



Уральский
федеральный
университет

имени первого Президента
России Б.Н.Ельцина

Институт математики
и компьютерных наук

К. Н. ГУРЬЯНОВА
У. А. АЛЕКСЕЕВА
В. В. БОЯРШИНОВ

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Учебное пособие

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
УРАЛЬСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ ПЕРВОГО ПРЕЗИДЕНТА РОССИИ Б. Н. ЕЛЬЦИНА

К. Н. Гурьянова, У. А. Алексеева, В. В. Бояршинов

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Рекомендовано методическим советом УрФУ
в качестве учебного пособия для студентов,
обучающихся по программе бакалавриата по направлениям
подготовки 010200 «Математика и компьютерные науки»,
010300 «Фундаментальная информатика и информационные
технологии», 230700 «Прикладная информатика»,
222900 «Нанотехнологии и микросистемная техника»,
011200 «Физика», 011800 «Радиофизика»,
221700 «Стандартизация и метрология»,
230400 «Информационные системы и технологии»

Екатеринбург
Издательство Уральского университета
2014

УДК 517 (075.8)

Г 959

Рецензенты:

кафедра высшей математики и физики
Уральского технического института связи и информатики
(заведующий кафедрой кандидат физико-математических
наук Н. И. Ильиных);

А. Г. Б а б е н к о, доктор физико-математических наук
(Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского
УрО РАН)

Гурьянова, К.Н.

Г 959 Математический анализ : [учеб. пособие] / К. Н. Гурьянова, У. А. Алексеева, В. В. Бояршинов ; М-во образования и науки Рос. Федерации, Урал. федер. ун-т. — Екатеринбург : Изд-во Урал. ун-та, 2014. — 330 с.

ISBN 978-5-7996-1340-2

В пособии рассматриваются основные разделы теории пределов, дифференциальное и интегральное исчисление функций одной и нескольких переменных и их применение. Содержится большое число иллюстративных упражнений и задач, а также решенных задач – эталонов для самостоятельной работы студентов.

Для студентов и преподавателей физических и математических специальностей.

УДК 517 (075.8)

ISBN 978-5-7996-1340-2

© Уральский федеральный университет, 2014
© Гурьянова К. Н., Алексеева У. А.,
Бояршинов В. В., 2014

Оглавление

Предисловие	7
1. Элементы математической логики	9
2. Элементы теории множеств	17
2.1. Понятие множества	17
2.2. Операции над множествами	19
2.3. Прямое (декартово) произведение	23
3. Метод математической индукции	25
4. Действительные (вещественные) числа	27
4.1. Представление вещественных чисел в виде бесконечных десятичных дробей	27
4.2. Аксиоматическое определение множества вещественных чисел	29
4.3. Следствия из аксиом действительных чисел	32
5. Полнота числовой прямой	37
5.1. Ограниченные множества действительных чисел	37
5.2. Принцип Архимеда и его следствия	41
6. Предел числовой последовательности	51
6.1. Понятие предела последовательности	51
6.2. Свойства сходящихся последовательностей	53
6.3. Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности	58
6.4. Монотонные последовательности	60
7. Предел функции	65
7.1. Понятие функции	65
7.2. Определение предела функции в точке	66
7.3. Свойства предела функции	69
7.4. Бесконечно малые и бесконечно большие функции	71

8.	Непрерывность функции	73
8.1.	Точки непрерывности и разрыва функции	73
8.2.	Функции, непрерывные на отрезке	75
8.3.	Равномерная непрерывность функций	78
8.4.	Существование обратных функций	79
8.5.	Элементарные функции	80
8.6.	Замечательные пределы	81
9.	Дифференциальное исчисление функции одной переменной	85
9.1.	Определение и геометрический смысл производной функции в точке	86
9.2.	Дифференцируемые функции. Дифференциал . . .	90
9.3.	Производная сложной функции	92
9.4.	Производная обратной функции	94
9.5.	Производные и дифференциалы высших порядков .	95
9.6.	Производная функции, заданной параметрически .	97
9.7.	Основные теоремы дифференциального исчисления	98
9.8.	Раскрытие неопределенностей по правилу Лопиталя	104
9.9.	Формула Тейлора	107
9.10.	Исследование поведения функции при помощи про- изводных	114
10.	Первообразная, неопределенный интеграл и их свойства .	117
10.1.	Некоторые методы вычисления неопределенного ин- теграла	120
11.	Определенный интеграл	126
11.1.	Суммы Дарбу. Критерий интегрируемости	128
11.2.	Классы интегрируемых функций	131
11.3.	Простейшие свойства интеграла	132
11.4.	Теоремы о среднем значении	134
11.5.	Интеграл с переменным верхним пределом. Форму- ла Ньютона–Лейбница	136
11.6.	Методы вычисления определенного интеграла . . .	139
11.7.	Приложения определенного интеграла	142

12.	Метрические пространства. Сходимость в пространстве $\mathbb{R}^n$	145
12.1.	Расстояние. Сходимость в метрическом пространстве	145
12.2.	Метрическое пространство $\mathbb{R}^n$	149
13.	Предел функции многих переменных	157
14.	Непрерывность функции многих переменных	164
14.1.	Непрерывность в точке. Локальные свойства непрерывных функций	164
14.2.	Непрерывность на множестве. Свойства функций, непрерывных на множестве	166
15.	Дифференцируемость функции многих переменных	170
15.1.	Частные производные	170
15.2.	Определение дифференцируемости и дифференциала функции	171
15.3.	Дифференцирование сложной функции	173
15.4.	Частные производные и дифференциалы высших порядков	176
16.	Неявные функции	180
17.	Замена переменных в дифференциальных выражениях	187
17.1.	Замена переменных в дифференциальных выражениях, содержащих обыкновенные производные	187
17.2.	Замена переменных в дифференциальных выражениях, содержащих частные производные	189
18.	Экстремум функции многих переменных	193
18.1.	Определение и необходимые условия экстремума функции нескольких переменных	193
18.2.	Некоторые сведения о квадратичных формах	196
18.3.	Достаточные условия экстремума функции нескольких переменных	197
18.4.	Условный экстремум	204
18.5.	Наибольшие и наименьшие значения функции	210
19.	Геометрические приложения функций многих переменных	212
20.	Вектор-функции	217

21. Ряды	223
21.1. Основные определения	223
21.2. Признаки сходимости рядов с неотрицательными членами	225
21.3. Признаки сходимости знакопеременных рядов	234
21.4. Теоремы о группировке и перестановке рядов	242
21.5. Область сходимости функционального ряда. Степенной ряд. Радиус сходимости степенного ряда	246
21.6. Равномерная сходимость функциональной последовательности и функционального ряда	248
21.7. Примеры решения задач	252
22. Кратные интегралы	262
22.1. Двойные интегралы	262
22.2. Приложения двойных интегралов	267
22.3. Примеры решения задач на двойные интегралы . . .	269
22.4. Тройные интегралы	275
22.5. Приложения тройных интегралов	279
23. Криволинейный интеграл	290
23.1. Определение криволинейного интеграла от вектор-функции	294
23.2. Криволинейный интеграл по длине дуги	310
24. Элементы теории поля	314
25. Ряды Фурье	322
Список рекомендуемой литературы	328

Предисловие

Пособие предназначено студентам первого и второго курсов Института естественных наук (ИЕН) и Института математики и компьютерных наук (ИМКН) всех форм обучения и ориентировано прежде всего на рабочие планы и программы инженерного потока ИЕН и направления «Прикладная информатика» ИМКН. Оно также может быть использовано студентами других направлений и специальностей, изучающих высшую математику и математический анализ.

Пособие содержит 25 разделов, охватывающих фундаментальные темы математического анализа: определение множества вещественных чисел, предел числовой последовательности, функции одной и нескольких переменных, дифференциальное исчисление функций одной и нескольких переменных, интеграл Римана, ряды, кратные и криволинейные интегралы, теория поля, ряды Фурье.

Материал оформлен и распределен таким образом, что читатель, будь то преподаватель или студент, легко сможет подготовить конспект для самостоятельной работы. Традиционный дедуктивный (с доказательствами) стиль изложения фундаментальных теоретических разделов направлен на создание добротной логической базы и необходимых знаний и навыков. Особенностью данного пособия является несколько неполный набор доказательств приводимых здесь теорем и утверждений, что позволяет отчасти облегчить первое знакомство с курсом математического анализа и создает удобный рабочий конспект. Разделы «Ряды», «Кратные и криволинейные интегралы», «Теория поля», на которые отводится мало аудиторных часов, содержат решения большого ряда примеров.

Выражаем благодарность А. Н. Борбунову, старшему преподавателю кафедры математического анализа и теории функций, за помощь в оформлении рукописи.

Надеемся, что предлагаемое пособие станет подспорьем в изучении трудного базового курса и поможет сформировать необходимые навыки самостоятельной работы.

Авторы

1. Элементы математической логики

Язык, на котором говорит математика, точен. Как любой язык, он содержит свои единицы. Такими единицами служат высказывания или утверждения. В русском языке высказыванию соответствует повествовательное предложение. Каждое утверждение в математике рассматривается с точки зрения его истинности или ложности. Например, предложение «*Земля вращается вокруг Солнца*» есть истинное высказывание, а предложение «*Число 6 делится на 4*» является ложным высказыванием. Предложение же «*Который час?*» вообще не является высказыванием.

Высказывания (утверждения) будем обозначать заглавными буквами $A, B, C, \dots$. Если высказывание A является истинным, то говорят, что оно принимает значение « $и$ » — истина, и записывают: $A = и$. Если высказывание B является ложным, пишут: $B = л$.

Из высказываний можно получать новые высказывания с помощью следующих операций «и», «или», «не», называемых *булевыми*¹.

Определение 1.1. *Отрицанием* высказывания A называется такое высказывание, обозначаемое $\neg A$ (читается: «не A »), которое является истинным, если A ложно, и ложным, если A истинно. Эту ситуацию можно изобразить с помощью *таблицы истинности*

A	$\neg A$
$и$	$л$
$л$	$и$

¹ В честь английского математика *Джорджа Буля* (1815–1864), считающегося отцом математической логики. Созданный им математический аппарат в соединении с двоичной системой счисления привел к созданию цифрового электронного компьютера.

Определение 1.2. *Конъюнкцией* высказываний A и B называется высказывание, обозначаемое $A \wedge B$ (читается: «и A , и B »), которое истинно, если истинны оба высказывания A и B , и ложно, если хотя бы одно из высказываний ложно, т. е. в остальных случаях (см. таблицу):

A	B	$A \wedge B$
u	u	u
u	$л$	$л$
$л$	u	$л$
$л$	$л$	$л$

Определение 1.3. *Дизъюнкцией* высказываний A и B называется высказывание, обозначаемое $A \vee B$ (читается: «или A , или B »), которое ложно, если ложны оба высказывания A и B , и истинно в остальных случаях (см. таблицу):

A	B	$A \vee B$
u	u	u
u	$л$	u
$л$	u	u
$л$	$л$	$л$

Кроме того, для составления высказываний используется следующая операция.

Определение 1.4. *Импликацией* высказываний A и B называется высказывание, обозначаемое $A \Rightarrow B$ (читается: «из A следует B » или «если A , то B »), которое ложно, если A истинно, а B ложно, и истинно в остальных случаях (см. таблицу):

A	B	$A \Rightarrow B$
u	u	u
u	$л$	$л$
$л$	u	u
$л$	$л$	u

Другими словами, в математике из истинного утверждения можно получить только истинное, а из ложного может следовать как истинное, так и ложное высказывание.

Всем теоремам T в математике, как высказываниям, можно придать вид импликации двух утверждений:

$$T = (A \Rightarrow B).$$

Высказывание A называют *условием* теоремы T или тем, что дано в теореме, а высказывание B – *заключением* теоремы T или тем, что требуется доказать. При этом высказывание B называют *необходимым условием* для высказывания A , а высказывание A называют *достаточным условием* для высказывания B .

Пример 1.1. $T =$ «все натуральные числа, делящиеся на 4, делятся на 2» или иначе: $T =$ «если число x делится на 4, то число x делится на 2».

Здесь приведена импликация, которая истинна, и высказывание $B =$ «число x делится на 2» есть необходимое условие для высказывания $A =$ «число x делится на 4», а высказывание A является достаточным условием для высказывания B в этой теореме T .

Определение 1.5. *Эквивалентцией* высказываний A и B называется высказывание, обозначаемое $A \Leftrightarrow B$ (читается: « A эквивалентно B », или « A тогда и только тогда, когда B », или « A равносильно B », или «для A необходимо

и достаточно $B \gg$), которое истинно, когда высказывания A и B истинны или ложны одновременно.

Наряду с $A \Leftrightarrow B$ в эквиваленции используется запись: $A = B$.

Итак, при помощи логических операций построено множество высказываний, которое называют *алгеброй высказываний*.

Основные формулы алгебры высказываний следующие:

- 1) $\neg(\neg A) = A$;
- 2) законы *дистрибутивности* (распределительные законы):
 $A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$;
 $A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$;
- 3) законы де Моргана²:
 $\neg(A \wedge B) = (\neg A) \vee (\neg B)$;
 $\neg(A \vee B) = (\neg A) \wedge (\neg B)$;
- 4) $A \Rightarrow B = (\neg A) \vee B$;
- 5) $\neg(A \Rightarrow B) = A \wedge (\neg B)$.

Эти формулы могут быть доказаны сравнением соответствующих таблиц истинности.

Пример 1.2. Докажем формулу 5). Таблица истинности для утверждения в левой части имеет вид:

A	B	$A \Rightarrow B$	$\neg(A \Rightarrow B)$
$\mathcal{U}$	$\mathcal{U}$	$\mathcal{U}$	$\mathcal{L}$
$\mathcal{U}$	$\mathcal{L}$	$\mathcal{L}$	$\mathcal{U}$
$\mathcal{L}$	$\mathcal{U}$	$\mathcal{U}$	$\mathcal{L}$
$\mathcal{L}$	$\mathcal{L}$	$\mathcal{U}$	$\mathcal{L}$

² *Огастес де Морган* (1806–1871) – шотландский математик, логик, основоположник логической теории отношений.

А таблица истинности для утверждения в правой части имеет вид:

A	B	$\neg B$	$A \wedge (\neg B)$
u	u	$л$	$л$
u	$л$	u	u
$л$	u	$л$	$л$
$л$	$л$	u	$л$

Сравнивая эти таблицы, видим, что утверждения в правой и левой части принимают одинаковые значения.

Упражнение. С помощью таблиц истинности докажите формулы 1)–4).

Следующие импликации носят названия:

$T = (A \Rightarrow B)$ – *прямая теорема*,

$T = (B \Rightarrow A)$ – *теорема, обратная к предыдущей*.

Справедлива формула:

$$(A \Rightarrow B) = ((\neg B) \Rightarrow (\neg A)),$$

которая служит основой для распространенного в математике доказательства методом «от противного». Действительно, левая часть формулы ложна тогда и только тогда, когда $A = u$, а $B = л$. Но и правая часть ложна тоже только в этом случае.

Следует отметить, что из истинности прямой теоремы еще не следует истинность обратной к ней теоремы, как это видно из примера 1.1: в разобранном примере из утверждения B не следует утверждение A , потому что, как известно, существуют четные числа, не кратные четырем (например, 2).

Предикаты и кванторы

Определение 1.6. Суждение, зависящее от переменной величины, которое при подстановке значений переменного становится высказыванием, называют *предикатом*.

Пример 1.3. $A(x)$ = «студент x учится на физическом факультете» есть предикат, зависящий от одного переменного x . Здесь $A(x)$ – одноместный предикат. Неравенство $B(x, y) = x^2 + y^2 \geq 0$ представляет собой двуместный предикат.

Как и для высказываний, с помощью логических операций $\wedge$, $\vee$, $\neg$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$ можно строить новые предикаты, и мы получим *алгебру предикатов*. Новые предикаты и высказывания можно строить из предикатов также с помощью символов, называемых *кванторами*:

$\exists$ – *квантор существования* (читается: «существует», «найдется»),

$\forall$ – *квантор всеобщности* (читается: «для любого», «для всякого», «для всех»).

Определение 1.7. $\forall x : A(x)$ (читается: «для всех x $A(x)$ ») – высказывание, которое истинно, если предикат $A(x)$ истинен для всех x из его области определения, и ложно – в противном случае.

Пример 1.4. Утверждение «любой студент УрФУ учится на физическом факультете (ФФ)», которое формально можно записать в виде:

$$\forall x \in \text{УрФУ} : \{\text{студент } x \text{ учится на ФФ}\},$$

есть ложное высказывание.

Утверждение «квадрат действительного числа есть число неотрицательное», формально записываемое в виде:

$$\forall x \in \mathbb{R} : x^2 \geq 0,$$

есть истинное высказывание.

Определение 1.8. $\exists x : A(x)$ (читается: «*существует x , $A(x)$* ») – высказывание, которое истинно, если предикат $A(x)$ истинен на каком-то конкретном x из его области определения, и ложно, если предикат $A(x)$ ложен при всех x из его области определения.

Пример 1.5. Утверждение «на физическом факультете учатся девушки», которое формально записывается в виде

$\exists x : \{\text{девушка } x \text{ учится на физическом факультете}\}$
есть истинное высказывание, так как, конечно, на физическом факультете учится хотя бы одна девушка.

Высказывание $\exists x \in \mathbb{R} : x^2 + 1 \leq 0$ – ложное.

Построим отрицание высказывания $\forall x : A(x)$. Если данное утверждение не имеет места, то суждение $A(x)$ имеет место не для всех x , т. е. существует элемент x , для которого $A(x)$ не имеет места:

$$\neg(\forall x : A(x)) = (\exists x : \neg A(x)).$$

Пример 1.6. Один маленький мальчик очень грамотно построил отрицание утверждения «Все дети любят кашу». Он подумал и, решительно отодвинув от себя тарелку, сказал: «Не все».

Совершенно аналогично

$$\neg(\exists x : A(x)) = (\forall x : \neg A(x)).$$

Таким образом, чтобы построить отрицание логической формулы, содержащей кванторы, необходимо квантор $\forall$ заменить на квантор $\exists$, а квантор $\exists$ заменить на квантор $\forall$ и предикат заменить на его отрицание.

Пример 1.7.

$$\begin{aligned}\neg(\forall x : \{\exists y : [\forall z : A(x, y, z)]\}) &= \\ &= \exists x : \neg\{\exists y : [\forall z : A(x, y, z)]\} = \\ &= \exists x : \{\forall y : \neg[\forall z : A(x, y, z)]\} = \\ &= \exists x : \{\forall y : [\exists z : \neg A(x, y, z)]\}.\end{aligned}$$

Заметим, что скобки и двоеточия можно частично или вовсе опускать при записи такого рода логических формул, если не возникает разночтений.

2. Элементы теории множеств

2.1. Понятие множества

Понятие множества в математике рассматривается как первичное, неопределяемое понятие.

Под *множеством* будем понимать совокупность (или семейство, или собрание, или класс) объектов, обладающих определенным признаком. Например, множество деревьев в парке, множество звезд на небе, множество студентов в аудитории, множество натуральных чисел, множество корней уравнения $x^2 - 3x + 2 = 0$, множество треугольников на плоскости и т.д.

Объекты, обладающие этим признаком, называются *элементами множества*. Множества будем обозначать заглавными буквами $A, B, C, \dots$, а элементы этих множеств – строчными буквами $a, b, c, \dots$. Множество *содержит* элементы, а элементы *принадлежат* множеству. Для обозначения принадлежности используется знак $\in$. Если a есть элемент множества A , то этот факт записывается так: $a \in A$. Запись $b \notin A$ означает, что элемент b не принадлежит множеству A . Так, имеем $3 \in \mathbb{Z}$ и $\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$.

Множества делятся на *конечные* и *бесконечные*. Например, множества $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ бесконечны, а множество корней уравнения $x^2 - 5x + 6 = 0$ конечно. Множество, не содержащее элементов, называется *пустым*. Пустое множество обозначается символом $\emptyset$. Запись

$$C = \{x \in B \mid P(x)\}$$

обозначает множество, состоящее из всех тех и только тех элементов множества B , которые обладают свойством $P(x)$.

Например, $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 1\}$ – множество тех дей-

ствительных чисел, которые обладают свойством быть не меньше нуля и не больше единицы.

Определение 2.1. Множество Y называется *подмножеством* множества X , если любой элемент множества Y является элементом множества X . Это обозначается записью $Y \subseteq X$.

В кванторах это определение можно записать следующим образом:

$$\forall y \in Y : y \in X.$$

Например, $\{1, 2\} \subseteq \{1, 2, -\frac{1}{2}\}$, $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$, $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$, $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$.

Из определения подмножества следует, что всякое множество является подмножеством самого себя, а пустое множество является подмножеством любого множества.

Пример 2.1. Решим следующую простую задачу: найти все подмножества множества $\{1, 2, 3\}$. Очевидно, что это множество имеет восемь подмножеств: $\emptyset$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{2, 3\}$ и $\{1, 2, 3\}$.

Определение 2.2. Множество X *равно* множеству Y , если любой элемент множества X является элементом множества Y и любой элемент множества Y является элементом множества X . Другими словами, если X и Y состоят из одних и тех же элементов. На письме это обозначается обычным образом: $X = Y$.

Из определений следует, что множества X и Y равны тогда и только тогда, когда $X \subseteq Y$ и $Y \subseteq X$.

Пример 2.2. Множество корней уравнения

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$$

равно множеству $\{1, 2, 3\}$, а множество $\{51, 2, 3\}$ равно множеству $\{3, 2, 51, 2\}$.

Заметим, что, перечисляя элементы множества, принято записывать каждый из них только один раз. Подчеркнем, что по определению равенства неважно, в каком порядке перечисляются элементы.

2.2. Операции над множествами

Рассмотрим следующие операции над множествами: пересечение, объединение, дополнение и разность. Эти операции называются *булевыми*. Установим основные свойства булевых операций.

Определение 2.3. Пусть X и Y – некоторые множества. Тогда *пересечением* множеств X и Y называется множество

$$X \cap Y = \{x \mid x \in X \text{ и } x \in Y\},$$

объединением множеств X и Y называется множество

$$X \cup Y = \{x \mid x \in X \text{ или } x \in Y\}.$$

Например, если $X = \{2, 4, 6, 8, 9\}$, $Y = \{1, 3, 6, 9\}$, то $X \cap Y = \{6, 9\}$, а $X \cup Y = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 9\}$.

Отметим основные свойства введенных операций:

- 1) $X \cap X = X$ – *идемпотентность пересечения*;
- 2) $X \cup X = X$ – *идемпотентность объединения*;
- 3) $X \cap Y = Y \cap X$ – *коммутативность пересечения*;

- 4) $X \cup Y = Y \cup X$ – коммутативность объединения;
- 5) $(X \cap Y) \cap Z = X \cap (Y \cap Z)$ – ассоциативность пересечения;
- 6) $(X \cup Y) \cup Z = X \cup (Y \cup Z)$ – ассоциативность объединения;
- 7) $X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z)$ – дистрибутивность пересечения относительно объединения;
- 8) $X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z)$ – дистрибутивность объединения относительно пересечения;
- 9) $X \cap \emptyset = \emptyset$;
- 10) $X \cup \emptyset = X$.

Доказательство отмеченных свойств продемонстрируем на примере тождества 8). Надо доказать, что любой элемент множества $X \cup (Y \cap Z)$ принадлежит множеству $(X \cup Y) \cap (X \cup Z)$, и обратно.

Пусть $a \in X \cup (Y \cap Z)$. Тогда $a \in X$ или $a \in Y \cap Z$. Если $a \in X$, то $a \in X \cup Y$ и $a \in X \cup Z$, и поэтому a принадлежит их пересечению, т. е. правой части. Если же $a \in Y \cap Z$, то $a \in Y$ и $a \in Z$. Отсюда следует, что $a \in X \cup Y$ и $a \in X \cup Z$, т. е. a принадлежит и их пересечению.

Докажем обратное включение. Пусть теперь $a \in (X \cup Y) \cap (X \cup Z)$. Тогда $a \in X \cup Y$ и $a \in X \cup Z$. Если $a \in X$, то $a \in X \cup (Y \cap Z)$. Если же $a \notin X$, то из условий $a \in X \cup Y$ и $a \in X \cup Z$ следует, что $a \in Y$ и $a \in Z$, а значит, $a \in Y \cap Z$, следовательно, $a \in X \cup (Y \cap Z)$. $\square$

Определение 2.4. Множество $\mathcal{E}$ называется *универсальным* для системы множеств $A, B, C, \dots$, если каждое из множеств $A, B, C, \dots$ является подмножеством множества $\mathcal{E}$.

Как видно из определения, универсальность множества является относительным понятием: для одной системы множеств данное множество будет универсальным, для другой – нет. Если рассматриваются числовые множества, то в качестве универсального нередко берут множество всех действительных чисел, если рассматриваются геометрические фигуры планиметрии, то в качестве универсального можно взять множество всех точек плоскости.

Определение 2.5. Пусть $\mathcal{E}$ – универсальное множество для данной системы множеств, X – некоторое множество этой системы. *Дополнением* множества X называется множество $C_{\mathcal{E}}X$ (или просто CX) тех элементов универсального множества, которые не принадлежат X .

Например, если $X = \{1, 2, 4, 6, 7, 8\}$, а универсальное множество – множество всех десятичных цифр, то $CX = \{0, 3, 5, 9\}$.

Справедливы равенства:

- 1) $X \cap \mathcal{E} = X$;
- 2) $X \cup \mathcal{E} = \mathcal{E}$;
- 3) $C\mathcal{E} = \emptyset$;
- 4) $C\emptyset = \mathcal{E}$.

Законы двойственности:

- 5) $C(X \cap Y) = CX \cup CY$;
- 6) $C(X \cup Y) = CX \cap CY$.

Домашнее задание. Доказать тождества 5) и 6).

Определение 2.6. Пусть X и Y – некоторые множества. *Разностью* множеств X и Y называется множество $X \setminus Y = \{x \mid x \in X \text{ и } x \notin Y\}$.

Например, если $X = \{1, 3, 7, 8, 9\}$, а $Y = \{5, 6, 7, 8\}$, то $X \setminus Y = \{1, 3, 9\}$.

Разность легко выражается через введенные ранее операции. Действительно, нетрудно показать, что

$$X \setminus Y = X \cap CY.$$

Булевы операции полезно иллюстрировать рисунками, которые часто называются *диаграммами Эйлера–Венна*³. На этих диаграммах множество изображается в виде множества точек плоскости, ограниченного некоторой линией.

Например, на диаграммах рис. 2.1 и рис. 2.2 множества A и B представлены в виде двух овалов, универсальное множество – в виде прямоугольника, и изображены соответственно множества $A \cup B$ и $A \cap B$ (не заштрихованные) и их дополнения (заштрихованные).

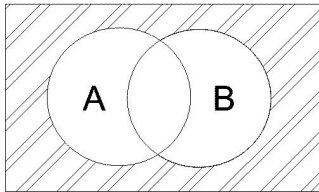


Рис. 2.1

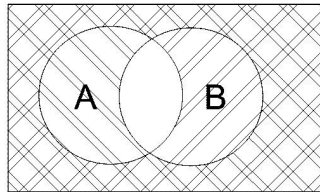


Рис. 2.2

³ *Леонард Эйлер* (1707–1783) – выдающийся швейцарский и русский математик и механик. Его труды стали фундаментальными в таких областях, как математический анализ, дифференциальная геометрия, теория чисел, небесная механика, математическая физика, оптика, баллистика, кораблестроение, теория музыки и др. *Джон Венн* (1834–1923) – английский математик, логик, философ.

На диаграмме рис. 2.2 множества CA и CB заштрихованы разнонаправленными наклонными линиями, а их пересечение представлено в виде части прямоугольника, заштрихованной и теми, и другими линиями. Сравнение этих диаграмм иллюстрирует один из законов двойственности (*к какому?*).

2.3. Прямое (декартово) произведение

Определение 2.7. Пусть X и Y – некоторые множества. *Прямым (декартовым)⁴ произведением* $X \times Y$ множеств X и Y называется множество всевозможных упорядоченных пар (x, y) , первая компонента которых принадлежит X , а вторая принадлежит Y .

Прямое произведение одинаковых множеств $X \times X$ обозначают X^2 .

Пример 2.3. Если $X = \{1, 2, 3\}$, а $Y = \{5, 7\}$, то

$$X \times Y = \{(1, 5), (1, 7), (2, 5), (2, 7), (3, 5), (3, 7)\}.$$

После введения системы координат на плоскости каждой точке соответствует упорядоченная пара действительных чисел (координаты этой точки), и каждая упорядоченная пара чисел однозначно определяет точку плоскости. Это показывает, что координатную плоскость можно отождествить с множеством $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$.

Операция прямого произведения двух множеств некоммутативна. Действительно, если X и Y – множества из примера 2.3, то $X \times Y$ не равно $Y \times X$.

⁴ В честь *Рене Декарта* (1596–1650), французского математика, механика, философа, естествоиспытателя. Считается создателем аналитической геометрии. Дал понятие переменной величины и функции, ввел многие современные алгебраические обозначения.

Определение 2.8. Пусть X, Y, Z – некоторые множества. *Прямым (декартовым) произведением* $X \times Y \times Z$ называется множество всевозможных упорядоченных троек, первая компонента которых принадлежит X , вторая – Y , третья – Z , т. е.

$$X \times Y \times Z = \{(x, y, z) \mid x \in X, y \in Y, z \in Z\}.$$

Прямое произведение одинаковых множеств $X \times X \times X$ обозначают X^3 .

Например, если $X = \{1, 2\}$, $Y = \{2, 3\}$, $Z = \{4\}$, то

$$X \times Y \times Z = \{(1, 2, 4), (1, 3, 4), (2, 2, 4), (2, 3, 4)\}.$$

Мы отмечали выше, что координатную плоскость можно отождествить с множеством $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Трехмерное пространство можно отождествить с множеством $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Аналогично можно ввести прямое произведение четырех, пяти и любого конечного числа множеств.

3. Метод математической индукции

Метод математической индукции – это удобный и эффективный инструмент в случае, когда необходимо доказать утверждения T_n , зависящие от натурального параметра $n \in \mathbb{N}$. Состоит он в следующем.

Обозначим A множество всех натуральных чисел, при которых утверждения T_n истинны.

На первом шаге, называемом *база индукции* (Б. И.), показывают, что множество A не пусто, т. е. что хотя бы при каком-то n_0 утверждение T_{n_0} истинно.

На втором шаге (его называют *шаг индукции*, Ш. И.) из того, что утверждение T_n верно при $n = k$, доказывают, что оно верно при $n = k + 1$, т. е. показывают, что

$$k \in A \Rightarrow k + 1 \in A.$$

На последнем шаге, называемом *заключение индукции* (З. И.), делают вывод, что серия утверждений T_n верна при всех $n \geq n_0$.

Действительно, если утверждение T_{n_0} верно, то, по доказанному на шаге индукции, следует, что утверждение T_{n_0+1} тоже верно. Поскольку T_{n_0+1} верно, то верно и T_{n_0+2} , и т. д.

Пример 3.1. Докажем неравенство Бернулли⁵. Пусть $x_1, x_2, \dots, x_n$ – числа одного знака и все больше -1 . Тогда для любого натурального n

$$(1 + x_1)(1 + x_2) \dots (1 + x_n) \geq 1 + x_1 + x_2 + \dots + x_n. \quad (3.1)$$

⁵ Названо в честь *Иоанна Бернулли* (1667–1748), швейцарского математика и механика, одного из первых разработчиков математического анализа.

1. Б. И. Возьмем $n = 1$. Тогда в левой части получится один множитель $-1 + x_1$, а в правой – два слагаемых: $1 + x_1$. То есть имеет место равенство

$$1 + x_1 = 1 + x_1.$$

2. Ш. И. Пусть верно неравенство

$$(1 + x_1)(1 + x_2) \dots (1 + x_k) \geq 1 + x_1 + x_2 + \dots + x_k. \quad (3.2)$$

Покажем, что тогда неравенство

$$(1 + x_1)(1 + x_2) \dots (1 + x_k)(1 + x_{k+1}) \geq 1 + x_1 + x_2 + \dots + x_k + x_{k+1} \quad (3.3)$$

также верно.

Умножим обе части неравенства (3.2) на $(1 + x_{k+1}) > 0$:

$$\begin{aligned} (1 + x_1)(1 + x_2) \dots (1 + x_k)(1 + x_{k+1}) &\geq \\ &\geq (1 + x_1 + x_2 + \dots + x_k)(1 + x_{k+1}) = \\ &= 1 + x_1 + x_2 + \dots + x_k + x_{k+1} + x_1x_{k+1} + x_2x_{k+1} + \dots + x_kx_{k+1}. \end{aligned}$$

Последние k слагаемых справа неотрицательны, поскольку все числа x_i одного знака. Отбрасывая их, получим неравенство (3.3).

3. З. И. Неравенство (3.1) верно при любом $n \in \mathbb{N}$.

4. Действительные (вещественные) числа

4.1. Представление вещественных чисел в виде бесконечных десятичных дробей

Любое вещественное число a представимо в виде бесконечной десятичной дроби:

$$a = \pm a_0, a_1 a_2 \dots a_n \dots,$$

где из двух знаков $\pm$ берется какой-то один: плюс – для положительных чисел, минус – для отрицательных чисел (знак плюс обычно не пишется).

Рациональные числа представимы в виде периодических, а иррациональные числа – в виде непериодических бесконечных десятичных дробей. Некоторые рациональные числа представимы в виде конечной дроби или, что то же самое, в виде бесконечной дроби с нулем в периоде. Такие числа допускают второе представление – в виде бесконечной десятичной дроби с цифрой 9 в периоде. Например:

$$1/2 = 0,500\dots 0\dots = 0,5(0), \quad 1/2 = 0,49999\dots = 0,4(9).$$

При сравнении вещественных чисел будем пользоваться для таких рациональных чисел лишь первой формой записи (с нулем в периоде).

Правило сравнения вещественных чисел

Пусть $a = a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$, $b = b_0, b_1, \dots, b_n, \dots$ – произвольные вещественные числа, представленные в виде бесконечных десятичных дробей. Числа a и b называются *равными* ($a = b$), если они имеют одинаковые знаки и справедливы равенства: $a_k = b_k$, $k = 0, 1, 2, \dots$. В противном случае считается, что $a \neq b$.

При сравнении неравных чисел a и b рассмотрим три случая:

1) a и b – неотрицательные числа. Так как $a \neq b$, то существует натуральное n или $n = 0$ такое, что $a_k = b_k$, $k = 0, 1, \dots, n-1$ и $a_n \neq b_n$. Будем считать, что $a > b$, если $a_n > b_n$, и что $a < b$, если $a_n < b_n$;

2) a – неотрицательное, b – отрицательное число. Будем считать, что $a > b$;

3) a и b – отрицательные числа. Будем считать, что $a > b$, если $|a| < |b|$.

По определению $|a| = a$, если a – неотрицательное число, и равен $-a$, если a – отрицательное число.

4.2. Аксиоматическое определение множества вещественных чисел

Пусть на непустом множестве X определены операции сложения (обозначается символом $+$), умножения (обозначается символом $\cdot$) и сравнения (обозначается символом $\leq$):

$$X, +, \cdot, \leq$$

Это значит, что для любых двух элементов $x, y \in X$ их сумма $x + y$ и произведение $x \cdot y$ снова являются элементами множества X , а также известно, каким отношением они связаны: $x \leq y$ или $y \leq x$. Относительно введенных операций мы будем предполагать выполнение следующих аксиом.

I. АКСИОМЫ СЛОЖЕНИЯ

1. *Существование нейтрального элемента:*

$$\exists 0 \in X \quad \forall x \in X \quad x + 0 = x.$$

2. *Существование обратного элемента:*

$$\forall x \in X \quad \exists x' \in X \quad x + x' = 0.$$

3. *Ассоциативность сложения:*

$$\forall x, y, z \in X \quad (x + y) + z = x + (y + z).$$

4. *Коммутативность сложения:*

$$\forall x, y \in X \quad x + y = y + x.$$

Множество X , удовлетворяющее условиям I_1 – I_3 , называется *группой* относительно операции сложения (*аддитивной группой*).

Множество X , удовлетворяющее условиям I_1 – I_4 , называется *коммутативной (абелевой) группой* относительно операции сложения.

II. АКСИОМЫ УМНОЖЕНИЯ

1. *Существование нейтрального элемента:*

$$\exists 1 \in X \quad \forall x \in X \quad x \cdot 1 = x.$$

2. *Существование обратного элемента:*

$$\forall x \in X \setminus \{0\} \quad \exists x' \in X \quad x \cdot x' = 1.$$

3. *Ассоциативность умножения:*

$$\forall x, y, z \in X \quad (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z).$$

4. *Коммутативность умножения:*

$$\forall x, y \in X \quad x \cdot y = y \cdot x.$$

Множество X , удовлетворяющее условиям Π_1 – Π_3 , называется *группой* относительно операции умножения (*мультипликативной группой*).

Множество X , удовлетворяющее условиям Π_1 – Π_4 , называется *коммутативной (абелевой) группой* относительно операции умножения.

III. СВЯЗЬ МЕЖДУ СЛОЖЕНИЕМ И УМНОЖЕНИЕМ

$$\forall x, y, z \in X \quad (x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z.$$

Аксиома **III** носит название *дистрибутивность* или *распределительный закон*.

Множество X , удовлетворяющее аксиомам **I**–**III**, называется *полем*.

IV. АКСИОМЫ ПОРЯДКА

1. $\forall x, y \in X \quad \Rightarrow \quad x \leq y \text{ или } y \leq x.$

2. *Рефлексивность:*

$$\forall x \in X \quad x \leq x.$$

3. *Антисимметрия*:

$$x \leq y \text{ и } y \leq x \Rightarrow x = y.$$

4. *Транзитивность*:

$$x \leq y \text{ и } y \leq z \Rightarrow x \leq z.$$

Множество X , удовлетворяющее условиям **IV**₂–**IV**₄, называется *частично упорядоченным множеством*.

Множество X , удовлетворяющее условиям **IV**₁–**IV**₄, называется *вполне упорядоченным множеством*.

V. СВЯЗЬ МЕЖДУ СЛОЖЕНИЕМ И ОТНОШЕНИЕМ ПОРЯДКА

$$\text{Если } x \leq y, \text{ то } \forall z \in X \Rightarrow x + z \leq y + z.$$

VI. СВЯЗЬ МЕЖДУ УМНОЖЕНИЕМ И ОТНОШЕНИЕМ ПОРЯДКА

$$\text{Если } x \leq y, \text{ то } \forall z \geq 0 \Rightarrow x \cdot z \leq y \cdot z.$$

VII. АКСИОМА НЕПРЕРЫВНОСТИ

Пусть $A \subset X$, $B \subset X$, $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$ и для любых элементов $a \in A$ и $b \in B$ выполняется $a \leq b$. Тогда найдется такой элемент $c \in X$, что $a \leq c \leq b$ при любых $a \in A$ и $b \in B$.

Множество X , удовлетворяющее аксиомам **I**–**VII** и содержащее более одного элемента, называется *множеством действительных (вещественных) чисел*. Его принято обозначать $\mathbb{R}$.

Описанное выше множество десятичных дробей и операций с ними является одной из возможных моделей множества действительных чисел. Другим примером модели действительных чисел является числовая прямая.

4.3. Следствия из аксиом действительных чисел

Читателю полезно будет самостоятельно доказать некоторые, часто встречающиеся следствия из приведенной выше аксиоматики.

1. *Единственность нуля.*

2. *Единственность элемента, обратного относительно операции сложения.*

3. *Уравнение $a + x = b$ имеет единственное решение $x = b - a$.*

4. *Единственность единицы.*

5. (Единственность элемента, обратного относительно операции умножения.) *Для любого $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$, существует только один элемент, обратный относительно операции умножения.*

Элемент, обратный x относительно умножения, будем обозначать $\frac{1}{x}$. Запись $\frac{y}{x}$ обозначает умножение y на элемент, обратный к x , т. е. $y \cdot \frac{1}{x}$.

6. *Для любого $a \neq 0$ уравнение $a \cdot x = b$ имеет единственное решение $x = \frac{b}{a}$.*

7. *Для любого $x \in \mathbb{R}$ выполняется $0 \cdot x = 0$.*

8. *Для любого $x \in \mathbb{R}$*

$$-x = (-1) \cdot x,$$

где $(-x)$ – обратный к x , а (-1) – обратный к 1.

9. (Свойство плотности множества вещественных чисел.) *Для любых $x, y \in \mathbb{R}$ (для определенности $x \leq y$) найдется такой элемент $z \in \mathbb{R}$, что $x \leq z \leq y$.*