{n} - 2\right| < \varepsilon$, или, по определению 2.7, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n+1}{n} = 2$, что и требовалось доказать. ■

Пусть $\varepsilon = 0.1$. Тогда

$$\left|\frac{2n+1}{n} - 2\right| = \left|\frac{1}{n}\right| < 0.1.$$

Отсюда $n > 10$ и $n_0 = 10$. Очевидно, что $a - \varepsilon = 1.9$, $a + \varepsilon = 2.1$. Следовательно, все члены последовательности $\{x_n\}$ с номерами $n > n_0 = 10$ лежат в интервале $(1.9, 2.1)$, а члены с номерами $n \leqslant n_0 = 10$ — вне этого интервала (рис. 2.2).

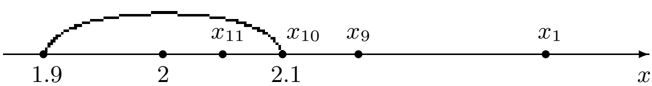


Рис. 2.2

Для $\varepsilon = 0.01$ найдем: $\dfrac{1}{n} < 0.01$, $n > 100$, $n_0 = 100$, $a - \varepsilon = 1.99$, $a + \varepsilon = 2.01$. Следовательно, члены $x_n$ с номерами $n > n_0 = 100$ лежат в интервале $(1.99, 2.01)$, а члены с номерами $n \leqslant n_0 = 100$ — вне этого интервала.

Таким образом, различным значениям $\varepsilon$ соответствуют различные значения $n_0$, т. е., действительно, $n_0 = n_0(\varepsilon)$.

Определение 2.8. Предел последовательности $\{x_n\}$ при $n \to \infty$ равен бесконечности, если для любого числа $M > 0$ существует номер $n_0 = n_0(M) \in \mathbf{N}$ такой, что для всех номеров $n > n_0$ выполняется неравенство $|x_n| > M$. Пишут

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty, \quad \text{или} \quad x_n \to \infty \text{ при } n \to \infty.$$

В символической форме это определение имеет вид

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty \quad \Longleftrightarrow \quad \forall\, M > 0 \quad \exists\, n_0(M) \in \mathbf{N} : \ \forall\, n > n_0 \ \Rightarrow \ |x_n| > M.$$

Последнее неравенство равносильно двум неравенствам: $x_n < -M$, $x_n > M$. Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$, если для любого числа $M > 0$ найдется номер $n_0(M)$ такой, что начиная с номера $n_0 + 1$ все члены $x_n$ последовательности будут лежать вне отрезка $[-M, M]$. Этому отрезку будет принадлежать лишь конечное число членов $x_1, x_2, \ldots, x_{n_0}$.

Приведенные ниже определения пределов $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$ даны только в символической форме.

Определение 2.9.

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty \iff \forall M \quad \exists n_0(M) \in \mathbf{N}: \forall n > n_0 \Rightarrow x_n > M.$$

Определение 2.10.

$$\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty \iff \forall M \quad \exists n_0(M) \in \mathbf{N}: \forall n > n_0 \Rightarrow x_n < M.$$

Геометрическую интерпретацию двух последних пределов можно дать аналогично случаю $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$.

Пример 2.3. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2-1}{n} = \infty$.

Решение. Для доказательства, согласно определению 2.8, требуется для произвольно заданного числа $M > 0$ найти номер $n_0 > 1$ такой, что при всех $n > n_0$ выполнялось бы неравенство $\left|\dfrac{n^2-1}{n}\right| > M$. Из этого неравенства находим: $\dfrac{n^2-1}{n} > M$, $n^2 - Mn - 1 > 0$. Отсюда заключаем, что если принять $n_0(M) = \left[\dfrac{M+\sqrt{M^2+4}}{2}\right] > 1$, то при всех $n > n_0$ будут справедливы неравенства: $n > \dfrac{M+\sqrt{M^2+4}}{2}$, $n^2 - Mn - 1 > 0$, $\dfrac{n^2-1}{n} > M$, $\left|\dfrac{n^2-1}{n}\right| > M$ $(n \in \mathbf{N},\ n > 1)$. Таким образом, по определению 2.8, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2-1}{n} = \infty$, что и требовалось доказать. ■

Рассмотрим последовательность $\{x_n\}$, где

$$x_n = \begin{cases} \dfrac{1}{n}, & n = 2k; \\ \dfrac{2n+1}{n}, & n = 2k-1, \end{cases} \qquad k = 1, 2, \ldots$$

(см. пример 2.2). Очевидно, что

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \begin{cases} 0, & n = 2k; \\ 2, & n = 2k-1, \end{cases} \qquad k = 1, 2, \ldots,$$

т. е. $x_n$ не стремится к какому-либо числу при $n \to \infty$. Следовательно, последовательность *не имеет предела.*

Определение 2.11. Последовательность $\{x_n\}$, имеющая конечный предел $a$, называется *сходящейся.*

В этом случае говорят, что последовательность сходится к числу $a$.

Так, последовательность $\{x_n\} = \left\{ \dfrac{2n+1}{n} \right\}$ сходится к числу $a = 2$, так как $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n+1}{n} = 2$ (см. пример 2.2).

Определение 2.12. Последовательность, имеющая бесконечный предел или вообще не имеющая предела, называется *расходящейся.*

Например, последовательности $\{x_n\} = \{n^2\}$ и $\{x_n\} = \{(-1)^n\}$ — расходящиеся, так как $\lim\limits_{n\to\infty} n^2 = \infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n$ не существует.

**2.3. Свойства сходящихся последовательностей.**

Приведем основные теоремы о сходящихся последовательностях.

Теорема 2.1 (*о единственности предела*). Сходящаяся последовательность имеет только один предел.

Теорема 2.2 (*об ограниченности сходящейся последовательности*). Всякая сходящаяся последовательность ограничена.

Теорема 2.3. Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$ и $x_n \leqslant y_n \ \ \forall\, n \in \mathbf{N}$, то $a \leqslant b$.

Теорема 2.4 (*о промежуточных значениях*). Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$ и $x_n \leqslant z_n \leqslant y_n \ \ \forall\, n \in \mathbf{N}$, то и $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$.

Теорема 2.5 (*о сходимости монотонной ограниченной последовательности*). Всякая неубывающая (невозрастающая) ограниченная сверху (снизу) последовательность сходится.

Отметим, что обратная теорема неверна, т. е. последовательность может сходиться и не быть монотонной.

Например, последовательность $\{x_n\} = \left\{ \dfrac{(-1)^n}{n} \right\}$ сходится, так как $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, что можно установить исходя из определения 2.7. Однако эта последовательность не является монотонной.

Замечание 2.1. Теорема 2.5 остается в силе для последовательности, ограниченной сверху (снизу) и неубывающей (невозрастающей) начиная с некоторого номера.

Теорема 2.6 (*о сходимости подпоследовательности*). Если последовательность $\{x_n\}$ сходится к числу $a$, то любая ее подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ сходится к тому же числу $a$.

Теорема 2.7 (*об арифметических действиях над сходящимися последовательностями*). Пусть последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$

сходятся. Тогда

$$\lim_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \pm \lim_{n\to\infty} y_n;$$

$$\lim_{n\to\infty}(x_n y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} y_n;$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}, \text{ если } \lim_{n\to\infty} y_n \neq 0.$$

Замечание 2.2. Сходимость (расходимость) последовательности не нарушится, если все члены последовательности, начиная с некоторого номера, уменьшить или увеличить на одно и то же число.

Теорема 2.8 (*критерий Коши*[1] *сходимости последовательности*). Для того чтобы последовательность $\{x_n\}$ сходилась, необходимо и достаточно, чтобы $\forall\,\varepsilon > 0 \;\; \exists$ номер $n_0$ такой, что $\forall\, n > n_0$ и любого $p \in \mathbf{N}$ выполнялось неравенство

$$|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon.$$

Пример 2.4. Доказать, что последовательность $\{x_n\}$, где $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$, расходится.

Решение. Для произвольного $p \in \mathbf{N}$ запишем

$$|x_{n+p} - x_n| = \left|\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{n+p}\right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}\right)\right| = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{n+p}.$$

Полагаем $p = n$. Тогда $|x_{n+p} - x_n| = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{n+(n-1)} + \frac{1}{n+n}$. Учитывая, что в последней сумме $\frac{1}{n+1} > \frac{1}{n+n}$, $\frac{1}{n+2} > \frac{1}{n+n}$, $\ldots$, $\frac{1}{n+(n-1)} > \frac{1}{n+n}$, получим

$$|x_{n+p} - x_n| > \underbrace{\frac{1}{n+n} + \frac{1}{n+n} + \ldots + \frac{1}{n+n}}_{n} = n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Следовательно, для $\varepsilon = \frac{1}{2}$, $p = n$ не существует указанного в теореме 2.8 номера $n_0$, так как $|x_{n+p} - x_n| > \frac{1}{2}$ $\forall n \in \mathbf{N}$. В силу критерия Коши последовательность $\{x_n\}$ расходится. ■

[1] О. Коши́ (1789–1857) — французский математик.

**2.4. Типовые примеры.**

Пример 1. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n+2}{n+1}=3$.

Решение. Для доказательства, согласно определению 2.7, для произвольно заданного $\varepsilon>0$ следует найти номер $n_0=n_0(\varepsilon)\in\mathbf{N}$ такой, что $\forall\, n>n_0$ выполнялось бы неравенство $\left|\dfrac{3n+2}{n+1}-3\right|<\varepsilon$. Из последнего неравенства имеем

$$\left|\frac{3n+2}{n+1}-3\right|=\left|\frac{3n+2-3n-3}{n+1}\right|=\left|\frac{-1}{n+1}\right|=\frac{1}{n+1}<\varepsilon.$$

Отсюда $n+1>\dfrac{1}{\varepsilon}$. Тогда $n>\dfrac{1}{\varepsilon}-1$. Полагаем $n_0=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}-1\right]$.

Убедимся, что этот номер $n_0$ — искомый. Действительно, если $n>n_0=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}-1\right]$, то $n>\dfrac{1}{\varepsilon}-1$ $(n\in\mathbf{N})$, $n+1>\dfrac{1}{\varepsilon}$. Отсюда $\dfrac{1}{n+1}<\varepsilon$. Тогда $\left|\dfrac{3n+2}{n+1}-3\right|=\left|\dfrac{1}{n+1}\right|=\dfrac{1}{n+1}<\varepsilon$. Следовательно, найден номер $n_0$ такой, что $\forall\, n>n_0=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}-1\right]$ и $\forall\,\varepsilon>0$ выполняется неравенство $\left|\dfrac{3n+2}{n+1}-3\right|<\varepsilon$. Таким образом, по определению 2.7, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n+2}{n+1}=3$, что и требовалось доказать. ■

Пример 2. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{a^n}=0\quad(a>1)$.

Решение. Для доказательства, согласно определению 2.7, для произвольно заданного $\varepsilon>0$ требуется найти номер $n_0=n_0(\varepsilon)\in\mathbf{N}$ такой, что $\forall\, n>n_0$ выполнялось бы неравенство $\dfrac{1}{a^n}<\varepsilon$ $(a>1)$. Отсюда $a^n>\dfrac{1}{\varepsilon}$, $n>\log_a\dfrac{1}{\varepsilon}$. Полагаем $n_0=\left[\log_a\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$. Тогда $\forall\, n>n_0=\left[\log_a\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$ и $\forall\,\varepsilon>0$ выполняется неравенство $\dfrac{1}{a^n}=\left|\dfrac{1}{a^n}-0\right|<\varepsilon$. Следовательно, по определению 2.7, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{a^n}=0$ $(a>1)$, что и требовалось доказать. ■

**2.5. Задачи для самостоятельного решения.**

Доказать, что

**1.** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n-1}{2^n}=1$; **2.** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n+1}=1$;

**3.** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5n^2}{n^2+1}=5$; **4.** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^n}{3^n+1}=1$.

## § 3. Функции. Предел функции

**3.1. Основные определения. Способы задания функций.** Определение 3.1. Пусть даны два множества — $X$ и $Y$. Если каждому элементу $x \in X$ ставится в соответствие по определенному закону единственный элемент $y \in Y$, то это соответствие называется *функцией* или *отображением* множества $X$ во множество $Y$. Обычно это отображение обозначается одним символом $f$ или в виде $y = f(x)$.

При этом элемент $x$ называется *независимой переменной* или *аргументом*, а соответствующий элемент $y$ — *зависимой переменной* или *функцией*. Множество $X$ называется *областью определения* функции $y = f(x)$ и обозначается $D_y$ или $D_f$. Множество значений функции $y = f(x)$ называется *областью значений* этой функции и обозначается $R_y$ или $R_f$. Очевидно, что $R_y \subseteq Y$.

Отметим, что одним и тем же словом «функция» называют как само отображение множества $X$ во множество $Y$, так и зависимую переменную $y$.

Если $R_y \neq Y$, то соответствие $f$ называется отображением $X$ *в* $Y$, если $R_y = Y$ — отображением $X$ *на* $Y$.

Определение 3.2. Функция $y = f(x)$ называется *действительной функцией действительного аргумента* $x$, если $D_y \subseteq \mathbf{R}$ и $R_y \subseteq \mathbf{R}$.

Например, действительной функцией действительного аргумента $x$ будет функция $y = 5 + \sqrt{x}$. В данном случае $D_y = \{x:\ x \geqslant 0\}$, $R_y = \{y:\ y \geqslant 5\}$.

Числовая последовательность $\{x_n\}$ (см. § 2) есть функция натурального аргумента, т. е. $x_n = f(n)$, для которой $D_f = \mathbf{N}$, $R_f \subset \mathbf{R}$. Например, $f_1(n) = (-1)^n\sqrt{n}$, $f_2(n) = \cos n$.

Основными способами задания функций являются аналитический, графический и табличный.

Способ задания функции называется *аналитическим*, если функция задана с помощью аналитического выражения, т. е. с помощью одной или нескольких формул, устанавливающих связь между значениями аргумента и соответствующими значениями функции.

Ниже приведены примеры таких функций:

1) $y = \operatorname{sign} x = \begin{cases} 1, & x > 0; \\ 0, & x = 0; \\ -1, & x < 0 \end{cases}$ (рис. 3.1)[1];

2) $y = x^3 + 2x + 1,\ x \in \mathbf{R}$;

3) $y = \begin{cases} x, & \text{если } 0 \leqslant x \leqslant 1; \\ x^2, & \text{если } x > 1. \end{cases}$

---

[1] sign — от лат. *signum* — знак.

4) $y = [x]$, $x \in \mathbf{R}$. Символом $[x]$ обозначают наибольшее целое число, не превосходящее $x$ (рис. 3.2). Так, $[3.7] = 3$, $[-5.4] = -6$.

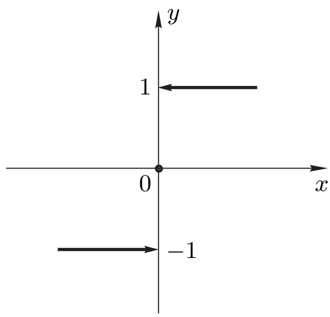


Рис. 3.1

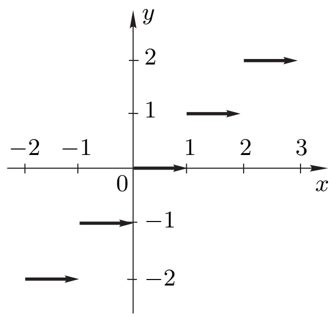


Рис. 3.2

Отметим, что если функция $y = f(x)$ задана аналитически и не указана ее область определения $D_y$, то под $D_y$ понимают множество всех тех значений $x$, при которых $f(x)$ принимает действительные значения.

*Графическим* называется способ задания функции, при котором соответствие между множеством значений аргумента и множеством значений функции устанавливается графически.

Например, барограмма, записанная барографом, задает графически атмосферное давление как функцию времени.

Способ задания функции называется *табличным*, если задана таблица значений аргумента и соответствующих значений функции.

Например, зависимость температуры воздуха от времени может быть задана с помощью таблицы экспериментальных данных.

Кроме указанных способов задания функции, существуют и другие. Например, при проведении численных расчетов на компьютерах функции задаются *алгоритмическим способом*, т. е. с помощью программы вычисления их значений при требуемых значениях аргумента. Функцию можно задать также и *словесным описанием* соответствия между значениями аргумента и значениями функции. Например, «каждому рациональному числу поставим в соответствие число 1, а каждому иррациональному — 0...». Определенная таким образом функция называется *функцией Дирихле*[2].

### 3.2. Сложная, обратная и параметрически заданная функции.

Определение 3.3. Пусть функция $u = \varphi(x)$ определена на множестве $D_\varphi$, функция $y = f(u)$ — на множестве $D_f$. Поставим

[2]П.Г.Л. Дирихле́ (1805–1859) — немецкий математик.

в соответствие каждому значению $x \in D_\varphi$, где $\varphi(x) = u \in D_f$, значение $y = f(u)$. В результате получим функцию $y = f(\varphi(x))$, определенную на множестве $D_y \subseteq D_\varphi$. Эту функцию называют *сложной функцией* аргумента $x$, или *суперпозицией* (*композицией*) функций $f$ и $\varphi$. При этом переменную $u = \varphi(x)$ называют *промежуточным аргументом* функции $y = f(\varphi(x))$.

Подчеркнем, что в область определения $D_y$ сложной функции $y = f(\varphi(x))$ входят те и только те значения $x \in D_\varphi$, для которых $\varphi(x) \in D_f$.

Например, если $y = \ln u$, $u = 5 - x^2$, то $y = \ln(5 - x^2)$ — сложная функция аргумента $x$, определенная на множестве $D_y = \{x:\ -5 < x < 5\}$. Здесь $D_\varphi = \{x:\ -\infty < x < +\infty\}$, $D_f = \{u:\ u > 0\}$.

Сложная функция может иметь несколько промежуточных аргументов. Например, $y = y(u)$, $u = u(v)$, $v = v(w)$, $w = w(x)$. Так, функцию $y = 2^{\sin^3\sqrt{x}}$ можно рассматривать как суперпозицию следующих функций: $y = 2^u$, $u = v^3$, $v = \sin w$, $w = \sqrt{x}$, причем $D_y = \{x:\ x \geqslant 0\}$.

Определение 3.4. Пусть дана функция $y = f(x)$ с областью определения $D_y$ и областью значений $R_y$. Предположим, что каждому элементу $y \in R_y$ можно поставить в соответствие единственный элемент $x \in D_y$, для которого $y = f(x)$. Полученную однозначную функцию $x = \varphi(y)$, для которой $D_x = R_y$, $R_x = D_y$, называют *обратной* к функции $y = f(x)$ и обозначают $f^{-1}$ или $x = f^{-1}(y)$.

Если для функции $f$ употребляют термин «отображение», то для функции $f^{-1}$ — термин «обратное отображение». Функции $f$ и $f^{-1}$ называют *взаимно обратными*. Очевидно, что $f(f^{-1}(y)) = y$.

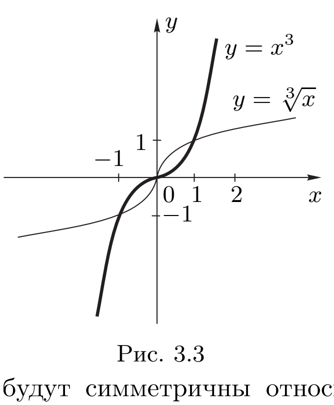


Рис. 3.3

Зададим функцию $y = x^3$ на отрезке $[1, 2]$. Тогда $D_y = [1, 2]$, $R_y = [1, 8]$. Из уравнения $y = x^3$ для любого $y \in [1, 8]$ можно найти единственное значение $x = \sqrt[3]{y} \in [1, 2]$. Следовательно, функция $x = \sqrt[3]{y}$ отображает множество $R_y = D_x$ на множество $D_y = R_x$ и является обратной к функции $y = x^3$.

Если функцию, обратную к функции $y = f(x)$, обозначить $y = f^{-1}(x)$, то графики функций $y = f(x)$ и $y = f^{-1}(x)$ в одной системе координат будут симметричны относительно биссектрисы первого и третьего координатных углов. На рис. 3.3 изображены графики функции $y = x^3$ и обратной к ней функции $y = \sqrt[3]{x}$.

Некоторые функции не имеют обратных. Например, функция $y = x^2$, если ее рассматривать на всей числовой оси, не имеет обратной функции, так как каждому значению $y > 0$ соответствуют два значения $x$: $x = \sqrt{y}$ и $x = -\sqrt{y}$. Если же функцию $y = x^2$ рассматривать только на полупрямой $[0, +\infty)$, то для нее существует обратная функция $x = \sqrt{y}$, так как каждому значению $y \geqslant 0$ соответствует единственное значение $x \in [0, +\infty)$, удовлетворяющее уравнению $y = x^2$. На полупрямой $(-\infty, 0]$ функция $y = x^2$ также имеет обратную функцию, определяемую формулой $x = -\sqrt{y}$.

Определение 3.5. Пусть на некотором множестве $T$ заданы две функции: $x = x(t)$ и $y = y(t)$, где $t \in T = D_x = D_y$, $R_x = X$, $R_y = Y$. Предположим, что каждому значению $x = x(t) \in X$ поставлено в соответствие значение $y = y(t) \in Y$, отвечающее тому же значению $t$, что и $x(t)$. Полученное соответствие есть функция $f$, определенная на множестве $X$ со значениями во множестве $Y$. В этом случае говорят, что функция $f$ *задана параметрически* в виде $x = x(t)$, $y = y(t)$. Переменная $t$, от которой зависят $x$ и $y$, называется *параметром*.

Так, функция $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ (графиком которой служит верхняя половина окружности радиуса $R$ с центром в начале координат) может быть задана параметрически в виде $x = R\cos t$, $y = R\sin t$, $t \in [0, \pi]$.

Подчеркнем, что в определении 3.5 функции $x(t)$ и $y(t)$ равноправны.

Отметим, что существуют кривые, которые задаются только в параметрическом виде. К таким кривым относится циклоида $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $t \in \mathbf{R}$. Ее графиком служит траектория точки окружности, катящейся без скольжения по оси $Ox$ (рис. 3.4).

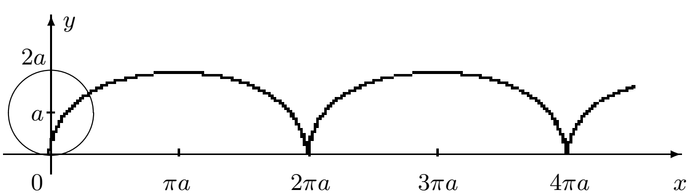


Рис. 3.4

### 3.3. Элементарные функции.

Определение 3.6. *Основными элементарными функциями* называются: постоянная $y = C$, степенная $y = x^\alpha$ $(\alpha \in \mathbf{R})$, показательная $y = a^x$ $(a > 0)$, логарифмическая $y = \log_a x$ $(a > 0,\ a \neq 1)$, тригонометрические $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$, обратные тригонометрические $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arcctg} x$. В дальнейшем свойства и графики основных элементарных функций предполагаются известными.

Определение 3.7. Функция, которую можно задать в виде аналитического выражения с помощью конечного числа арифметических операций и суперпозиций основных элементарных функций, называется *элементарной функцией.*

Элементарными являются, например, функции:

1) $y = ax + b$, $x \in \mathbf{R}$, $a, b \in \mathbf{R}$, $a \neq 0$;

2) $y = ax^2 + bx + c$, $x \in \mathbf{R}$, $a, b, c \in \mathbf{R}$, $a \neq 0$;

3) $y = \sqrt{1 - x^2}$, $x \in [-1, 1]$;

4) $y = x \sin \dfrac{1}{x}$, $x \in \mathbf{R}$, $x \neq 0$.

К элементарным функциям относятся, в частности, многочлены, рациональные и иррациональные функции.

Определение 3.8. *Многочленом* $P(x)$ называется функция вида

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0, \quad a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbf{R},\ n \in \mathbf{N}.$$

Если $a_n \neq 0$, то $P(x)$ называется *многочленом $n$-й степени.* Часто его обозначают $P_n(x)$, а число $n$ называют *степенью многочлена.* Если все коэффициенты многочлена равны нулю, то его называют *нулевым многочленом.*

Определение 3.9. *Рациональной* функцией (или дробью) называется функция $R(x)$, которая может быть представлена в виде $R(X) = \dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, где $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ — многочлены степени $n$ и $m$ соответственно, причем $m \geqslant 1$. Эта функция определена при всех $x$, для которых $Q_m(x) \neq 0$.

Определение 3.10. *Иррациональной*, т. е. не являющейся рациональной, называется функция, которая может быть задана с помощью конечного числа арифметических операций и суперпозиций рациональных функций и степенных функций с дробными рациональными показателями.

Иррациональными являются, например, функции

$$y = \sqrt[3]{x^2 - 1},\ x \in \mathbf{R}; \quad y = \frac{x - \sqrt[3]{x^2 - 1}}{\sqrt{1 + x^2}},\ x \in \mathbf{R}.$$

Рациональные и иррациональные функции принадлежат классу *алгебраических*[3] функций. Примерами неалгебраических, или *трансцендентных*, функций являются показательная, логарифмическая, тригонометрические, обратные тригонометрические функции.

[3] Определение алгебраической функции см., например, в [1].

**3.4. Монотонные функции.**

Определение 3.11. Функция $f(x)$ называется *неубывающей* (*невозрастающей*) на некотором интервале, если для любых точек $x_1$ и $x_2$ этого интервала таких, что $x_1 < x_2$, справедливо неравенство $f(x_1) \leqslant f(x_2)$ $(f(x_1) \geqslant f(x_2))$. Неубывающая и невозрастающая функции называются *монотонными*.

Определение 3.12. Функция $f(x)$ называется *возрастающей* (*убывающей*) на некотором интервале, если для любых точек $x_1$ и $x_2$ этого интервала таких, что $x_1 < x_2$, справедливо неравенство $f(x_1) < f(x_2)$ $(f(x_1) > f(x_2))$. Возрастающая и убывающая функции называются *строго монотонными*.

Так, функция $y = 2^x$ возрастает на всей числовой оси. Функция $y = x^2$ убывает на интервале $(-\infty, 0)$ и возрастает на интервале $(0, +\infty)$.

**3.5. Ограниченные функции.**

Определение 3.13. Функция $f(x)$ называется *ограниченной сверху* в области $D_f$, если ограничено сверху сверху множество ее значений в этой области, т. е. если $\exists\, M \in \mathbf{R}: \ f(x) \leqslant M \ \ \forall\, x \in D_f$ (см. определение 1.17).

Определение 3.14. Функция $f(x)$ называется *ограниченной снизу* в области $D_f$, если ограничено снизу множество ее значений в этой области, т. е. если $\exists\, m \in \mathbf{R}: \ f(x) \geqslant m \ \ \forall\, x \in D_f$ (см. определение 1.18).

Определение 3.15. Функция $f(x)$ называется *ограниченной* в области $D_f$, если ограничено множество ее значений в этой области. Другими словами, функция $f(x)$ ограничена на $D_f$, если $\exists\, c > 0, c \in \mathbf{R}: \ |f(x)| \leqslant c \ \ \forall\, x \in D_f$ (см. определение 1.19).

Приведем несколько примеров.

1. Функция $f(x) = e^x$ определена на всей числовой прямой, т. е. $D_f = (-\infty, +\infty)$, и $\forall\, x \in D_f$ выполняется неравенство $e^x > 0$. Поэтому данная функция ограничена снизу в области $D_f$ $(m = 0)$.

2. Функция $f(x) = 2 - x^4$ определена на всей числовой оси, т. е. $D_f = (-\infty, +\infty)$. Для любого $x \in D_f$ выполняется неравенство $f(x) \leqslant 2$. Следовательно, функция $f(x)$ ограничена сверху в области $D_f$ $(M = 2)$.

3. Функция $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ определена в области $D_f = \{x: \ |x| \leqslant \leqslant 1\}$. Так как для любого $x \in D_f$ справедливо неравенство $|f(x)| \leqslant 1$, то функция $f(x)$ ограничена на $D_f$ $(c = 1)$.

Определение 3.16. Функция $f(x)$ называется *ограниченной в окрестности* $\mathrm{O}(a)$ *точки* $a$, если существует число $c > 0$ такое, что для всех $x$ из этой окрестности выполняется неравенство $|f(x)| \leqslant c$, т. е. $\exists\, c > 0:\ |f(x)| \leqslant c\ \ \forall\, x \in \mathrm{O}(a)$.

Рассмотрим функцию $y = x^2$ в $\varepsilon$-окрестности точки $a = 1$ при $\varepsilon = 0.1$. Очевидно, что $\mathrm{O}_\varepsilon(1)$ есть интервал $(0.9, 1.1)$. Неравенство $x^2 < 1.21$ выполняется для любой точки $x \in \mathrm{O}_\varepsilon(1)$. Следовательно, функция $y = x^2$ ограничена в рассматриваемой окрестности точки $a = 1$.

### 3.6. Предел функции.

Определение 3.17. Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки $a$, кроме, быть может, самой точки $a$. Число $A$ называется *предeлом функции $f(x)$ при $x \to a$,* если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для всех $x$, удовлетворяющих неравенству $0 < |x - a| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$. Пишут

$$\lim_{x\to a} f(x) = A \quad \text{или} \quad f(x) \to A \ \text{при} \ x \to a.$$

В символической форме это определение принимает вид

$$\lim_{x\to a} f(x) = A \quad \Longleftrightarrow \quad \forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta(\varepsilon) > 0: \\ \forall\, x,\ 0 < |x - a| < \delta \ \Rightarrow\ |f(x) - A| < \varepsilon. \quad (3.1)$$

Из неравенства $0 < |x - a| < \delta$ имеем $a - \delta < x < a + \delta \quad (x \neq a)$, т. е. $x \in \mathrm{O}_\delta(a) \setminus a$ (см. определения 1.12 и 1.14). Неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$ равносильно двойному неравенству $A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon$, т. е. $f(x) \in \mathrm{O}_\varepsilon(A)$. Таким образом,

$$\lim_{x\to a} f(x) = A \quad \Longleftrightarrow \quad \forall\, \mathrm{O}_\varepsilon(A) \quad \exists\, \mathrm{O}_\delta(a): \\ \forall\, x \in \mathrm{O}_\delta(a) \setminus a \ \Rightarrow\ f(x) \in \mathrm{O}_\varepsilon(A). \quad (3.2)$$

Говорят, что определение предела функции в виде (3.1) записано на «языке $\varepsilon$-$\delta$», а в виде (3.2) — на «языке окрестностей».

На рис. 3.5 дана геометрическая интерпретация предела $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$. Для всех $x$ из интервала $(a - \delta,\, a + \delta)$ оси $Ox$ значения функции $f(x)$ лежат в интервале $(A - \varepsilon,\, A + \varepsilon)$ оси $Oy$.

Замечание 3.1. Отметим, что $\lim\limits_{x\to a} x = a$. Действительно, по определению 3.17, для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta = \varepsilon$ такое, что для всех $x$, удовлетворяющих неравенству $0 < |x - a| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - A| = |x - a| < \varepsilon$.

Пример 3.1. Доказать, что $\lim\limits_{x\to 1} (2x + 3) = 5$.

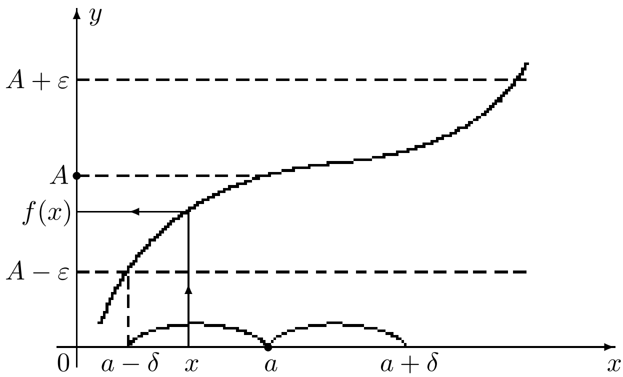


Рис. 3.5

Решение. Для доказательства, согласно определению 3.17, для произвольно заданного числа $\varepsilon > 0$ следует найти число $\delta > 0$ такое, что $\forall x,\ |x-1| < \delta$, выполнялось бы неравенство $|2x+3-5| < \varepsilon$. Из этого неравенства имеем $|2x+3-5| = |2x-2| = 2|x-1| < \varepsilon$. Отсюда заключаем, что если положить $\delta(\varepsilon) = \dfrac{\varepsilon}{2}$, то $\forall x,\ 0 < |x-1| < \delta = \dfrac{\varepsilon}{2}$, выполняется неравенство $|2x-2| = |2x+3-5| < \varepsilon$, или, по определению 3.17, $\lim\limits_{x\to 1}(2x+3) = 5$. ■

Пусть $\varepsilon = \varepsilon_1 = 0.2$. Тогда $\delta = \delta_1 = 0.1$ и $|x-1| < 0.1$, или $0.9 < x < 1.1$. Это означает, что для любых $x \in (0.9, 1.1)$ (т. е. $\forall x \in \mathrm{O}_{\delta_1}(1)$) значения $f(x) = 2x+3$ лежат в интервале $(4.8, 5.2)$ (т. е. $f(x) \in \mathrm{O}_{\varepsilon_1}(5)$).

Если $\varepsilon = \varepsilon_2 = 0.4$, то $\delta = \delta_2 = 0.2$ и $|x-1| < 0.2$, или $0.8 < x < 1.2$. Тогда для любых $x \in (0.8, 1.2)$ (т. е. $\forall x \in \mathrm{O}_{\delta_2}(1)$) значения $f(x) = 2x+3$ будут лежать в интервале $(4.6, 5.4)$ (т. е. $f(x) \in \mathrm{O}_{\varepsilon_2}(5)$).

Таким образом, разным значениям $\varepsilon$ соответствуют разные значения $\delta$, т. е., действительно, $\delta = \delta(\varepsilon)$.

Пример 3.2. Доказать, что $\lim\limits_{x\to 0}\cos x = 1$.

Решение. Для доказательства, в соответствии с определением 3.17, следует для произвольно заданного числа $\varepsilon > 0$ найти число $\delta > 0$ такое, что $\forall x,\ 0 < |x| < \delta$, выполнялось бы неравенство $|\cos x - 1| < \varepsilon$. По формуле тригонометрии разность $1 - \cos x = 2\sin^2\dfrac{x}{2}$. Учитывая, что $|\sin x| \leqslant |x|\quad \forall x \in \mathbf{R}$, запишем

$$|\cos x - 1| = 2\sin^2\frac{x}{2} \leqslant 2\left|\sin\frac{x}{2}\right| \leqslant |x| < \varepsilon.$$

Если принять $\delta(\varepsilon) = \varepsilon$, то $\forall x,\ 0 < |x| < \delta = \varepsilon$, выполняется неравенство $|\cos x - 1| < \varepsilon$, или, по определению 3.17, $\lim\limits_{x\to 0} \cos x = 1$. ■

Приведенные ниже определения пределов $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = A$ ($A$ — число) записаны только в символической форме.

Определение 3.18. Пусть $x \to \infty$. Тогда

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = A \iff$$
$$\iff \forall\,\varepsilon > 0 \quad \exists\, M(\varepsilon) > 0 :\ \forall\, x,\ |x| > M \ \Rightarrow\ |f(x) - A| < \varepsilon,$$

или

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = A \iff$$
$$\iff \forall\, \mathrm{O}_\varepsilon(A) \quad \exists\, \mathrm{O}_M(\infty) :\ \forall\, x \in \mathrm{O}_M(\infty)\ \Rightarrow\ f(x) \in \mathrm{O}_\varepsilon(A)$$

(см. определение 1.15 окрестности $\mathrm{O}_M(\infty)$).

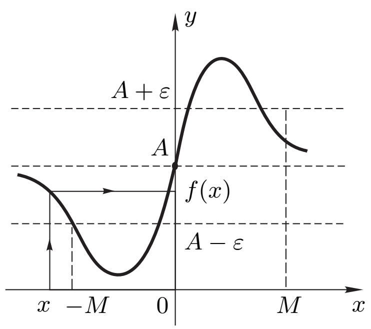


Рис. 3.6

Из определения 3.18 следует, что для всех $x$, лежащих в интервалах $(-\infty, -M)$ и $(M, +\infty)$ оси $Ox$, соответствующие значения $f(x)$ должны лежать в интервале $(A-\varepsilon, A+\varepsilon)$ оси $Oy$ (рис. 3.6).

Пример 3.3. Доказать, что $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0 \quad (n \in \mathbf{N})$.

Для доказательства, согласно определению 3.18, для произвольно заданного числа $\varepsilon > 0$ следует найти число $M > 0$ такое, что $\forall\, x$, $|x| > M$, выполнялось бы неравенство $\left|\dfrac{1}{x^n}\right| < \varepsilon$. Из этого неравенства имеем $|x^n| > \dfrac{1}{\varepsilon}$, $|x|^n > \dfrac{1}{\varepsilon}$, $|x| > \dfrac{1}{\sqrt[n]{\varepsilon}}$. Если положить $M(\varepsilon) = \dfrac{1}{\sqrt[n]{\varepsilon}}$, то $\forall\, x$, $|x| > M = \dfrac{1}{\sqrt[n]{\varepsilon}}$, выполняется неравенство $\left|\dfrac{1}{x^n}\right| = \left|\dfrac{1}{x^n} - 0\right| < \varepsilon$, или, по определению 3.18, $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0$. ■

Определение 3.19. Пусть $x \to +\infty$. Тогда

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = A \iff$$
$$\iff \forall\,\varepsilon > 0 \quad \exists\, M(\varepsilon) :\ \forall\, x > M(\varepsilon)\ \Rightarrow\ |f(x) - A| < \varepsilon$$

(см. рис. 3.7) или

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = A \quad \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow \quad \forall\, \mathrm{O}_\varepsilon(A) \quad \exists\, \mathrm{O}_M(+\infty):\ \forall\, x \in \mathrm{O}_M(+\infty) \ \Rightarrow\ f(x) \in \mathrm{O}_\varepsilon(A)$$

(см. определение 1.15 окрестности $\mathrm{O}_M(+\infty)$).

Определение 3.20. Пусть $x \to -\infty$. Тогда

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = A \quad \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow \quad \forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, M(\varepsilon):\ \forall\, x < M(\varepsilon) \ \Rightarrow\ |f(x) - A| < \varepsilon$$

(см. рис. 3.8) или

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = A \quad \Longleftrightarrow$$
$$\Longleftrightarrow \quad \forall\, \mathrm{O}_\varepsilon(A) \quad \exists\, \mathrm{O}_M(-\infty):\ \forall\, x \in \mathrm{O}_M(-\infty) \ \Rightarrow\ f(x) \in \mathrm{O}_\varepsilon(A)$$

(см. определение 1.15 окрестности $\mathrm{O}_M(-\infty)$).

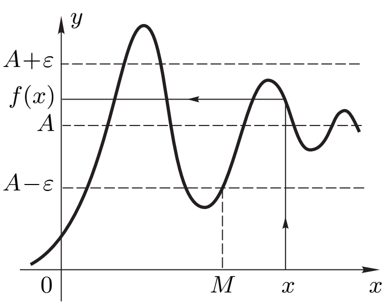


Рис. 3.7

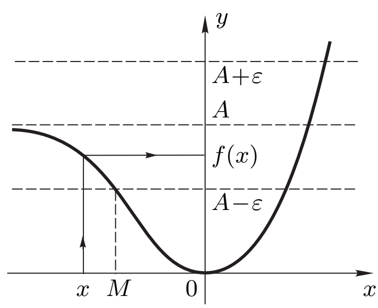


Рис. 3.8

Замечание 3.2. Из определения 3.17 предела функции следует, что постоянная функция $f(x) = C$ при $x \to a$ имеет предел, равный $C$, так как для любого $\varepsilon > 0$ неравенство $|f(x) - C| = |C - C| < \varepsilon$ выполняется для всех значений $x$ (здесь $\delta$ может быть любым положительным числом). Это заключение остается в силе, если $a$ — один из символов $\infty$, $+\infty$, $-\infty$.

Определение 3.21. Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки $a$, кроме, быть может, самой точки $a$. Предел функции $f(x)$ при $x \to a$ равен бесконечности, если для любого числа $K > 0$ существует число $\delta = \delta(K) > 0$ такое, что для всех $x$, удовлетворяющих неравенству $0 < |x - a| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x)| > K$ (рис. 3.9). Пишут

$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty \quad \text{или} \quad f(x) \to \infty \ \text{при} \ x \to a.$$

В символической форме это определение имеет вид

$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty \iff$$

$$\iff \forall K > 0 \quad \exists\, \delta(K) > 0 : \forall x,\ 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)| > K,$$

или

$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty \iff$$

$$\iff \forall\, \mathrm{O}_K(\infty) \quad \exists\, \mathrm{O}_\delta(a) : \forall x \in \mathrm{O}_\delta(a) \setminus a \Rightarrow f(x) \in \mathrm{O}_K(\infty).$$

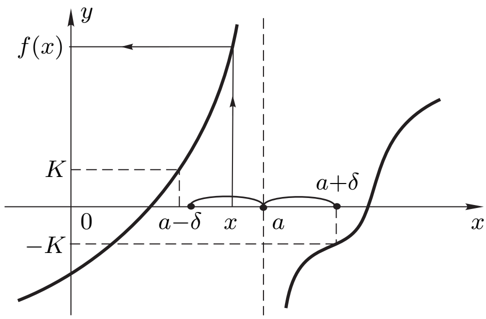


Рис. 3.9

Пример 3.4. Доказать, что $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^n} = \infty \quad (n \in \mathbf{N})$.

Для доказательства, в соответствии с определением 3.21, следует для произвольно заданного числа $K > 0$ найти число $\delta > 0$ такое, что $\forall x,\ 0 < |x| < \delta$, выполнялось бы неравенство $\left|\dfrac{1}{x^n}\right| > K$. Из этого неравенства находим $\dfrac{1}{|x|^n} > K$, $|x|^n < \dfrac{1}{K}$, $|x| < \dfrac{1}{\sqrt[n]{K}}$. Если положить $\delta(K) = \dfrac{1}{\sqrt[n]{K}}$, то $\forall x,\ 0 < |x| < \delta = \dfrac{1}{\sqrt[n]{K}}$, выполняется неравенство $\left|\dfrac{1}{x^n}\right| > K$, или, по определению 3.21, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^n} = \infty$.

Ниже приведены определения пределов $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ и $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$ только в символической форме.

Определение 3.22. Пусть $x \to a$. Тогда

$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty \iff$$

$$\iff \forall K \quad \exists\, \delta(K) > 0 : \forall x,\ 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow f(x) > K$$

(см. рис. 3.10) или

$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty \iff$$

$$\iff \forall\, \mathrm{O}_K(+\infty) \quad \exists\, \mathrm{O}_\delta(a) : \forall x \in \mathrm{O}_\delta(a) \setminus a \Rightarrow f(x) \in \mathrm{O}_K(+\infty).$$

Определение 3.23. Пусть $x \to a$. Тогда

$$\lim_{x\to a} f(x) = -\infty \iff$$
$$\iff \forall K \quad \exists\, \delta(K) > 0 : \forall x,\ 0 < |x-a| < \delta \ \Rightarrow\ f(x) < K$$

(см. рис. 3.11) или

$$\lim_{x\to a} f(x) = -\infty \iff$$
$$\iff \forall\, \mathrm{O}_K(-\infty) \quad \exists\, \mathrm{O}_\delta(a) : \forall x \in \mathrm{O}_\delta(a) \setminus a \ \Rightarrow\ f(x) \in \mathrm{O}_K(-\infty).$$

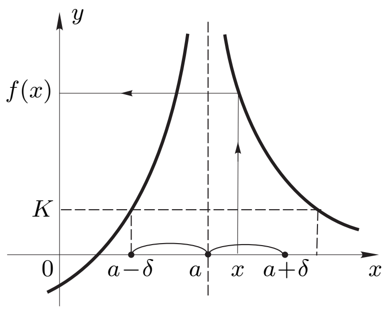


Рис. 3.10

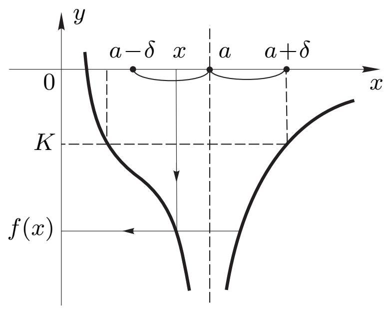


Рис. 3.11

Замечание 3.3. Подчеркнем, что в точке $x = a$ функция $f(x)$ может быть как определена, так и не определена, причем в первом случае значение $f(a)$ может совпадать с конечным пределом $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ = A$, а может и не совпадать с ним.

Определения, аналогичные определениям 3.21–3.23, имеют место и для случая, когда $a$ — один из символов $\infty$, $+\infty$, $-\infty$. Например,

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty \iff$$
$$\iff \forall K > 0 \quad \exists\, M(K) > 0 : \forall x,\ |x| > M(K) \ \Rightarrow\ |f(x)| > K,$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty \iff \forall K \quad \exists\, M(K) : \forall x > M(K) \ \Rightarrow\ f(x) < K.$$

Замечание 3.4. Можно доказать, что

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^p = \begin{cases} +\infty, & p > 0, \quad p \in \mathbf{R}; \\ 1, & p = 0; \\ 0, & p < 0, \quad p \in \mathbf{R}, \end{cases}$

в частности, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{m}{n}} = +\infty, \quad m, n \in \mathbf{N}$;

2) $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n = \begin{cases} +\infty, & n = 2k, \quad k = 1, 2, \ldots; \\ -\infty, & n = 2k-1, \quad k = 1, 2, \ldots \end{cases}$