

**А. М. Кунгожин, М. А. Кунгожин,
Е. Р. Байсалов, Д. А. Елиусизов**

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОЛИМПИАДЫ

**Азиатско-
Тихоокеанская**

**«Шёлковый
путь»**



УДК 373:51
ББК 74.262.21

Кунгожин А. М., Кунгожин М. А., Байсалов Е. Р., Елиусизов Д. А.
Математические олимпиады: Азиатско-Тихоокеанская, «Шёлковый путь».
Электронное издание.
М.: МЦНМО, 2017.
207 с.
ISBN 978-5-4439-3135-7

Сборник содержит материалы двух математических олимпиад: Азиатско-Тихоокеанской и «Шёлковый путь» — за 2002–2017 годы. Все задачи приведены с решениями и при необходимости сопровождаются рисунками, и формулировками используемых фактов и теорем, не входящими в школьную программу.

Данные олимпиады проходят более чем в тридцати странах одновременно (включая Россию, Казахстан, США, Японию, Южную Корею и др.) и входят в перечень международных олимпиад Министерства образования и науки Республики Казахстан.

Книга будет полезна школьникам, студентам, педагогам и любителям математики для подготовки к олимпиадам высокого уровня, знакомства с олимпиадными идеями и методами.

12+

Научно-популярное издание

Рецензенты:

Джумадильдаев А. С. — академик НАН Республики Казахстан, доктор физико-математических наук, профессор;

Пак О. В. — обладатель звания «Лучший педагог 2014 года» Республики Казахстан, директор Назарбаев интеллектуальной школы физико-математического направления г. Алматы.

Подготовлено на основе книги: *Кунгожин А. М., Кунгожин М. А., Байсалов Е. Р., Елиусизов Д. А.* Математические олимпиады: Азиатско-Тихоокеанская, «Шёлковый путь». — М.: МЦНМО, 2017. — 208 с. ISBN 978-5-4439-1135-9.

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования
119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11
тел. (499) 241-08-04
<http://www.mccme.ru>

ISBN 978-5-4439-3135-7

© Кунгожин А. М.,
Кунгожин М. А., 2017
© МЦНМО, 2017

Оглавление

Предисловие	7
Принятые обозначения и определения	11
Условия задач Азиатско-Тихоокеанской математической олимпиады	13
14-я олимпиада, 2002 год	13
15-я олимпиада, 2003 год	13
16-я олимпиада, 2004 год	14
17-я олимпиада, 2005 год	15
18-я олимпиада, 2006 год	16
19-я олимпиада, 2007 год	17
20-я олимпиада, 2008 год	18
21-я олимпиада, 2009 год	19
22-я олимпиада, 2010 год	20
23-я олимпиада, 2011 год	21
24-я олимпиада, 2012 год	21
25-я олимпиада, 2013 год	22
26-я олимпиада, 2014 год	23
27-я олимпиада, 2015 год	24
28-я олимпиада, 2016 год	25
Условия задач математической олимпиады «Шёлковый путь»	27
1-я олимпиада, 2002 год	27
2-я олимпиада, 2003 год	28
3-я олимпиада, 2004 год	28
4-я олимпиада, 2005 год	29
5-я олимпиада, 2006 год	30
6-я олимпиада, 2007 год	30
7-я олимпиада, 2008 год	31
8-я олимпиада, 2009 год	32
9-я олимпиада, 2010 год	32

10-я олимпиада, 2011 год	33
11-я олимпиада, 2012 год	34
12-я олимпиада, 2013 год	34
13-я олимпиада, 2014 год	35
14-я олимпиада, 2015 год	35
15-я олимпиада, 2016 год	36
Решения задач Азиатско-Тихоокеанской	
математической олимпиады	38
14-я олимпиада, 2002 год	38
15-я олимпиада, 2003 год	41
16-я олимпиада, 2004 год	44
17-я олимпиада, 2005 год	52
18-я олимпиада, 2006 год	56
19-я олимпиада, 2007 год	61
20-я олимпиада, 2008 год	66
21-я олимпиада, 2009 год	71
22-я олимпиада, 2010 год	76
23-я олимпиада, 2011 год	82
24-я олимпиада, 2012 год	88
25-я олимпиада, 2013 год	94
26-я олимпиада, 2014 год	98
27-я олимпиада, 2015 год	103
28-я олимпиада, 2016 год	112
Решения задач математической олимпиады	
«Шёлковый путь»	120
1-я олимпиада, 2002 год	120
2-я олимпиада, 2003 год	124
3-я олимпиада, 2004 год	126
4-я олимпиада, 2005 год	130
5-я олимпиада, 2006 год	133
6-я олимпиада, 2007 год	137
7-я олимпиада, 2008 год	139
8-я олимпиада, 2009 год	142
9-я олимпиада, 2010 год	145
10-я олимпиада, 2011 год	151
11-я олимпиада, 2012 год	157
12-я олимпиада, 2013 год	160

13-я олимпиада, 2014 год	163
14-я олимпиада, 2015 год	170
15-я олимпиада, 2016 год	173
Справочные материалы	176
Результаты казахстанских участников	183
Результаты АТМО	183
Результаты МОШП	196

Условия задач Азиатско-Тихоокеанской математической олимпиады

14-я олимпиада, 2002 год

Задача 1. Даны неотрицательные целые числа $a_1, a_2, \dots, a_n$. Пусть

$$a = \left[\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \right],$$

где $[x]$ — целая часть числа x . Докажите, что $a_1! a_2! \dots a_n! \geq (a!)^n$. При каких $a_1, a_2, \dots, a_n$ выполняется равенство?

Задача 2. Найдите все такие пары натуральных чисел a и b , что $\frac{a^2+b}{b^2-a}$ и $\frac{b^2+a}{a^2-b}$ — целые числа.

Задача 3. На сторонах AC и AB равностороннего треугольника ABC взяты точки P и Q соответственно так, что углы APB и CQA острые. Пусть R — точка пересечения высот треугольника ABP , S — точка пересечения высот треугольника AQC . Отрезки BP и CQ пересекаются в точке T . Известно, что $TR = RS = ST$. Найдите все возможные значения углов CBP и BCQ .

Задача 4. Пусть $x, y, z > 0$ и $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$. Докажите, что

$$\sqrt{x+yz} + \sqrt{y+zx} + \sqrt{z+yx} \geq \sqrt{xyz} + \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}.$$

Задача 5. Найдите все такие функции $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, что

- (i) $f(x) = 0$ лишь для конечного числа значений x (возможно, $f(x) \neq 0$ для всех x);
- (ii) $f(x^4 + y) = x^3 f(x) + f(f(y))$.

15-я олимпиада, 2003 год

Задача 1. Пусть a, b, c, d, e, f — такие действительные числа, что многочлен

$$p(x) = x^8 - 4x^7 + 7x^6 + ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f$$

разлагается на восемь линейных сомножителей $x - x_i$, где $x_i > 0$ при всех $i = 1, 2, \dots, 8$. Найдите все возможные значения числа f .

Задача 2. Пусть $ABCD$ — квадратный кусок картонной бумаги со стороной a . На плоскости лежат две прямые ℓ_1 и ℓ_2 , расстояние между которыми также равно a . Квадрат $ABCD$ расположили на плоскости таким образом, что ℓ_1 пересекает стороны AB и AD в точках E и F соответственно, а ℓ_2 пересекает стороны CB и CD в точках G и H соответственно. Пусть периметры треугольников AEF и CGH равны m_1 и m_2 соответственно. Докажите, что при любом расположении квадрата сумма $m_1 + m_2$ остаётся постоянной.

Задача 3. Пусть $k \geq 14$ — натуральное число и p_k — наибольшее простое число, которое в точности меньше k . Известно, что $p_k \geq 3k/4$. Пусть n является составным числом. Докажите, что

(а) если $n = 2p_k$, то $(n - k)!$ не делится на n ;

(б) если $n > 2p_k$, то $(n - k)!$ делится на n .

Задача 4. Пусть a, b, c — длины сторон треугольника, $a + b + c = 1$, и пусть $n \geq 2$ — натуральное число. Докажите, что

$$\sqrt[n]{a^n + b^n} + \sqrt[n]{b^n + c^n} + \sqrt[n]{c^n + a^n} < 1 + \frac{\sqrt[n]{2}}{2}.$$

Задача 5. Даны два натуральных числа m и n . Найдите наименьшее такое натуральное число k , что среди любых k людей либо найдутся $2m$ людей, которые образуют m взаимно знакомых пар, либо найдутся $2n$ людей, которые образуют n взаимно незнакомых пар.

16-я олимпиада, 2004 год

Задача 1. Определите все конечные непустые множества S натуральных чисел, для которых $\frac{i+j}{(i,j)}$ является элементом множества S для всех чисел i и j из S .

Задача 2. Пусть O — центр описанной окружности и H — точка пересечения высот остроугольного треугольника ABC . Докажите, что площадь одного из треугольников AON , BOH и COH равна сумме площадей остальных двух.

Задача 3. Пусть дано множество S , состоящее из 2004 точек плоскости, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Через L обозначим множество прямых, проходящих через все пары точек множества S . Докажите, что точки множества S возможно покрасить не более чем в два цвета так, чтобы для любых точек p и q множества S количество прямых из L , разделяющих p и q , было нечётным тогда и только тогда, когда p и q имеют одинаковый цвет.

Замечание. Прямая ℓ разделяет две точки p и q , если p и q лежат в разных полуплоскостях, на которые ℓ делит плоскость, и ни одна из них не лежит на ℓ .

Задача 4. Обозначим через $[x]$ наибольшее целое число, которое не превосходит действительного числа x . Докажите, что число

$$\left[\frac{(n-1)!}{n(n+1)} \right]$$

является чётным при любом натуральном n .

Задача 5. Докажите, что

$$(a^2 + 2)(b^2 + 2)(c^2 + 2) \geq 9(ab + bc + ca)$$

для любых действительных чисел $a, b, c > 0$.

17-я олимпиада, 2005 год

Задача 1. Докажите, что для каждого действительного иррационального числа a найдутся такие действительные иррациональные числа b и b' , что $a + b$ и ab' будут рациональными, а ab и $a + b'$ будут иррациональными числами.

Задача 2. Пусть a, b и c — такие положительные действительные числа, что $abc = 8$. Докажите, что

$$\frac{a^2}{\sqrt{(1+a^3)(1+b^3)}} + \frac{b^2}{\sqrt{(1+b^3)(1+c^3)}} + \frac{c^2}{\sqrt{(1+c^3)(1+a^3)}} \geq \frac{4}{3}.$$

Задача 3. Докажите, что существует треугольник, который можно разрезать на 2005 равных треугольников.

Задача 4. В маленьком городке имеется n^2 домов, индексированных парами чисел (i, j) для $1 \leq i, j \leq n$. Дома с индексами (i, j) , (k, l) назовём соседними, если $|i - k| + |j - l| = 1$. В момент времени 0 в доме с индексом $(1, c)$, где $c \leq n/2$, начался пожар. В течение каждого последующего интервала времени $[t, t + 1]$ пожарные ставят систему защиты от пожара одному дому, до которого огонь ещё не добрался, в то время как пожар распространяется на все незащищённые дома, каждый из которых соседствует с некоторым домом, охваченным пожаром в момент времени t . Дом, где установлена система защиты от пожара, далее никогда не горит. Процесс завершается, когда распространение пожара становится невозможным. Какое максимальное число домов могут спасти пожарные?

Замечание. Можно считать, что городок имеет форму таблицы размера $n \times n$, где дома суть единичные клетки, $(1, 1)$ — индекс дома, стоящего в левом верхнем углу, i и j указывают соответственно строку и столбец дома с индексом (i, j) .

Задача 5. На сторонах AB и AC треугольника ABC выбраны соответственно точки M и N так, что $MB = BC = CN$. Обозначим через R и r соответственно радиусы описанной и вписанной окружностей треугольника ABC . Выразите отношение $MN : BC$ через R и r .

18-я олимпиада, 2006 год

Задача 1. Пусть n — натуральное число. Найдите наибольшее неотрицательное действительное число $f(n)$ (которое зависит от n), удовлетворяющее следующему условию: если $a_1 + a_2 + \dots + a_n$ является целым числом для действительных чисел $a_1, a_2, \dots, a_n$, то существует такое i , что

$$\left| a_i - \frac{1}{2} \right| \geq f(n).$$

Задача 2. Докажите, что любое натуральное число можно представить в виде конечной суммы различных целых степеней золотого сечения $\tau = (1 + \sqrt{5})/2$. Под целой степенью золотого сечения τ понимается число вида τ^i , где i — целое (не обязательно положительное) число.

Задача 3. Пусть $p \geq 5$ — простое число, и пусть r — число всевозможных различных способов размещения p шашек на шахматной доске размера $p \times p$ таким образом, что не все шашки лежат на одной строке (но все они могут находиться в одном столбце). Докажите, что r делится на p^5 . Здесь мы полагаем, что все шашки идентичны.

Задача 4. Пусть различные точки A и B лежат на окружности O и точка P является серединой отрезка AB . Окружность O_1 касается прямой AB в точке P и касается окружности O . Прямая ℓ — касательная к окружности O_1 , проходящая через точку A и отличная от прямой AB . Пусть C — точка пересечения прямой ℓ и окружности O , отличная от точки A . Пусть Q — середина отрезка BC , а окружность O_2 касается прямой BC в точке Q и касается отрезка AC . Докажите, что окружность O_2 касается окружности O .

Задача 5. В цирке есть n клоунов, которые выбирают цвета для одежды и грима из 12 различных имеющихся цветов. При этом каж-

дому клоуну необходимо использовать не менее 5 различных цветов. Однажды директор цирка потребовал, чтобы никакие два клоуна не использовали одинаковый набор цветов и никакие более чем 20 клоунов не могли использовать любой из цветов одновременно. Найдите наибольшее из возможных значений числа n клоунов, при которых требование директора было бы выполнимо.

19-я олимпиада, 2007 год

Задача 1. Пусть S — множество из девяти различных целых чисел, значения простых делителей которых не превосходят 3. Докажите, что S содержит три различных целых числа, произведение которых является точным кубом.

Задача 2. Пусть треугольник ABC остроугольный, $\angle BAC = 60^\circ$ и $AB > AC$. Пусть I — центр вписанной окружности, а H — точка пересечения высот треугольника ABC . Докажите, что $2\angle ANI = 3\angle ABC$.

Задача 3. Рассмотрим n кругов $C_1, C_2, \dots, C_n$ на плоскости, для которых при любом i , $1 \leq i < n$, центр круга C_i лежит на окружности круга C_{i+1} , а центр круга C_n лежит на окружности круга C_1 . Назовём весом такой расстановки n кругов число пар (i, j) , для которых круг C_i собственным образом содержит круг C_j . Найдите максимально возможное значение такого веса (функцию, зависящую от аргумента n).

Задача 4. Пусть x , y и z — такие положительные действительные числа, что

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = 1.$$

Докажите, что

$$\frac{x^2 + yz}{\sqrt{2x^2(y+z)}} + \frac{y^2 + zx}{\sqrt{2y^2(z+x)}} + \frac{z^2 + xy}{\sqrt{2z^2(x+y)}} \geq 1.$$

Задача 5. Правильный массив фонарей размера 5×5 после повреждения стал работать следующим образом: при переключении выключателя одного из фонарей соседние фонари и сам переключаемый фонарь меняют своё состояние из включённого в выключенный, а из выключенного — во включённый (соседними считаются ближайшие фонари, стоящие в одной строке или столбце). Первоначально все фонари выключены. После определённого количества переключений в точности один фонарь остался включённым. Найдите все возможные позиции данного фонаря.

20-я олимпиада, 2008 год

Задача 1. Пусть дан треугольник ABC , в котором $\angle A < 60^\circ$. Пусть X и Y — такие точки на сторонах AB и AC соответственно, что

$$CA + AX = CB + BX \quad \text{и} \quad BA + AY = BC + CY.$$

Пусть P — такая точка на плоскости, что прямые PX и PY перпендикулярны прямым AB и AC соответственно. Докажите, что $\angle BPC < 120^\circ$.

Задача 2. Ученики в классе формируют группы, в каждой из которых ровно три ученика, таким образом, что любые две различные группы имеют не более одного общего ученика. Докажите, что если в классе 46 учеников, то найдётся множество из 10 учащихся, в котором ни одна группа строго не содержится.

Задача 3. Пусть Γ — окружность, описанная около треугольника ABC . Окружность, проходящая через точки A и C , пересекает стороны BC и BA в точках D и E соответственно. Прямые AD и CE пересекают Γ во второй раз в точках G и H соответственно. Касательные к окружности Γ в точках A и C пересекаются с прямой DE в точках L и M соответственно. Докажите, что точка пересечения прямых LH и MG лежит на окружности Γ .

Задача 4. Рассмотрим функцию $f: \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$, где $\mathbb{N}_0$ — множество неотрицательных целых чисел, которая определяется следующими условиями:

- (i) $f(0) = 0$;
- (ii) $f(2n) = 2f(n)$;
- (iii) $f(2n+1) = n + 2f(n)$ для всех $n \geq 0$.

(а) Определите такие три множества L , E , G , что

$$L = \{n \mid f(n) < f(n+1)\},$$

$$E = \{n \mid f(n) = f(n+1)\},$$

$$G = \{n \mid f(n) > f(n+1)\}.$$

(б) Для каждого $k \geq 0$ положим $a_k = \max\{f(n) : 0 \leq n \leq 2^k\}$. Найдите общую формулу, выражающую a_k через k .

Задача 5. Пусть a , b и c — такие целые числа, что $0 < a < c-1$ и $1 < b < c$. Для каждого k ($0 \leq k \leq a$) обозначим через r_k ($0 \leq r_k < c$) остаток от деления kb на c . Докажите, что два множества $\{r_0, r_1, r_2, \dots, r_a\}$ и $\{0, 1, 2, \dots, a\}$ различны.

21-я олимпиада, 2009 год

Задача 1. Рассмотрим следующую операцию на положительных действительных числах, написанных на доске: с доски стирается произвольное число, например r , а вместо него пишется пара положительных чисел a и b , удовлетворяющих условию $2r^2 = ab$.

Предположим, что вначале на доске было написано одно положительное действительное число r и после этого указанная операция применялась $k^2 - 1$ раз. Докажите, что среди полученных k^2 положительных действительных (не обязательно разных) чисел найдётся число, которое не превосходит kr .

Задача 2. Пусть a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 — действительные числа, удовлетворяющие следующим равенствам:

$$\frac{a_1}{k^2 + 1} + \frac{a_2}{k^2 + 2} + \frac{a_3}{k^2 + 3} + \frac{a_4}{k^2 + 4} + \frac{a_5}{k^2 + 5} = \frac{1}{k^2} \quad \text{при } k = 1, 2, 3, 4, 5.$$

Найдите значение выражения

$$\frac{a_1}{37} + \frac{a_2}{38} + \frac{a_3}{39} + \frac{a_4}{40} + \frac{a_5}{41}.$$

Представьте ответ в виде обыкновенной дроби.

Задача 3. Пусть на плоскости находятся три взаимно непересекающиеся окружности $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$, ни одна из которых не лежит внутри никакой другой. Для каждой точки P плоскости, расположенной вне данных окружностей, построим шесть точек $A_1, B_1, A_2, B_2, A_3, B_3$ по следующему правилу: при всех $i = 1, 2, 3$ точки A_i, B_i — такие различные точки окружности Γ_i , что прямые PA_i и PB_i касаются окружности Γ_i . Назовём точку P *исключительной*, если соответствующие ей прямые A_1B_1, A_2B_2 и A_3B_3 пересекаются в одной точке. Докажите, что все исключительные точки плоскости, если таковые существуют, расположены на одной окружности.

Задача 4. Докажите, что для любого натурального числа k существует арифметическая прогрессия $a_1/b_1, a_2/b_2, \dots, a_k/b_k$ рациональных чисел, где a_i, b_i — взаимно простые натуральные числа при всех $i = 1, 2, \dots, k$ и все числа $a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_k, b_k$ попарно различны.

Задача 5. Ларри и Роб — два робота, которые едут в одном автомобиле из Арговы в Зилис. Роботы управляют автомобилем по следующему алгоритму: Ларри поворачивает налево на 90° каждые ℓ километров начиная от старта; а Роб поворачивает направо на 90° каждые r километров начиная от старта, причём ℓ и r — взаимно простые

натуральные числа. В случае, когда оба робота должны одновременно повернуть машину, автомобиль движется без изменения направления. Предполагается, что поверхность плоская и неограниченная.

Пусть автомобиль стартует из Арговы в направлении к Зилису. При каких парах (ℓ, r) автомобиль гарантированно доедет до Зилиса независимо от расстояния между этими городами?

22-я олимпиада, 2010 год

Задача 1. Дан треугольник ABC , в котором $\angle BAC \neq 90^\circ$. Пусть O — центр описанной окружности треугольника ABC , и пусть Γ — описанная окружность треугольника BOC . Предположим, что Γ пересекает отрезок AB в точке P , отличной от B , а отрезок AC — в точке Q , отличной от C . Пусть ON — диаметр окружности Γ . Докажите, что четырёхугольник $APNQ$ — параллелограмм.

Задача 2. Для натурального числа k назовём целое число *точной k -й степенью*, если оно может быть представлено в виде m^k для некоторого целого числа m . Докажите, что для любого натурального числа n найдутся n таких различных натуральных чисел, что их сумма является точной 2009-й степенью, а их произведение — точной 2010-й степенью. (Напоминаем, что 0 не является натуральным числом.)

Задача 3. В олимпиаде участвуют n школьников (n — натуральное число). Любые два участника либо знакомы друг с другом, либо не знакомы. Каково наибольшее возможное количество пар участников, которые не знакомы друг с другом, но имеют общего знакомого среди других участников олимпиады?

Задача 4. Дан остроугольный треугольник ABC , в котором $AB > BC$ и $AC > BC$. Обозначим через O и H центр описанной окружности и точку пересечения высот треугольника ABC соответственно. Предположим, что описанная окружность треугольника AHC пересекает прямую AB в точке M , отличной от A , а описанная окружность треугольника AHB пересекает прямую AC в точке N , также отличной от A . Докажите, что центр описанной окружности треугольника MNH лежит на прямой OH .

Задача 5. Пусть $\mathbb{R}$ — множество действительных чисел. Определите все функции $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, которые для любых $x, y, z \in \mathbb{R}$ удовлетворяют тождеству

$$f(f(x) + f(y) + f(z)) = f(f(x) - f(y)) + f(2xy + f(z)) + 2f(xz - yz).$$

23-я олимпиада, 2011 год

Задача 1. Пусть a, b, c — натуральные числа. Докажите, что числа $a^2 + b + c, b^2 + c + a, c^2 + a + b$ не могут быть одновременно квадратами целых чисел.

Задача 2. Пять точек A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 расположены на плоскости так, что никакие три точки не лежат на одной прямой. Определите наибольшее возможное значение наименьшего из углов $A_i A_j A_k$, где i, j, k — различные индексы из множества $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Задача 3. Дан остроугольный треугольник ABC , в котором $\angle BAC = 30^\circ$. Биссектрисы внутреннего и внешнего углов при вершине B пересекают прямую AC соответственно в точках B_1 и B_2 , а биссектрисы внутреннего и внешнего углов при вершине C пересекают прямую AB соответственно в точках C_1 и C_2 . Предположим, что окружности с диаметрами $B_1 B_2$ и $C_1 C_2$ пересекаются в точке P , находящейся внутри треугольника ABC . Докажите, что $\angle BPC = 90^\circ$.

Задача 4. Пусть n — фиксированное положительное нечётное число. Рассмотрим $m + 2$ различные точки $P_0, P_1, \dots, P_{m+1}$ на координатной плоскости, которые удовлетворяют следующим трём условиям (здесь m — неотрицательное целое число):

(1) $P_0 = (0, 1)$, $P_{m+1} = (n+1, n)$, и для каждого целого i , $1 \leq i \leq m$, обе x - и y -координаты точки P_i — целые числа, лежащие на отрезке $[1, n]$;

(2) для каждого целого i , $0 \leq i \leq m$, прямая $P_i P_{i+1}$ параллельна оси Ox при чётном i и параллельна оси Oy при нечётном i ;

(3) для каждой пары целой пары i, j , $0 \leq i < j \leq m$, отрезки $P_i P_{i+1}$ и $P_j P_{j+1}$ имеют не более одной общей точки.

Определите наибольшее возможное значение, которое может принимать число m .

Задача 5. Определите все функции $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, где $\mathbb{R}$ — множество всех действительных чисел, удовлетворяющие следующим двум условиям:

(1) существует такое действительное число M , что $f(x) < M$ для любого действительного числа x ;

(2) для любых действительных чисел x, y выполнено равенство $f(xf(y)) + yf(x) = xf(y) + f(xy)$.

24-я олимпиада, 2012 год

Задача 1. Пусть P является внутренней точкой треугольника ABC , а D, E и F — точки пересечения прямой AP и стороны BC треугольника,

прямой BP и стороны CA , прямой CP и стороны AB соответственно. Докажите, что площадь треугольника ABC равна 6, если площадь каждого из треугольников PFA , PDB и PEC равна 1.

Задача 2. В каждую ячейку клетчатой доски размера 2012×2012 по одному вписаны действительные числа, одновременно не меньшие 0 и не большие 1. Рассмотрим разбиения доски на два непустых прямоугольника вдоль горизонтальной или вертикальной линии сетки. Пусть при любом таком разбиении хотя бы в одном из двух полученных прямоугольников сумма чисел не будет превышать 1. Определите максимально возможную сумму всех чисел доски размера 2012×2012 .

Задача 3. Определите все возможные пары (p, n) , где p — простое число и n — натуральное число, для которых $(n^p + 1)/(p^n + 1)$ является целым.

Задача 4. Пусть дан остроугольный треугольник ABC . Обозначим через D основание перпендикуляра, опущенного из вершины A на сторону BC , и пусть M — середина BC , а H — точка пересечения высот треугольника ABC . Пусть E — точка пересечения описанной окружности Γ треугольника ABC и луча MH , а F — точка пересечения (отличная от E) прямой ED и окружности Γ . Докажите, что выполняется равенство $BF : CF = AB : AC$.

Задача 5. Пусть n — натуральное число, большее или равное 2. Докажите, что если действительные числа $a_1, a_2, \dots, a_n$ удовлетворяют равенству $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 = n$, то выполняется неравенство

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{1}{n - a_i a_j} \leq \frac{n}{2}.$$

25-я олимпиада, 2013 год

Задача 1. В остроугольном треугольнике ABC , вписанном в окружность с центром O , проведены высоты AD , BE и CF . Докажите, что отрезки OA , OF , OB , OD , OC , OE разбивают треугольник ABC на три пары равновеликих треугольников.

Задача 2. Найдите все такие натуральные числа n , что число

$$\frac{n^2 + 1}{[\sqrt{n}]^2 + 2}$$

целое. Здесь $[r]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее r .

Задача 3. Для заданных $2k$ вещественных чисел $a_1, a_2, \dots, a_k, b_1, b_2, \dots, b_k$ определим последовательность X_n по формуле

$$X_n = \sum_{i=1}^k [a_i n + b_i] \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Докажите, что если X_n образуют арифметическую прогрессию, то число $\sum_{i=1}^k a_i$ целое. Здесь $[r]$ обозначает наибольшее целое, не превосходящее r .

Задача 4. Пусть a и b — натуральные числа. Конечные множества A и B , состоящие из целых чисел, удовлетворяют следующим условиям:

(1) A и B не имеют общих элементов;

(2) если целое число i лежит в A или в B , то $i + a$ лежит в A , или $i - b$ лежит в B .

Докажите, что $a|A| = b|B|$. Здесь $|X|$ обозначает количество элементов множества X .

Задача 5. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность ω . На продолжении стороны AC взяли точку P так, что прямые PB и PD касаются ω . Касательная к окружности, проведённая в точке C , пересекает прямую PD в точке Q , а прямую AD — в точке R . Обозначим через E вторую точку пересечения прямой AQ с окружностью ω . Докажите, что точки B, E и R лежат на одной прямой.

26-я олимпиада, 2014 год

Задача 1 (*Методический совет Японии*). Для натурального числа m обозначим через $S(m)$ и $P(m)$ сумму и произведение его цифр соответственно. Докажите, что для любого натурального n существуют натуральные числа $a_1, a_2, \dots, a_n$, удовлетворяющие следующим условиям:

$$S(a_1) < S(a_2) < \dots < S(a_n);$$

$$S(a_i) = P(a_{i+1}) \quad \text{для всех } i = 1, 2, \dots, n-1;$$

$$S(a_n) = P(a_1).$$

Задача 2 (*Варут Суксомпонг, Таиланд*). Пусть $S = \{1, 2, \dots, 2014\}$. Для каждого непустого подмножества $T \subseteq S$ должен быть выбран один из его элементов в качестве его *представителя*. Найдите количество всех способов выбора представителей для всех непустых подмножеств множества S , обладающих следующим свойством: если какое-

либо подмножество $D \subseteq S$ является объединением попарно непересекающихся непустых подмножеств $A, B, C \subseteq S$, то представитель подмножества D также является представителем по крайней мере одного из подмножеств A, B, C .

Задача 3 (*Варут Суксомпонг, Таиланд*). Найдите все натуральные числа n , для которых при любом целом k существует такое целое a , что $a^3 + a - k$ кратно n .

Задача 4 (*Методический совет Австралии*). Пусть n и b — натуральные числа. Число n назовём b -различимым, если существует такое множество из n различных натуральных чисел, меньших b , что в нём нет двух различных подмножеств с одинаковой суммой элементов.

(а) Докажите, что число 8 является 100-различимым.

(б) Докажите, что число 9 не является 100-различимым.

Задача 5 (*Илья Богданов, Россия; Медеубек Кунгожин, Казахстан*). Окружности ω и Ω пересекаются в точках A и B . Пусть M — середина дуги AB окружности ω (M лежит внутри Ω). Хорда MP окружности ω пересекает Ω в точке Q (Q лежит внутри ω). Пусть ℓ_P — касательная к окружности ω в точке P , а ℓ_Q — касательная к окружности Ω в точке Q . Докажите, что окружность, описанная около треугольника, образованного при пересечении прямых ℓ_P, ℓ_Q и AB , касается Ω .

27-я олимпиада, 2015 год

Задача 1 (*Варут Суксомпонг, Таиланд*). На стороне BC треугольника ABC выбрана точка D . Прямая, проходящая через D , пересекает отрезок AB и луч AC в точках X и Y соответственно. Окружность, описанная около треугольника BXD , пересекает окружность ω , описанную около треугольника ABC , вторично в точке Z , отличной от B . Прямые ZD и ZY пересекают ω вторично в точках V и W соответственно. Докажите, что $AB = VW$.

Задача 2 (*Анджело ди Паскуале, Австралия*). Пусть $S = \{2, 3, 4, \dots\}$ — множество всех целых чисел, не меньших 2. Существует ли функция $f: S \rightarrow S$, для которой при всех таких $a, b \in S$, что $a \neq b$, выполнено равенство $f(a)f(b) = f(a^2b^2)$?

Задача 3 (*Ван Вей Хуа, Гонконг*). Последовательность действительных чисел $a_0, a_1, \dots$ будем называть *хорошей*, если выполняются следующие три условия:

(1) a_0 — натуральное число.

(2) для каждого целого неотрицательного i выполнено хотя бы одно из равенств $a_{i+1} = 2a_i + 1$ или $a_{i+1} = a_i / (a_i + 2)$.

(3) существует такое натуральное число k , что $a_k = 2014$.

Найдите наименьшее из таких натуральных чисел n , что существует хорошая последовательность $a_0, a_1, \dots$ действительных чисел, для которой $a_n = 2014$.

Задача 4 (Пакавут Йирандилок и Варут Суксомпонг, Таиланд). Пусть n — натуральное число. На плоскости заданы $2n$ различных прямых, среди которых нет двух параллельных. Некоторые n из этих $2n$ прямых покрашены синим, а оставшиеся n прямых покрашены красным. Через $\mathcal{B}$ обозначим множество всех точек плоскости, принадлежащих хотя бы одной синей прямой, а через $\mathcal{R}$ обозначим множество всех точек плоскости, принадлежащих хотя бы одной красной прямой. Докажите, что существует окружность, которая имеет с множеством $\mathcal{B}$ ровно $2n - 1$ общих точек и с множеством $\mathcal{R}$ тоже имеет ровно $2n - 1$ общих точек.

Задача 5 (Пакавут Йирандилок и Варут Суксомпонг, Таиланд). Найдите все такие последовательности $a_0, a_1, a_2, \dots$, состоящие из натуральных чисел, что $a_0 \geq 2015$ и при всех натуральных $n \geq 1$ выполняются следующие условия:

(1) a_{n+2} делится на a_n ;

(2) $|s_{n+1} - (n+1)a_n| = 1$, где $s_{n+1} = a_{n+1} - a_n + a_{n-1} - \dots + (-1)^{n+1}a_0$.

28-я олимпиада, 2016 год

Задача 1. Назовём замечательным треугольник ABC , для которого выполнено следующее условие: пусть D — произвольная точка на стороне BC , а P и Q — проекции точки D на прямые AB и AC соответственно; тогда точка, симметричная точке D относительно прямой PQ , лежит на окружности, описанной около треугольника ABC .

Докажите, что треугольник ABC является замечательным тогда и только тогда, когда $\angle A = 90^\circ$ и $AB = AC$.

Задача 2. Назовём натуральное число чудесным, если оно может быть представлено в виде $2^{a_1} + 2^{a_2} + \dots + 2^{a_{100}}$, где $a_1, a_2, \dots, a_{100}$ — неотрицательные целые числа, не обязательно различные. Найдите такое наименьшее натуральное n , что ни одно натуральное число, делящееся на n , не является чудесным.

Задача 3. Пусть AB и AC — два различных луча, не лежащих на одной прямой, и пусть ω — окружность с центром O , которая касается луча AC в точке E и касается луча AB в точке F . Пусть R — точка на отрезке EF . Прямая, параллельная EF и проходящая через точку O , пересекает прямую AB в точке P . Пусть N — точка пересечения прямых PR и AC , а M — точка пересечения прямой AB с прямой, параллельной AC и проходящей через R . Докажите, что прямая MN касается окружности ω .

Задача 4. В стране 2016 городов. Авиакомпания Starways хочет организовать односторонние рейсы между некоторыми парами городов так, чтобы из каждого города выходил ровно один рейс.

Найдите наименьшее натуральное k , удовлетворяющее следующему условию: как бы авиакомпания ни организовала рейсы, все города можно будет разбить на k групп так, что из любого города нельзя будет добраться ни до какого другого города той же группы, используя не более 28 рейсов.

Задача 5. Найдите все такие функции $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$, что равенство

$$(z+1)f(x+y) = f(xf(z)+y) + f(yf(z)+x)$$

выполнено для всех положительных x, y, z . (Через $\mathbb{R}^+$ обозначено множество всех положительных действительных чисел.)

Условия задач математической олимпиады «Шёлковый путь»

1-я олимпиада, 2002 год

Задача 1. В треугольнике ABC точка I — центр вписанной окружности. Пусть P — точка пересечения биссектрисы угла A с описанной окружностью ($P \neq A$), D — точка касания вписанной окружности со стороной BC , а Q — точка пересечения прямой PD с описанной окружностью ($Q \neq P$). Докажите, что $PI = QI$, если отрезок PD равен радиусу вписанной окружности.

Задача 2. Даны натуральное число $n > 2$ и положительные действительные числа $a_1, a_2, \dots, a_n$. Пусть t, k, p — произвольные натуральные числа, причём $1 < t < n$. Положим $m = k + p$. Докажите следующие неравенства:

$$\begin{aligned} 1) \quad & \frac{a_1^p}{a_2^k + a_3^k + \dots + a_t^k} + \frac{a_2^p}{a_3^k + a_4^k + \dots + a_{t+1}^k} + \dots + \frac{a_{n-1}^p}{a_n^k + a_1^k + \dots + a_{t-2}^k} + \\ & + \frac{a_n^p}{a_1^k + a_2^k + \dots + a_{t-1}^k} \geq \frac{(a_1^p + a_2^p + \dots + a_n^p)^2}{(t-1)(a_1^m + a_2^m + \dots + a_n^m)}; \\ 2) \quad & \frac{a_2^k + a_3^k + \dots + a_t^k}{a_1^p} + \frac{a_3^k + a_4^k + \dots + a_{t+1}^k}{a_2^p} + \dots + \frac{a_n^k + a_1^k + \dots + a_{t-2}^k}{a_{n-1}^p} + \\ & + \frac{a_1^k + a_2^k + \dots + a_{t-1}^k}{a_n^p} \geq \frac{(t-1)(a_1^k + a_2^k + \dots + a_n^k)^2}{a_1^m + a_2^m + \dots + a_n^m}. \end{aligned}$$

Задача 3. В каждой клетке некоторого конечного множества клеток бесконечной клетчатой доски записано целое число так, что сумма чисел в каждой строке и в каждом столбце делится на 2002. Докажите, что каждое число a можно заменить на некоторое число a' , делящееся на 2002 и такое, что $|a - a'| < 2002$, и суммы чисел во всех строках и во всех столбцах не изменятся.

Задача 4. Рассмотрим дробь $1/7 = 0,142857$, которая является чисто периодической десятичной дробью с периодом $6 = 7 - 1$. В одном периоде выполняется свойство $142 + 857 = 999$. Для $n = 1, 2, \dots$, опре-