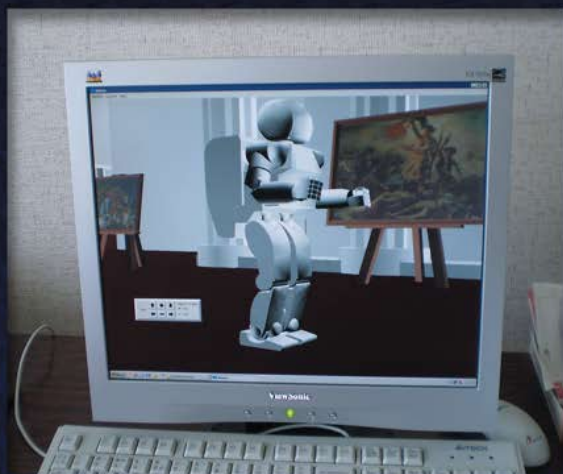


**А.А. АХРЕМ, И.М. МАКАРОВ,
В.З. РАХМАНКУЛОВ**

**МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ
ВИРТУАЛИЗАЦИИ ПРОЦЕССОВ
ПРОЕКТИРОВАНИЯ
И ТРАНСФЕРА ТЕХНОЛОГИЙ**



**А.А. АХРЕМ, И.М. МАКАРОВ,
В.З. РАХМАНКУЛОВ**

**МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ
ВИРТУАЛИЗАЦИИ ПРОЦЕССОВ
ПРОЕКТИРОВАНИЯ
И ТРАНСФЕРА ТЕХНОЛОГИЙ**



МОСКВА
ФИЗМАТЛИТ®
2013

УДК 51.74; 004.946

ББК 22.1

Р 27



*Издание осуществлено при поддержке
Российского фонда фундаментальных
исследований по проекту 1201-07118*

Ахрем А.А., Макаров И.М., Рахманкулов В.З. **Математическая теория виртуализации процессов проектирования и трансфера технологий.** — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2013. — 316 с. — ISBN 978-5-9221-1412-7.

В монографии впервые представлена в обобщенном виде математическая теория виртуализации, не имеющая аналогов в мире как в области прикладной математики, так и в исследованиях компьютерно-информационной технологии. Под термином «виртуализация» понимается решение задач на компьютерных или виртуальных моделях в отличие от решений с применением физических моделей или математических уравнений. В настоящее время в науке и практике используются преимущественно физические, математические и виртуальные модели. Физические и математические модели известны давно, хорошо разработаны их математические теории. Виртуальные модели приобрели широкую известность во второй половине XX века в результате появления и быстрого распространения компьютеров. Несмотря на длительное время практического использования разнообразных виртуальных моделей, математическая теория виртуализации пока не получила должного развития и процесс применения виртуальных моделей все еще остается довольно хаотическим, больше интуитивным, происходит без достаточного математического обоснования. Предлагаемая вниманию читателей монография, посвященная виртуальным моделям и методам их исследования, призвана заполнить этот пробел.

Книга представляет интерес для широкого круга читателей, включая ученых-математиков, инженеров, специалистов в области информационной технологии и компьютерной автоматизации, магистров, аспирантов и студентов технических университетов, специализирующихся на применении компьютеров в различных областях деятельности человека.

© ФИЗМАТЛИТ, 2013

© А. А. Ахрем, И. М. Макаров,
В. З. Рахманкулов, 2013

ISBN 978-5-9221-1412-7

*85-летнему юбилею академика РАН
Игоря Михайловича Макарова посвящается*

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	9
Глава I. Фундаментальные свойства виртуальных моделей сложных технических систем	14
1. Виртуализация и виртуальное моделирование	14
1.1. Транспозиционные и репликационные виртуальные модели (17). 1.2. Фундаментальные свойства виртуальных компьютерных моделей (19). 1.3. Особенности процесса виртуализации (21).	
2. Транспозиционные динамические виртуальные модели и их замещаемость	23
2.1. Транспозиционные модели из класса линейных динамических дифференциальных систем (23). 2.2. Транспозиционные виртуальные модели линейных и квазилинейных периодических дифференциальных систем (27). 2.3. Транспозиционные модели стационарных динамических систем (41). 2.4. Транспозиционные модели из класса компактных метрических пространств (44). 2.5. Транспозиционные виртуальные модели из класса разностных схем для уравнений с частными производными (47).	
3. Грубость свойств виртуальных моделей	48
3.1. Грубые свойства специальных классов моделей сложных технических систем (48). 3.2. Дифференциальные уравнения с постоянными и периодическими коэффициентами (57). 3.3. Динамические системы с почти-периодическими коэффициентами (64). 3.4. Динамические системы с правильными коэффициентами (76). 3.5. Стохастические возмущения динамических моделей сложных технических процессов и систем (83).	
4. Адекватность виртуальных моделей	94
4.1. Адекватность математических моделей из класса линейных многомерных систем алгебраических уравнений (94). 4.2. Адекватность оптимизационных моделей проектирования сложных технических систем (97). 4.3. Адекватность метода анализа устойчивости квазилинейных дифференциальных систем по их первому приближению (102). 4.4. Анализ адекватности конечно-разностных моделей дифференциальных динамических систем (106).	

5. Типичные свойства виртуальных моделей.	110
5.1. Типичные свойства решений линейных динамических систем (111). 5.2. Типичные свойства линейных динамических систем с квазипериодическими коэффициентами (113).	
6. Декомпозиция виртуальных моделей.	115
6.1. Геометрические критерии грубой диагонализуемости специальных классов линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений (116). 6.2. Геометрические критерии грубой диагонализуемости различных классов двумерных линейных динамических систем (121). 6.3. Геометрические критерии грубой диагонализуемости линейных дифференциальных уравнений n -го порядка (125). 6.4. Необходимые и достаточные условия декомпозируемости специальных классов линейных динамических дифференциальных систем (127).	
7. Приложение	129
7.1. Доказательство теоремы 96 (129).	
Литература к главе I	144
 Глава II. Виртуальные компьютерные модели процессов проектирования и принятия проектных решений.	155
1. Проектирование в компьютерном мире	155
2. Виртуальные модели для виртуального проектирования	157
2.1. Модели процессов проектирования и разработки сложных технических систем (157). 2.2. Моделирование параллельных вариантов проектов (165). 2.3. Многомодельная виртуализация процесса выбора проектных решений (168). 2.4. Оценка дохода от параллельной разработки и моделирования вариантов проектов сложных технических систем (173).	
3. Параметрические виртуальные модели анализа проектных решений	176
3.1. Методы аппроксимации множеств выбора задач проектирования сложных технических систем (176). 3.2. Основная теорема о монотонности разброса решающих процессов (178). 3.3. Примеры оценки величины разброса задач выбора по проекту-аналогу (181).	
Литература к главе II	191
 Глава III. Математические модели процессов технологического трансфера	194
1. Модернизация экономики методами технологического переноса. . .	194
2. Одномерные дифференциальные модели логистического типа . . .	196
2.1. Общие свойства решений дифференциальных моделей логистического типа для процессов технологического переноса (196). 2.2. Логистические дифференциальные модели для исследования влияния изменений инвестиционного барьера (200). 2.3. Модель переноса разложимой технологии (201). 2.4. Модель корпоративного объединения участников трансфера (201). 2.5. Одномерные	

дифференциальные модели процесса технологического трансфера с учетом конкуренции между фирмами (204).	
3. Двумерные дифференциальные модели конкурентных взаимодействий на рынке технологического переноса.	206
3.1. Анализ особых точек модели Вольтерра–Костицина (206).	
3.2. Многомерные дифференциальные модели переноса разложимых технологий (208). 3.3. Дифференциальная модель процесса поэтапного трансфера разложимой технологии (209). 3.4. Модель Вольтерра–Гаузе для случая конкурентного трансфера (212).	
4. Дифференциальные модели технологического переноса с запаздыванием.	213
5. Стохастическая модель процессов трансфера производственных технологий.	216
5.1. Достаточные условия уменьшения вероятности вырождения процесса технологического трансфера на любом конечном интервале времени (218).	
6. Модель оценки влияния инвестиционной активности предприятий с участием иностранного капитала на динамику экономического роста страны-реципиента переносимой технологии.	221
6.1. Основные свойства акселераторно-мультипликативной модели оценки влияния инвестиционной активности иностранного сектора экономики на динамику экономического роста страны-реципиента переносимых технологий (224).	
7. Дифференциальная модель оценки влияния налоговых отчислений предприятий на процесс распространения переносимой технологии.	227
8. Приложение.	229
8.1. Доказательство теоремы 1 (229). 8.2. Доказательство теоремы 10 (230).	
Литература к главе III.	235
Глава IV. Бизнес-интеллект и OLAP-технология для анализа технологического трансфера в автомобильной промышленности России.	238
1. Бизнес-интеллект и извлечение знаний из потоков оперативно-учетной информации.	239
1.1. Влияние миниатюризации на стремительное улучшение характеристик вычислительной техники (240). 1.2. Проблемы восприятия человеком нарастающих объемов компьютерных данных (242). 1.3. Бизнес-интеллект как новый взгляд на роль компьютерных данных в принятии решений и управлении (244).	
2. Компьютерная поддержка процессов принятия решений на основе OLAP-технологии.	249
2.1. Этапы развития OLAP-технологии (250). 2.2. Основные подходы к построению OLAP-систем (252).	

3. Виртуальные модели агрегирования информации в OLAP-кубах . .	254
3.1. Виды запросов к кубу (256). 3.2. Алгоритм PipeSort (258).	
3.3. Алгоритм секционирования кубов (259). 3.4. Алгоритм вычисления разреженных и айсберг-кубов «снизу-вверх» (BUC) (259).	
3.5. Алгоритм QCTrees для редукции агрегатов (260). 3.6. Алгоритм Star-Cubing с интеграцией схем обхода (261).	
4. Исследование свойств гиперкубовых моделей	263
4.1. О количественной оценке неопределенности вывода решений с помощью гиперкубов многомерных данных (263). 4.2. Примеры применения теорем 1–3 при исследовании меры неопределенности покрытий гиперкубов многомерных данных (265). 4.3. Особенности формирования нерегламентированных запросов к многомерной базе данных (268). 4.4. Повышение производительности и масштабируемости реляционных хранилищ данных и OLAP-систем (273). 4.5. Анализ свойств декомпозируемости гиперкубовых структур (282).	
5. Иллюстрация применения методов BI и OLAP-технологии для анализа процессов технологического трансфера	292
5.1. Исходные данные для анализа модернизации автомобильной технологии России в 2000-е годы (293). 5.2. Извлечение знаний из учетных данных на основе технологии OLTP (294). 5.3. Извлечение знаний из учетных данных на основе технологии OLAP (296). 5.4. Извлечение знаний из учетных данных на основе технологии Data Mining (303).	
6. Современные информационные технологии, ориентированные на извлечение и обработку знаний из сверхбольших объемов оперативно-учетных данных	307
Литература к главе IV	311

ВВЕДЕНИЕ

В монографии впервые представлена в обобщенном виде математическая теория виртуализации, не имеющая аналогов в мире как в области прикладной математики, так и в исследованиях компьютерно-информационной технологии.

Под термином «виртуализация» понимается решение задач на компьютерных или виртуальных моделях, в отличие от решений с применением физических моделей или математических уравнений. В настоящее время в науке и практике используются преимущественно физические, математические и виртуальные модели. Физические и математические модели известны давно, хорошо разработаны их математические теории. Виртуальные модели приобрели широкую известность во второй половине XX века в результате появления и быстрого распространения компьютеров. Несмотря на длительное время практического использования разнообразных виртуальных моделей, математическая теория виртуализации пока не получила должного развития, и процесс применения виртуальных моделей все еще остается довольно хаотическим, больше интуитивным, происходит без достаточного математического обоснования. Предназначенная вниманию читателя книга, посвященная *виртуальным моделям и методам их исследования*, призвана заполнить этот пробел.

Авторами книги предложены оригинальная трактовка концепции виртуализации и новый подход к исследованию виртуальных моделей, позволивший разработать современные математические основы анализа и синтеза виртуальных моделей. Впервые в мировой науке и математической теории виртуализации авторы открывают и исследуют неизвестный ранее класс виртуальных моделей, названный ими *транспозиционные виртуальные модели*, главной особенностью которых является замечательное и крайне привлекательное свойство *частичного, полного или превосходящего замещения* имитируемых такими моделями физических объектов, процессов, систем. В качестве наглядного примера транспозиционной виртуальной модели можно привести виртуальную клавиатуру, применяемую сегодня во всех современных мобильных телефонах и планшетных компьютерах. Благодаря сенсорному экрану программно-реализованная модель виртуальной клавиатуры замещает полностью все основные функции своего механического аналога, обладая при этом превосходящей надежностью и удобством применения в условиях малогабаритной техники.

Существующая в мире научная литература по виртуализации сконцентрирована на использовании виртуальных моделей в самой компьютерной технике. Поэтому традиционно виртуализация рассматривается как программная или аппаратно-программная технология разделения физических ресурсов ЭВМ или серверов на виртуальные ресурсы, называемые виртуальными машинами. Благодаря виртуальным машинам большое число пользователей может одновременно работать со многими виртуальными серверами как со своим индивидуальным физическим ресурсом, несмотря на то что реально физический ресурс может быть предоставлен со стороны всего лишь одной ЭВМ. Такая виртуализация подняла на более высокий уровень многозадачный режим компьютерных вычислений и открыла новые горизонты для массивной параллельной обработки информации.

Вместе с тем процесс виртуализации распространился далеко за пределы собственно компьютерной технологии и проник во все сферы автоматизации труда человека, осуществляемые с помощью компьютеров — это научные исследования, инженерное проектирование, архитектурный дизайн, управление физическими объектами, бизнес-процессами и интеллектуальными системами. В частности, созданы эффективные виртуальные модели стыковочных процессов для космических орбитальных станций, модели динамики движения скоростных железнодорожных поездов по мостовым конструкциям, модели двигателей внутреннего сгорания, виртуальные модели для имитации краш-тестов и многие другие полезные практические приложения. Сами компьютеры развиваются очень быстро благодаря тому, что их проектирование и разработка ведутся практически полностью на виртуальных моделях. Поэтому весьма актуальны теоретические обоснования создаваемых виртуальных моделей и сложных виртуальных систем, что требует развития математической теории виртуализации, понимаемой в более широком плане, нежели решение специализированной проблемы разделения ресурсов компьютера. Именно так, более широко поставлена цель разработки математической теории виртуализации в настоящей монографии. Эта теория должна охватывать общие фундаментальные аспекты, свойственные виртуальным моделям, и базироваться на доказательстве характеристических свойств, порождаемых виртуализацией.

Общим фундаментальным вопросам виртуализации посвящена первая глава книги. В этом разделе исследуются как традиционные виртуальные модели, названные *репликационными*, поскольку они имитируют или моделируют физические системы, являясь их приближенными компьютерными аналогами, так и вводится понятие нового класса виртуальных моделей — *транспозиционные виртуальные модели*, которые могут не только имитировать физическую реальность, но и эффективно замещать физическую реальность виртуальной реаль-

ностью. Исследование свойств репликационных и транспозиционных виртуальных моделей составляет основу представленной в монографии математической теории виртуализации. Такая теория становится все более актуальной на современном этапе развития компьютерной и информационной технологии, когда наступила эра широкой компьютеризации физических объектов, процессов, систем, а мир встроенных систем начал покрывать почти всю традиционную технику. Важные фундаментальные проблемы в математической теории виртуализации связаны с исследованием классических свойств адекватности и грубости виртуальных моделей, которые необходимо дополняются новыми *свойствами замещаемости*, присущими только транспозиционным виртуальным моделям. Полученные и обоснованные необходимые и достаточные условия адекватности, грубости и замещаемости позволили сформулировать критерии работоспособности виртуальных моделей. Особое внимание в этой главе уделено исследованию базовых свойств виртуальных моделей технических систем, описываемых многомерными дифференциальными уравнениями. Для таких моделей впервые получены алгебраические и геометрические критерии их грубой декомпозируемости, грубой диагонализированности, а также грубой устойчивости характеристических показателей Ляпунова. На базе этих критериев разработаны алгоритмы анализа различных видов устойчивости общих линейных и квазилинейных систем, а также систем со стационарными, периодическими, приводимыми коэффициентами.

Важные прикладные проблемы теории виртуализации представлены в последующих главах книги.

Вторая глава посвящена исследованию виртуальных компьютерных моделей процессов проектирования и принятия проектных решений. Наряду с виртуализацией в компьютерной технологии, огромные достижения к настоящему времени получены в области использования виртуальных моделей в автоматизированном проектировании современной техники и передовой технологии. Достаточно сказать, что виртуализация революционно изменила классическое проектирование, переведя его на несравненно более высокие уровни производительности, качества, технической и экономической эффективности. Виртуальные модели стали основным инструментом проектировщиков и главным козырем в усиливающейся конкурентной борьбе за технологические рынки. Поэтому математическая теория виртуализации обязательно включает в свой состав столь обширную область исследования проблем, охватываемую термином *виртуальное проектирование*. Для виртуального проектирования авторами впервые в теории виртуализации рассмотрена основная математическая модель задачи проектирования как совместная задача выбора и реализации проектных решений. На этой основе введено понятие разброса решающих процессов и доказана монотонность величины разброса при морфизмах процессов

выбора проектных решений. Для виртуальных моделей в классе оптимизационных задач проектирования, основанных на последовательном анализе и отбраковке вариантов, впервые получены условия сохранения свойств внешней устойчивости и максимальности множеств выбора при различных морфизмах.

В третьей главе рассмотрены прикладные аспекты теории виртуализации, связанные с исследованием виртуальных моделей процессов технологического трансфера. Технологический трансфер — это процесс переноса передовой технологии и ноу-хау от донора технологии к реципиенту. Технологический перенос достаточно универсален и может осуществляться из одной страны в другую, из более передовой отрасли в отсталую, внутри одной отрасли или компании. Трансфер технологии является революционным подходом к решению экономических проблем различных стран, особенно проявившим себя в период после окончания Второй мировой войны. Сначала технологический трансфер помог возродить и вывести на передовые позиции экономику Японии, затем по этому пути последовали так называемые азиатские тигры, уже более 25 лет трансфер активно использует Китай, ставший в XXI веке второй экономикой в мире, наконец, технологический трансфер начала осваивать Россия — уже получен первый положительный результат в автомобильной промышленности, модернизированной буквально за 3–4 года с помощью лидеров мирового автомобилестроения, построивших более 20 совместных сборочных производств в России и продолжающих распространение трансфера на остальные, не только сборочные технологии. В представленной математической теории виртуализации исследованию моделей технологического трансфера придается большой внимание в связи с актуальностью и необходимостью развития столь продуктивного подхода к модернизации экономики, применимого как к развивающимся, так и развитым странам. Для виртуальных моделей технологического трансфера использован аппарат дифференциальных моделей логистического типа. В отличие от традиционных методов исследования асимптотического поведения частных решений логистических дифференциальных моделей вблизи равновесных положений, в настоящей книге аппарат логистических моделей развивается в направлении исследования динамики моделей на конечных интервалах времени и в условиях ограниченных ресурсов, что позволяет изучать динамику роста или затухания процессов трансфера при наличии инвестиционных барьеров для свободного доступа производителей на конкурентный рынок. Разработаны новые дифференциальные модели трансфера, учитывающие конкурентные взаимодействия участников этого процесса, влияние инвестиционной деятельности иностранных и совместных компаний на темпы экономического роста страны-реципиента технологии, возможные влияния финансовой и налоговой политики на процесс распространения технологии. Очень важно, что

данный раздел теории виртуализации впервые подводит теоретический фундамент под широко распространившуюся практику технологического трансфера во многих странах мира, включая Россию.

Четвертая глава тесно связана с предыдущей, в ней подробно анализируется первый опыт широкомасштабного внедрения методов технологического трансфера в автомобильной промышленности России. По существу, настоящая монография дает строгое научное и оригинальное описание уникального положительного опыта успешной модернизации промышленности в новейшей истории России. Этот опыт пока не осознан в полной мере в отношении своего потенциала, по нему отсутствуют научные публикации как в России, так и в мире, в широкой прессе представлены только сведения статистического характера, отражающие лишь фактографические данные необычно быстрого роста производства и продаж автомобилей на российском рынке в последнем десятилетии. Эти факты, в частности, свидетельствуют о том, что в 2011 году российский рынок продаж автомобилей вышел на второе место в Европе, уступая только Германии. Основой столь поразительного феномена является технологический трансфер, детально проанализированный в настоящей монографии. При анализе опыта переноса автомобильной технологии использованы не только методы теории виртуализации, представленные в предыдущих главах книги, но и современные методы бизнес-аналитики, развиваемые авторами в новом направлении информационной технологии, получившем название BI (Business Intelligence).

Таким образом, в монографии в новой постановке рассмотрены фундаментальные и прикладные проблемы математической теории виртуализации и даны практические примеры использования этой теории.

Книга представляет интерес для широкого круга читателей, включая ученых-математиков, инженеров, специалистов в области информационной технологии и компьютерной автоматизации, магистров, аспирантов и студентов технических университетов, специализирующихся на применении компьютеров в различных областях деятельности человека.

Настоящая монография включает результаты научных исследований авторов, выполненных в период 1997–2012 гг. при финансовой поддержке РФФИ, проекты 97-01-00965а, 99-01-00359а, 01-01-00405а, 04-01-00386а, 07-01-00572а, 10-01-00674а, а также грантов комплексных программ Президиума РАН — Программы Президиума РАН «Математическое моделирование, интеллектуальные системы и управление нелинейными механическими системами» (проект № 2.43), Программы Президиума РАН № 14 «Фундаментальные проблемы информатики и информационных технологий» (проект № 2.44), Программы Президиума РАН № 15 «Информационные технологии, математическое моделирование, системный анализ и автоматизация» (проект № 2.09).

Глава I

ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ВИРТУАЛЬНЫХ МОДЕЛЕЙ СЛОЖНЫХ ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Невозможно представить себе современное развитие науки и техники без широкого применения методов виртуального моделирования. Сущность этой методологии состоит в замене исходного объекта его аналогом — программно-алгоритмически реализованной виртуальной моделью — для исследования отдельных свойств изучаемого объекта или процесса. Альтернативой виртуальному моделированию является физическое макетирование, где аналогичные свойства изучаются на самом объекте. Но у виртуального моделирования есть ряд преимуществ: меньшие сроки на подготовку анализа результатов, значительно меньшая материалоемкость, возможность выполнения экспериментов в критических режимах, которые могли бы привести к разрушению физического макета. Главное же преимущество виртуального способа решения физических проблем заключается в гораздо более низкой стоимости в целом компьютерных вычислений по сравнению с затратами на реализацию физических процессов и систем.

1. Виртуализация и виртуальное моделирование

Термины «виртуальная модель» и «виртуальная реальность» обычно ассоциируются с компьютерными играми, когда с помощью различных устройств виртуальной реальности — аудио, визуальных, силомоментных, тактильных и др. — имитируется физическая реальность, что позволяет получить так называемый «эффект присутствия» или близкое к реальному воздействие на органы чувств человека со стороны искусственно созданной компьютерной модели. В результате игры, усиленные виртуальной реальностью, в значительной степени отличаются от традиционных игр и приобретают «живые» черты, вызывая тем самым дополнительный интерес играющих.

Однако игры — не единственная область приложения виртуального моделирования, значение виртуальных компьютерных моделей гораздо шире и выходит далеко за рамки индустрии развлечений. В последние десятилетия виртуальные модели получили широкую популярность

в самых различных областях — научных исследованиях, инженерном проектировании, архитектурном дизайне, управлении физическими объектами и интеллектуальными процессами. Причины быстрого развития этого направления связаны, с одной стороны, с общим стремительным прогрессом в области вычислительной техники и информационной технологии и, с другой стороны, с поступательным повышением качества и полезности самих виртуальных моделей, эффективность которых во многом зависит от того, насколько глубоким является заложенный в программную реализацию виртуальной модели практический инженерный и исследовательский опыт.

Значительная часть исследований и прикладных разработок в области виртуального моделирования сосредоточена на 3-мерной графике и визуализации, что вполне закономерно, поскольку развитие этого направления стало важнейшим вкладом в становление и быстрое признание виртуального моделирования. Благодаря объемной фотореалистической визуализации физических объектов и процессов на экране компьютера стала возможной полная имитация зрительного восприятия разнообразных статических и динамических состояний физической реальности. Достижения объемной визуализации были быстро востребованы в системах автоматизированного проектирования САПР, где переход от плоской проективной и каркасной объемной графики к 3-мерной фотореалистической графике оказал революционное воздействие на весь процесс проектирования, сделав иллюзию пространственного геометрического представления основным инструментом повышения качества процессов анализа и синтеза проектных моделей. Ярким примером использования виртуального моделирования в САПР является программный пакет MSC.ADAMS [1] — наиболее признанная во всем мире система виртуального моделирования сложных машин и механизмов. Система ADAMS обеспечивает кинематический и динамический анализ виртуальных компьютерных моделей, созданных в различных САПР — CATIA, Pro/Engineer, Solid Works и др. Например, с помощью решателей ADAMS моделируются упругие свойства подвески автомобилей, динамическое поведение отдельных узлов, агрегатов и транспортного средства в целом, исследуются характеристики устойчивости, управляемости, прочности, виброчастотной устойчивости, аэро-гидродинамические нагрузки. На базе системы ADAMS созданы эффективные виртуальные модели стыковочных процессов для космических орбитальных станций, модели динамики движения скоростных железнодорожных поездов по мостовым конструкциям, модели двигателей внутреннего сгорания, виртуальные модели для имитации краш-тестов и многие другие полезные для проектирования практические приложения. Очень важно, что программный пакет позволяет исследовать десятки, сотни и даже тысячи вариантов конструкции сложных машин и механизмов, моделируя на компьютере реальные условия их

работы, сравнивая альтернативные варианты и выбирая наилучшие для создания более совершенных будущих изделий, уменьшая при этом многократно затраты времени, финансовых и материальных средств благодаря замещению многих реальных проектных работ виртуальными проектными процессами. Именно феномен замещения физической реальности виртуальной реальностью представляет наибольший интерес для развития этого перспективного направления информационной технологии.

Можно привести много других примеров, когда виртуальные модели успешно замещают физические системы. Так, виртуальная клавиатура, применяемая сегодня во всех современных мобильных телефонах и планшетных компьютерах, делает ненужной обычную громоздкую клавиатуру. Благодаря сенсорному экрану программно-реализованная модель виртуальной клавиатуры замещает полностью все основные функции своего электромеханического аналога, обладая при этом превосходящей надежностью и удобством применения в условиях малогабаритной техники.

Все современные промышленные роботы снабжены виртуальными системами обучения траекторным движениям, т. е. разработка траекторий ведется не на физическом роботе, как это практиковалось раньше, а на его полноценной 3-х мерной графической модели, что ускоряет процесс обучения, повышает надежность формирования траекторий, упрощает процесс взаимодействия оператора с роботом, позволяет загружать робот только производственными операциями без остановок физического оборудования на время обучения.

Процесс создания компьютеров и коммуникационно-сетевой технологии является наиболее ярким примером тотального применения виртуализации на всех этапах разработки, начиная от микрочипов, чипсетов, печатных плат и заканчивая сложными комплексами вычислительного оборудования. В системах проектирования сохраняются все предыдущие виртуальные модели ЭВМ вместе с моделями глубокого тестирования и отладки проектируемых устройств. В результате виртуализация обеспечивает очень быстрый прогресс в переходе к новым поколениям компьютерной техники.

В более специализированной интерпретации виртуализация рассматривается как программная или аппаратно-программная технология разделения физических ресурсов ЭВМ или серверов на виртуальные ресурсы, называемые виртуальными машинами. Благодаря виртуальным машинам большое число пользователей может одновременно работать со многими виртуальными серверами как со своим индивидуальным физическим ресурсом, несмотря на то что реально физический ресурс может быть предоставлен со стороны всего лишь одной ЭВМ. Конечно, в практических задачах такое преимущество виртуализации связано с использованием большого числа как физических, так и вир-

туальных серверов. Виртуализация физических ресурсов ЭВМ подняла на более высокий уровень многозадачный режим компьютерных вычислений и открыла новые горизонты для массивной параллельной обработки информации.

1.1. Транспозиционные и репликационные виртуальные модели.

Термин «модель» происходит от латинского слова *modus*, которое означает уменьшение или упрощение оригинального состояния, понимаемое как редукция исходных свойств объектов или процессов. То есть модель в смысле этого определения является грубым редуцированным приближением физического объекта. Современная наука и практика располагают несколькими видами моделей — физическими, математическими, виртуальными.

Физические модели могут не отличаться от имитируемых физических объектов и часто сохраняют полностью исходные свойства. Физические модели широко используются в научных экспериментах, макетировании, прототипировании.

Математические модели строятся с помощью математических уравнений и формул, поэтому они сохраняют только те свойства физических объектов, которые описаны математическими зависимостями. Принцип редукции применим к математическим моделям в наибольшей степени.

Виртуальные модели — это прежде всего компьютерные модели (хотя возможны и не компьютерные виртуальные модели, например воображаемые модели, которыми постоянно оперирует мозг человека, эти модели не имеют никакого отношения к компьютерам), и в традиционной трактовке их относят к программно реализованным математическим моделям. Например, 3-мерные графические виртуальные модели программно реализуют математические зависимости, определяемые пространственной евклидовой геометрией. В отличие от математических и физических моделей, виртуальные модели могут не только имитировать физическую реальность, но и способны воспроизводить такие явления, которые невозможно увидеть или ощутить в реальных процессах. Так, процесс распространения тепла в материале конструкции нельзя увидеть при работе физического устройства, но виртуальная модель легко визуализирует этот процесс, отображая разными цветами нагретые и холодные слои материала.

В отличие от традиционного подхода к виртуальным моделям, по существу, как к математическим моделям, авторами развивается подход, который ставит виртуальные компьютерные модели в промежуточное положение между математическими моделями и моделируемыми физическими объектами. Это позволяет рассматривать виртуальную модель одновременно как математическую и как физическую, реализуемую с помощью физического устройства — компьютера, который,

в свою очередь, функционирует полностью в соответствии с основными физическими законами. При таком подходе к ключевым критериям математических моделей — адекватности и грубости — добавляется новое фундаментальное свойство виртуальных моделей — способность к *частичному, полному или превосходящему замещению* физической реальности компьютерными моделями. Заметим, что математическая модель всегда считается приближенной копией физического объекта, а степень приближения определяется ее точностью и адекватностью, кроме того, выходом математической модели являются также формулы и результаты их вычислений или преобразованные уравнения, поэтому вопрос о замещении физического объекта математической моделью обычно даже не ставится. Виртуальные компьютерные модели допускают такую постановку. Особенно интересным и нетривиальным свойством является способность виртуальных моделей к превосходящему замещению физических объектов. Это означает, что совокупность свойств виртуальной модели может быть богаче свойств имитируемой физической реальности. Эффект замещения становится возможным благодаря симбиозу виртуальной и физической реальности, который возникает в компьютере. По существу, компьютерная реализация даже абстрактных положений — это одна из разновидностей физической реальности. В подтверждение можно сказать, что компьютер, так же как и любое физическое устройство, «не пропускает» ошибки, допущенные в математическом или программном описании физического объекта, и правильно реагирует на эти ошибки в соответствии с физической сущностью своей архитектуры, являясь активным средством верификации теоретических и алгоритмических предположений о свойствах физической реальности. Во времена математических моделей на бумаге об автоматизации процесса верификации моделей нельзя было даже мечтать. Сегодня это обыденная реальность для компьютерных моделей.

Таким образом, виртуальное моделирование может не только имитировать, но и замещать физическую реальность, поэтому виртуальные компьютерные модели можно разделить на два больших класса — *репликационные* и *транспозиционные* виртуальные модели.

Репликационные виртуальные модели — это модели, которые имитируют физическую реальность, но при этом они не предназначены для замещения физических объектов или процессов. В этом смысле репликационные виртуальные модели мало чем отличаются от аналитических или имитационных моделей, решаемых на компьютере.

Транспозиционные виртуальные модели — это компьютерные модели, которые не только имитируют физическую реальность, но и могут реализовать частичное, полное или превосходящее замещение физических объектов и процессов. Характерной особенностью процесса транспозиции как процесса замещения физического объекта компьютерной

моделью является преобразование одного вида физической реальности в другой, а не простая замена одного физического объекта другим.

Исследование фундаментальных свойств виртуальных компьютерных моделей становится все более актуальным на современном этапе развития компьютерной и информационной технологии, когда наступила эра широкой компьютеризации физических объектов, процессов, систем и мир встроенных систем начал покрывать почти всю традиционную технику. При этом транспозиционное виртуальное моделирование вышло за рамки только задач анализа таких физических сущностей, помогая по новому ставить и решать задачи синтеза, а следовательно, способствуя эффективному созданию более совершенных технологий и продукции.

1.2. Фундаментальные свойства виртуальных компьютерных моделей. Вслед за быстрым развитием технологии и техники исследователям приходится рассматривать поведение все более сложных технических объектов и систем. При этом создаются и все более сложные математические модели процессов проектирования, разработки и эксплуатации таких объектов. Компьютерная реализация сложных математических моделей часто наталкивается на ограниченную производительность компьютера и требует использования вычислительных ресурсов, превышающих возможности выбранной компьютерной системы. В таких случаях приходится пользоваться методами редукции моделей, т.е. приведением математических или виртуальных моделей к более простому виду. Например, в процессе проектирования суть редукции состоит в том, что для проектируемой системы подбираются наиболее близкие в некотором смысле прототипы или аналоги, для которых известны решения задачи проектирования. Результаты, полученные для прототипов, переносятся на проектируемую систему и затем корректируются в процессе моделирования. Таким образом, прототипы служат источником вариантов построения проектируемой системы. Как правило, прототип основан на более простой или уже известной математической модели, для которой удастся получить приемлемое конструктивное решение.

Среди многочисленных подходов к проблеме редукции можно выделить две основные группы используемых методов.

Первую группу составляют так называемые методы моделей первого приближения. Общая постановка задачи для методов приближения такова: исследуемая сложная модель заменяется более простой моделью первого приближения, для которой предполагаются известными основные свойства ее решений (устойчивость, асимптотическая устойчивость, ограниченность, внешняя устойчивость ядра максимальных элементов и т.д.), а исходная модель рассматривается как возмущенная. При определенном сочетании свойств модели первого приближения

и возмущений удастся сделать заключение о качественном поведении решений возмущенной модели и количественных соотношениях между некоторыми важными характеристиками обеих моделей. Методы и модели первой группы будем в дальнейшем называть грубыми. В этой группе авторами исследуются следующие методы.

1. Из общей теории проектирования сложных технических систем:

- модели выбора максимальных (оптимальных, лучших) вариантов проектируемой системы на основе аппроксимации бинарных отношений сравнительной эффективности вариантов и аппроксимации функций выбора [1–6];

- модели анализа влияния возмущений принципов оптимальности на устойчивость получаемых решений [7];

2. Из общей теории синтеза динамических моделей сложных технических систем:

- методы анализа устойчивости (асимптотической устойчивости, неустойчивости) решений квазилинейных динамических дифференциальных моделей по устойчивости систем их первого приближения для случаев, когда эти системы являются либо стационарными, либо периодическими, либо правильными, либо системами с медленно меняющимися коэффициентами [8–11];

- методы построения дифференциальных моделей сравнения для исследования устойчивости нелинейных динамических систем на базе аппарата теории дифференциальных неравенств и векторных функций Ляпунова [12–14];

- методы проектирования динамических систем по прототипу на основе принципа усреднения Крылова–Боголюбова и его обобщений [15–17].

Вторую группу образуют методы редукции, основанные на сопоставлении исходной модели и эквивалентной ей в некотором смысле (изоморфной, гомоморфной) более простой модели, полученной из исходной в результате определенного преобразования (морфизма). Важно, что при таких преобразованиях сохраняются интересующие исследователя свойства исходных моделей. Формальное определение подобной редукции, которое подходит практически для любой математической теории, можно сделать в рамках теории категорий или теории структур Бурбаки [18, 19]. Например, в категории линейных пространств морфизмами являются линейные отображения; в категории групп и алгебраических моделей — гомоморфизмы; в категории линейных динамических дифференциальных систем — ляпуновские и обобщенно ляпуновские преобразования.

Важный класс морфизмов составляют гомоморфизмы. В теории проектирования обычно гомоморфизм трактуется как направленное упрощение, обеспечивающее получение нового объекта, в известном

смысле «подобного» исходному. Проецирование, сохранение отдельных структурных свойств отношений между элементами структуры при стирании в процессе исследования других свойств и отношений — все это преобразования, имеющие характер гомоморфизма. Заметим, что редукция сложной модели проектирования к гомоморфной ей модели целесообразна тогда, когда последняя имеет более простой вид или существует компьютерно-ориентированный алгоритм ее решения. Так, например, нелинейная дифференциальная система может быть гомоморфна линейной; линейная нестационарная дифференциальная система может иметь характеристические свойства, аналогичные свойствам линейных стационарных динамических систем. В этих случаях нелинейность и нестационарность не являются определяющими свойствами и стираются при переходе к гомоморфным линейной и линейной стационарной дифференциальным системам, соответственно. Сохранение существенных свойств при гомоморфизмах позволяет решить требуемую задачу сначала для упрощенной виртуальной модели, а затем перенести полученное решение на исходную систему с помощью морфизма. Вторая группа методов редукции исследуется авторами в следующих направлениях.

1. В общей теории проектирования сложных технических систем:

- создание методов декомпозиции сложных задач выбора максимальных вариантов проектируемых систем на основе общей схемы последовательного анализа и отбраковки вариантов;

- разработка математических методов исследования процессов проектирования по известному прототипу на базе алгоритмов теории аппроксимации множеств выбора и гомоморфизмов оптимизационных решающих процессов [24, 25].

2. В теории проектирования динамических систем:

- исследование свойств линейных нестационарных систем, приводимых ляпуновскими преобразованиями к системам с постоянными коэффициентами [26–28];

- нахождение алгебраических и геометрических критериев грубой диагонализированности, декомпозируемости, устойчивости спектра характеристических показателей Ляпунова с помощью ляпуновских морфизмов [29, 30].

Результаты, полученные авторами в названных выше направлениях, связаны с нахождением необходимых и достаточных условий для редукции исходных моделей физических систем до гомоморфных им виртуальных моделей.

1.3. Особенности процесса виртуализации. В настоящей главе книги представлены математические методы теории виртуализации, позволяющие обосновать применимость в широком смысле виртуальных моделей и их работоспособность. Чаще всего процесс виртуа-

лизации начинается с попыток воспроизведения реальных ситуаций в форме компьютерной модели, представленной программным кодом и соответствующими графическими либо мультимедийными образами. Далее возникает принципиальный вопрос: будет ли виртуальная модель использоваться только для анализа и отображения исследуемой реальности или решение поставленной задачи можно передать компьютерной модели, заменив в определенной степени решение, получаемой с помощью физических устройств или процессов? От ответа на этот вопрос зависит, насколько полно виртуальная модель может быть вписана в реальную ситуацию. Для этого придется исследовать фундаментальное свойство замещаемости физической реальности виртуальными моделями.

Однако, доказав возможность замещения физической сущности виртуальной моделью, все еще нельзя гарантировать, что при изменении условий функционирования виртуальная модель будет сохранять свои определяющие фундаментальные свойства. Тогда придется исследовать другое фундаментальное свойство, обеспечивающее грубость наиболее важных выбранных свойств виртуальной модели при вариации параметров и условий задачи.

Вместе с тем, получив достаточно грубое, например, устойчивое решение для широкого диапазона изменения параметров, нельзя учесть всевозможные нюансы физической реальности, поскольку любая модель описывает реальную ситуацию лишь приближенно. Отсюда возникает необходимость исследовать еще одно важное фундаментальное свойство, обеспечивающее адекватность виртуальной модели моделируемой физической реальности. Под адекватностью понимается не только правильное качественное описание физического объекта, или количественное представление объекта с разумной точностью, но, в первую очередь, адекватность виртуальной модели определяется полнотой заложенного в нее предыдущего опыта физических или натурных экспериментов, проведенных на прототипах устройств, систем или процессов.

Таким образом, представленная математическая теория виртуализации оперирует важнейшими фундаментальными свойствами, присущими всем виртуальным моделям, — замещаемостью, грубостью и адекватностью. При этом свойство замещаемости, прежде всего, характерно для транспозиционных виртуальных моделей. Остальные свойства имеют отношение как к транспозиционным, так и репликационным виртуальным моделям. Значительное внимание в математической теории виртуализации уделено динамическим системам и моделям, описываемым дифференциальными уравнениями, поскольку очень часто виртуальные модели воспроизводят динамические объекты и процессы, функционирующие по законам физической реальности.

2. Транспозиционные динамические виртуальные модели и их замещаемость

2.1. Транспозиционные модели из класса линейных динамических дифференциальных систем. В данном разделе мы будем рассматривать модели из класса линейных динамических систем вида

$$\dot{x} = A(t) \cdot x \quad (t \geq 0), \quad (1.1)$$

где

$$x = \text{col}(x^{(1)}, \dots, x^{(n)}) \equiv \begin{pmatrix} x^{(1)} \\ \vdots \\ x^{(n)} \end{pmatrix}$$

— n -мерный вектор-столбец с вещественными координатами;

$$A(t) \equiv \begin{pmatrix} a_{11}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{pmatrix}$$

— квадратная матричная функция размеров $n \times n$ с вещественными элементами, непрерывная и ограниченная при $t \geq 0$.

Напомним (см., например, [31–32]), что непрерывно дифференцируемая при $t \geq 0$ квадратная матрица $L(t)$ называется матрицей Ляпунова, если выполнены следующие условия:

- 1) матрицы $L(t)$, $\dot{L}(t) \equiv \frac{dL(t)}{dt}$ ограничены при $t \geq 0$:

$$\sup_{t \geq 0} \|L(t)\| < +\infty, \quad \sup_{t \geq 0} \|\dot{L}(t)\| < +\infty;$$

- 2) $|\det L(t)| \geq c > 0$ при $t \geq 0$ ($\det L(t)$ — определитель матрицы-функции $L(t)$).

Заметим, что, как установлено в [31], матрица $L^{-1}(t)$, обратная матрице Ляпунова $L(t)$, есть также матрица Ляпунова.

Определение 1. Линейное преобразование координат

$$y = L(t)x \quad (1.2)$$

с $(n \times n)$ -матрицей Ляпунова $L(t)$ называется преобразованием Ляпунова.

Для преобразований Ляпунова вида (1.2) справедливы следующие утверждения [31, 32].

1. При преобразовании Ляпунова (1.2), произведенном над линейной системой вида (1.1), сохраняется свойство ограниченности (неограниченности) ее решений.

2. Преобразования Ляпунова типа (1.2), сохраняют характеристические показатели Ляпунова ее решений $x(t)$ (напомним, что характеристическим показателем Ляпунова решения $x(t)$ системы (1.1) называется число λ , определяемое формулой

$$\lambda(x(t)) = \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln |x(t)|$$

(характеристический показатель λ оценивает рост (убывание) решения $x(t)$).

Определение 2. Линейная дифференциальная система (1.1) называется приводимой, если с помощью некоторого ляпуновского преобразования она может быть преобразована в линейную систему с постоянными коэффициентами

$$\dot{y} = By \quad (t \geq 0),$$

где B — постоянная $(n \times n)$ -матрица с вещественными элементами.

Имеет место следующая теорема Н. П. Еругина [31–32].

Теорема 1. *Линейная дифференциальная система вида (1.1) является приводимой (в смысле определения 2) тогда и только тогда, когда некоторая ее фундаментальная матрица $X(t)$ может быть представлена в следующем виде:*

$$X(t) = L(t) \cdot e^{t \cdot B},$$

где $L(t)$ — матрица Ляпунова, B — постоянная $(n \times n)$ -матрица.

Теорема 1 показывает, что изучение многих важных характеристических свойств решений нестационарной приводимой системы (1.1) может быть сведено к изучению соответствующих свойств решений линейных дифференциальных систем с постоянными коэффициентами, для анализа которых имеются хорошо разработанные различные программно-алгоритмические вычислительные пакеты и комплексы.

Определение 3. Линейная система (1.1) называется приводимой к системе с нулевой матрицей коэффициентов, если существует ляпуновское преобразование

$$x = M(t) \cdot z,$$

преобразующее ее в систему вида

$$\dot{y} = O_n \cdot y = 0, \tag{1.3}$$

где $O_n \equiv \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$ — нулевая n -мерная квадратная матрица.

Справедливо следующее утверждение, дающее достаточные условия приводимости системы вида (1.1) к системе (1.3) [31–33].

Теорема 2. Если матрица системы (1.1) $A(t)$ абсолютно интегрируема, т. е.

$$\int_0^{\infty} \|A(u)\| du = a < \infty, \quad (1.4)$$

то эта система приводима к системе с нулевой матрицей коэффициентов.

Теорема 2 показывает, что при выполнении соотношения (1.4) линейная дифференциальная система вида (1.1) может быть приведена ляпуновским преобразованием к системе типа (1.3), имеющей значительно более простую структуру, чем исходная система (1.1).

Определение 4. Дифференциальные системы

$$\dot{x} = f(t, x); \quad \dot{y} = g(t, y)$$

называются асимптотически эквивалентными, если между их решениями $x(t)$, $y(t)$ можно установить взаимно однозначное соответствие, такое что

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} [x(t) - y(t)] = 0.$$

Для линейных дифференциальных систем имеет место следующее утверждение об их асимптотической эквивалентности [32, 34].

Теорема 3. Пусть решения стационарной системы

$$\dot{v} = A \cdot v, \quad (1.5)$$

где A — постоянная $(n \times n)$ -матрица с вещественными элементами, являются ограниченными при $t \geq 0$.

Тогда система

$$\dot{w} = (A + B(t))w, \quad (1.6)$$

где $B(t)$ — непрерывная, абсолютно интегрируемая при $t \geq 0$ матрица-функция:

$$\int_0^{\infty} \|B(u)\| du < \infty,$$

асимптотически эквивалентна системе (1.5).

Теорема 3 позволяет сводить исследование асимптотических свойств решений почти линейной возмущенной системы (1.6) к изучению соответствующих асимптотических свойств решений ее стационарной части (1.5).

В частности, прямым следствием теоремы 3 является следующее утверждение об асимптотическом поведении решений возмущенной системы (1.6).

Теорема 4 [32, 33]. Пусть задана линейная нестационарная система вида (1.6)

$$\dot{z} = C(t) \cdot z \quad (t \geq 0),$$

где $C(t)$ — непрерывная, абсолютно интегрируемая на неотрицательной полуоси времени матричная функция. Тогда для каждого решения $z(t)$ существует предел

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} z(t) = b.$$

Другими словами, все интегральные кривые $z = z(t)$ имеют горизонтальные асимптоты, причем различные интегральные кривые $z = z_1(t)$; $z = z_2(t)$ имеют различные горизонтальные асимптоты $z = b_1$; $z = b_2$ и, сверх того, для каждой горизонтальной прямой $z = b$ существует интегральная кривая $z = z(t)$, имеющая эту прямую своей асимптотой.

Отметим, что аналог теоремы 3 имеет место и для линейных систем с периодическими коэффициентами, а именно имеет место следующая теорема.

Теорема 5 [35]. Пусть задана линейная система

$$\dot{z} = A_p(t)z \tag{1.7}$$

с периодической непрерывной матрицей коэффициентов $A_p(t)$:

$$A_p(t + \omega) \equiv A_p(t) \quad (t \geq 0, \omega > 0).$$

Если все решения системы (1.7) ограничены, то в предположениях, что

- а) матрица непрерывна при $t \geq 0$;
- б) матрица $D(t)$ абсолютно интегрируема при $t \geq 0$,

$$\int_0^{\infty} \|D(u)\| du < 0,$$

все решения $f(t)$ линейной системы

$$\dot{f} = (A_p(t) + D(t))f \quad (t \geq 0) \tag{1.8}$$

также ограничены при $t \geq 0$.

Если в тех же предположениях все решения системы (1.7) стремятся к нулю при $t \rightarrow +\infty$, то это же имеет место и для всех решений линейной возмущенной системы (1.8).

Заметим, что в общем случае линейной нестационарной системы вида (1.1) аналоги теорем 3, 5 уже не имеют места, а именно верна следующая теорема.

Теорема 6 [33, 35]. *Существуют дифференциальная система типа (1.1), все решения которой стремятся к нулю при $t \rightarrow +\infty$, матрица $E(t)$, удовлетворяющая условиям*

$$\|E(t)\| \rightarrow 0; \quad \int_0^{\infty} \|E(u)\| du < \infty,$$

такие что линейная дифференциальная система

$$\dot{h} = (A(t) + E(t)) \cdot h \quad (t \geq 0)$$

обладает неограниченными решениями.

В заключение данного раздела рассмотрим следующую линейную дифференциальную систему с полиномиальными коэффициентами:

$$\dot{r} = R(t) \cdot r \quad (r \in \mathbb{R}^n, t \geq 0),$$

$$R(t) \equiv R_0 t^m + R_1 t^{m-1} + \dots + R_m,$$

R_k — постоянные вещественные $(n \times n)$ -матрицы.

Теорема 7 [32, 35]. *Линейная система $\dot{r} = R(t) \cdot r$ с полиномиальными коэффициентами асимптотически устойчива, если все корни характеристического уравнения матрицы R_0*

$$\det(R_0 - \lambda E) = 0$$

имеют отрицательные вещественные части: $\operatorname{Re} \lambda_j < 0$, $j = 1, \dots, n$.

Отметим, что теорема 7 дает достаточные условия асимптотической устойчивости линейной системы с полиномиальными коэффициентами. С помощью этого достаточного признака проверка асимптотической устойчивости решений линейных дифференциальных систем данного типа сводится к проверке отрицательности вещественных частей собственных значений $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ матрицы R_0 , являющейся матричным коэффициентом при старшем члене t^m матричного полинома $R(t)$:

$$R(t) = R_0 t^m + R_1 t^{m-1} + \dots + R_m \quad (m \geq 1, t \geq 0).$$

2.2.1. Основные свойства линейных периодических систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Основным объектом исследования в данном разделе является следующая линейная динамическая система:

$$\dot{x} = A(t) \cdot x \quad (x \in \mathbb{R}^n, t \geq 0), \quad (1.9)$$

$\mathbb{R}^n$ — вещественное евклидово пространство размерности $n \geq 2$ с непрерывной (или кусочно-непрерывной) ω -периодической матрицей коэффициентов правой части:

$$A(t + \omega) \equiv A(t) \quad (\omega > 0). \quad (1.10)$$

Периодическая линейная дифференциальная система вида (1.9), (1.10) обладает следующими базовыми свойствами [36, 37]:

1) для системы типа (1.9), (1.10) нормированная при $t = 0$ фундаментальная матрица решений (матрицант) $X(t)$ имеет следующий вид:

$$X(t) = K(t)e^{M \cdot t}, \quad (1.11)$$

где $K(t)$ — класса C^1 (или кусочно-гладкая) ω -периодическая, неособенная матрица, причем $K(0) = E_n$ (где E_n — единичная $(n \times n)$ -матрица); M — постоянная матрица размерности n ;

2) матрица $X(t)$ удовлетворяет при любом $t \geq 0$ соотношению

$$X(t + \omega) = X(t) \cdot X(\omega), \quad (1.12)$$

где $X(\omega)$ — неособенная матрица ($\det X(\omega) \neq 0$).

Матрица $X(\omega)$ из (1.12) носит название матрицы монодромии линейной периодической системы (1.9), (1.10), а ее собственные значения $\rho_1, \dots, \rho_n$, т. е. корни векового уравнения

$$\det(X(\omega) - \rho E_n) = 0,$$

называются ее мультипликаторами.

Для мультипликаторов $\rho_1, \dots, \rho_n$, выполнены следующие утверждения [36, 37].

1'. Сумма мультипликаторов $\sum_{j=1}^n \rho_j$ равна следу $S_p X(\omega)$ матрицы монодромии $X(\omega)$.

2'. Произведение мультипликаторов $\prod_{j=1}^n \rho_j$ вычисляется по формуле

$$\prod_{j=1}^n \rho_j = \det X(\omega) = e^{\int_0^\omega S_p A(\tau) \cdot d\tau}.$$

3'. Для всякого мультипликатора $\rho_j (j \in \{1, \dots, n\})$ существует нетривиальное решение $x(t)$ периодической системы (1.9), (1.10), для которого

$$x(t + \omega) = \rho_j x(t). \quad (1.13)$$

Обратно, если для некоторого решения $x(t) \neq 0$ выполнено соотношение (1.13), то число ρ_j является мультипликатором данной периодической системы вида (1.9), (1.10).

4'. Линейная периодическая система (1.9), (1.10) имеет нетривиальное решение периода $\omega > 0$ тогда и только тогда, когда по меньшей мере один из ее мультипликаторов ρ равен единице:

$$\rho = 1.$$

5'. Если мультипликатор ρ системы (1), (2) равен

$$\rho = e^{\pi p i / q},$$

где p, q — целые числа; $q \geq 1$; i — мнимая единица; $i^2 = -1$, то система вида (1.9), (1.10) имеет периодическое решение с периодом $T = 2q\omega$.

Прямым следствием утверждений 4', 5' является следующее предложение.

Теорема 8. 1. *Условие 4' замещает для линейной системы типа (1.9), (1.10) свойство наличия ω -периодического решения.*

2. Условие 5' замещает для линейной системы (1.9), (1.10) свойство наличия $2q\omega$ -периодического решения ($q \geq 1$ — целое число).

2.2.2. Приводимость и устойчивость линейных дифференциальных систем с периодическими коэффициентами. Как и в разд. I.2, мы будем рассматривать линейную дифференциальную систему

$$\dot{y} = B(t) \cdot y \quad (y \in \mathbb{R}^n, t \geq 0) \quad (1.14)$$

с непрерывной ω -периодической матрицей коэффициентов $B(t)$ в правой части:

$$B(t + \omega) \equiv B(t) \quad (t \geq 0).$$

Напомним (см., например, [38]), что линейная система вида (1.14) называется приводимой к системе

$$\dot{z} = B \cdot z \quad (z \in \mathbb{R}^n, t \geq 0), \quad (1.15)$$

где B — постоянная $(n \times n)$ -матрица, если существует ляпуновский морфизм

$$z = L(t)y$$

($L(t)$ имеет непрерывную производную $\dot{L}(t)$, невырождена и

$$\sup_{t \geq 0} (\|L(t)\| + \|L^{-1}(t)\| + \|\dot{L}(t)\|) < +\infty),$$

переводящий систему (1.14) в систему (1.15).

Для периодических систем вида (1.14) имеет место следующая теорема [37, 39].

Теорема 9. 1. *Всякая линейная периодическая система типа (1.14) приводима к системе с постоянными (необязательно вещественными) коэффициентами с помощью ω -периодического преобразования Ляпунова.*

2. Всякая вещественная линейная периодическая система (1.14) приводится 2ω -периодическим вещественным преобразованием Ляпунова к линейной системе с постоянными вещественными коэффициентами.

3. Для того чтобы вещественная линейная ω -периодическая система вида (1.14) приводилась с помощью вещественного ω -периодического преобразования Ляпунова к линейной дифференциальной системе со стационарными вещественными коэффициентам, необходимо и достаточно, чтобы ее матрица монодромии $Y(\omega)$, где $Y(t)$ — нормированная при $t = 0$ фундаментальная матрица решений системы (1.14): $Y(0) = E_n$, либо совсем не имела элементарных делителей, соответствующих отрицательным собственным числам, либо каждый такой элементарный делитель повторялся четное число раз.

Прямым следствием утверждения 3 теоремы 9 является следующее предложение.

Теорема 10. *Условия утверждения 3 теоремы 2 замещают свойство ω -приводимости линейной ω -периодической дифференциальной системы типа (1.14).*

Для линейной ω -периодической системы вида (1.14) имеют место следующие критерии устойчивости и асимптотической устойчивости [39, 40].

Теорема 11. 1. *Линейная однородная ω -периодическая система типа (1.14) устойчива тогда и только тогда, когда все ее мультипликаторы ρ_j , $j = 1, \dots, n$, расположены внутри замкнутого единичного круга $|\rho| \leq 1$, а мультипликаторы, лежащие на единичной окружности, имеют простые элементарные делители, если их рассматривать как собственные значения соответствующей матрицы монодромии системы (1.14).*

2. *Для асимптотической устойчивости периодической системы (1.14) необходимо и достаточно, чтобы все ее мультипликаторы находились внутри единичного круга $|\rho| < 1$.*

3. Пусть для системы (1.14) выполнены условия

$$\varphi \equiv \left\| E_n + \int_0^{\omega} A(\tau) d\tau \right\| < 1;$$

$$\psi \equiv \int_0^{\omega} \|A(\tau)\| d\tau < \sqrt{1 - \varphi}.$$

Тогда система (1.14) асимптотически устойчива.

Из теоремы 11 вытекают следующие следствия, содержащиеся в теореме 12.

Теорема 12. 1. *Условия утверждения 1 теоремы 4 замещают для линейной ω -периодической системы вида (1.14) свойство устойчивости по Ляпунову.*