И. И. Баврин

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОБРАБОТКА ИНФОРМАЦИИ

Прометей

УДК 51
ББК 22.1я73
Б 135

Баврин И. И.
Б 135 **Математическая обработка информации:** Учебник для студентов всех профилей направления «Педагогическое образование». — М.: Прометей, 2016. — 262 с.
ISBN 978-5-9908018-9-9

Учебник содержит изложение математического аппарата обработки информации, сопровождаемое иллюстрациями из психологии, педагогики, экологии и школьных дисциплин.

Для студентов (бакалавров), специализирующихся в области педагогической науки. Может быть использован студентами других вузов.

ISBN 978-5-9908018-9-9

Содержание

ГЛАВА 1.
МНОЖЕСТВА

§ 1.1. МНОЖЕСТВА И ОПЕРАЦИИ НАД НИМИ

1. Основные понятия. *Множество* — это совокупность, собрание каких-либо объектов, объединенных общим признаком или свойством (эту фразу нельзя рассматривать как определение понятия «множество», так как в ней слово «множество» заменено столь же неопределенным термином «совокупность»). Объекты, которые образуют множество, называются *элементами* (или *членами)* этого множества. Примерами множеств могут служить: множество всех страниц данной книги (каждая страница является элементом этого множества); множество всех действительных чисел, больших 0 и меньших 1; множество больных в некоторой больнице; множество всех операций (работ) по сборке компьютера.

Множества будем обозначать большими латинскими буквами A, B, C, ..., X, Y, ..., а их элементы — малыми буквами a, b, c, ..., x, y, ...

Если элемент a является элементом множества A, то пишут $a \in A$ (читается «a принадлежит A», или «a из A»), В этом случае говорят также, что «a содержится в A», «a входит в A» и т. п.

Если a не является элементом множества A, то будем писать $a \overline{\in} A$ («a не принадлежит A» или «a не содержится в A» и т. п.). Если элементами множества являются числа, то оно называется *числовым.*

Многие из числовых множеств имеют специальные названия и обозначения.

Множество действительных чисел x, удовлетворяющих неравенствам $a \le x \le b$ ($a < x < b$), называется *сегментом* или *отрезком (интервалом)* и обозначается $[a; b]$ ($(a; b)$).

Полусегментом $[a; b)$ ($(a; b]$) называют множество действительных чисел x, удовлетворяющих неравенствам $a \le x < b$ ($a < x \le b$). Множества действительных чисел x, удовлетворяющих условию $x < a$ ($x \le a$) или $x > b$ ($x \ge b$), обозначаются соответственно $(-\infty; a)$ ($(-\infty; a]$) или $(b; +\infty)$ ($[b; +\infty)$). Множество всех действительных чисел обозначается символом $(-\infty, +\infty)$, или $|x| < +\infty$, или R. Множество всех целых положительных чисел называют *натуральным рядом* (или множеством натуральных чисел) и обозначают N.

Если множество содержит лишь конечное число элементов, то оно называется *конечным.* В противном случае множество называется *бесконечным.*

Например, множество листьев на дереве или множество слушателей в данной аудитории — конечные множества; множества же N, R, $[a; b]$, $(a; b]$, $[a; b)$, $(a; b)$ (при $a \neq b$) — бесконечные множества.

Существуют различные формы задания множества. Наиболее простая состоит в указании всех элементов множества. Так, запись $A = \{1, 2, 3\}$ означает, что множество A состоит из трех элементов: 1, 2 и 3. Если число элементов бесконечно, то используется многоточие. Например, множество всех натуральных чисел записывается так: $N = \{1, 2, 3, ...\}$. Иной способ задания множества состоит в описании элементов определяющим свойством $P(x)$ (формой от x), общим для всех элементов $A = \{x: P(x)\}$. Например, $A = \{x: x = 2k, k \in N\}$ означает, что множество A состоит из четных положительных целых чисел 2, 4, 6, ... Аналогично $B = \{x: 0 < x < 10$ и x — четное$\}$ означает, что B состоит из 2, 4, 6, 8; $C = \{x: x$ — пациент определенной больницы$\}$ означает, что C состоит из пациентов этой больницы.

Если множества A и B состоят из одних и тех же элементов, т. е. если каждый элемент множества A является элементом множества B и, наоборот, каждый элемент множества B является элементом множества A, то множества A и B *равны* (*тождественны, совпадают*). Если множества A и B равны, то пишут $A = B$. Например, $\{1, 2\} = \{2, 1\}$. Равны также и множества

$$A_1 = \{x: 1 < x < 4, x \text{ — целое}\}$$

и

$$A_2 = \{x: x^2 - 5x + 6 = 0\}.$$

Элементы обоих множеств — это целые числа 2 и 3.

Пусть теперь имеются два множества A и B, относительно которых известно только, что каждый элемент множества B является элементом множества A. В этом случае говорят, что B есть *подмножество* A и пишут $B \subset A$ ($\subset$ — *знак включения*). Говорят еще, что «A содержит B» или «B включено в A». В частности, B может совпадать с A.

Пример 1. Множество четных чисел есть подмножество множества целых чисел.

Пример 2. Пусть $A = \{x: x$ — вид животных$\}$, $B = \{x: b$ — вид млекопитающих$\}$. Тогда $B \subset A$.

Теорема 1. Если $B \subset A$ и $A \subset B$, то $A = B$.

Доказательство. Из $B \subset A$ следует, что любой элемент из B является элементом множества A, а из $A \subset B$ — что любой элемент из A является элементом множества B, т. е. множества A и B состоят из одних и тех же элементов и, значит, $A = B$.

Обычно приходится рассматривать множества A, B, C и т.д., которые являются подмножествами некоторого достаточно обширного множества, рамки которого определяются целями исследования.

Такое исходное множество называется *универсальным* и обозначается через U. Если изучаются всевозможные числовые множества, то универсальным будет множество всех действительных чисел.

Множество, не содержащее ни одного элемента, называется *пустым*. Его обозначают $\varnothing$. Примерами пустого множества могут служить: множество людей на Солнце, множество действительных корней уравнения $x^2 + 1 = 0$.

Теорема 2. *Пустое множество является подмножеством любого множества A.*

Доказательство. Из определения подмножества следует, что B является подмножеством A, если B не содержит элементов, не являющихся элементами A. Но пустое множество не содержит ни одного элемента, поэтому оно не содержит и элементов, не принадлежащих A. Отсюда следует, что пустое множество есть подмножество любого множества A.

Подмножества некоторого множества, отличные от него самого и от $\varnothing$, называются *собственными*.

2. Операции над множествами. Пусть даны два множества A и B.

Определение 1. *Объединением* (или *суммой*) этих множеств называется множество C, состоящее из всех тех элементов, которые принадлежат хотя бы одному из множеств A или B.

Обозначение: $C = A \cup B$ (или $C = A + B$). Знак $\cup$ называется *знаком объединения.*

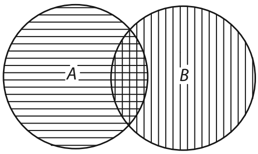


Рис 1.

На рис. 1 изображены два множества точек плоскости — круг A и круг B. Их объединение — это область, покрытая или горизонтальной, или вертикальной штриховкой.

Пример 1. $\{1, 2, 3\} \cup \{2, 3, 4\} = \{1, 2, 3, 4\}$.

Пример 2. Определим A как множество курящих мужчин в какой-либо популяции, а B — как множество отцов в этой популяции. Тогда множество $A \cup B$ есть множество всех мужчин в популяции, которые являются либо курильщиками, либо отцами, либо курильщиками и отцами одновременно.

Заметим, что $A \cup A = A$. В общем случае $A \subset (A \cup B)$; так же и $B \subset (A \cup B)$.

Определение 2. *Пересечением* (или *произведением*) множеств A и B называется множество С, состоящее из всех тех элементов, которые принадлежат и множеству A, и множеству B.

Обозначается: $C = A \cap B$ (или $C = AB$). Знак $\cap$ называется *знаком пересечения.*

На рис. 1 пересечение множеств A и B — это область, покрытая и горизонтальной, и вертикальной штриховкой.

Пример 3. $\{1, 2, 3\} \cap \{2, 3, 4\} = \{2, 3\}$.

В условиях примера 2 множество $A \cap B$ есть множество всех мужчин в популяции, которые и курят, и являются отцами одновременно.

Заметим, что $A \cap A = A$. В общем случае $(A \cap B) \subset A$ и $(A \cap B) \subset B$.

Для некоторой пары множеств может оказаться, что их пересечение — пустое множество. Так, например, $\{1, 2, 3\} \cap \{5, 6, 7\} = \varnothing$. Пустым будет и пересечение множеств A и B, изображенных на рис. 2.

Определение 3. Множества, пересечение которых пусто, называются *непересекающимися*.

Пример 4. Определим A как множество целых положительных, а B — как множество целых отрицательных чисел. Тогда A и B — непересекающиеся множества, поскольку не существует целых чисел, которые были бы одновременно и положительными, и отрицательными.

Пример 5. Определим A как множество людей старше 20 лет, а B — как множество людей младше 10 лет. Тогда A и B — непересекающиеся множества.

Введенные операции объединения и пересечения множеств легко обобщаются на большее, чем два числа множеств. Так, множество C называется объединением множеств $A_1, A_2, \ldots, A_n$, если C состоит из всех тех элементов, которые принадлежат хотя бы одному из множеств A_k, $k = 1, 2, \ldots, n$. Обозначается $C = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$, или кратко $C = \bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k$.

На рис. 3, *а* изображено объединение множеств A_1, A_2 и A_3 (вся заштрихованная область).

Аналогично множество C называется пересечением или общей частью множеств $A_1, A_2, \ldots, A_n$, если оно состоит из всех тех элементов, которые принадлежат всем множествам A_k, $k = 1, 2, \ldots, n$. Обозначается $C = A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n$, или кратко $C = \bigcap\limits_{k=1}^{n} A_k$.

На рис. 3, *б* пересечение множеств A_1, A_2, A_3 — область, покрытая тройной штриховкой.

Введем еще одну операцию — вычитание множеств. Пусть имеются два множества A и B.

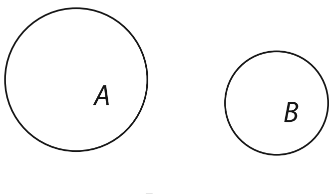


Рис 2.

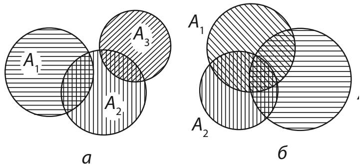


Рис 3.

Определение 4. *Разностью* множеств A и B называется совокупность тех элементов множества A, которые не являются элементами множества B.

Разность множеств A и B обозначается $A \setminus B$. При этом B может содержаться в множестве A полностью, частично или совсем не включаться. На рис. 4 изображены эти три случая. Разность $A \setminus B$ каждый раз заштрихована. Заметим, что в последнем случае, т. е. когда $A \cap B = \varnothing$, разность $A \setminus B = A$. В общем случае $A \setminus B \subset A$.

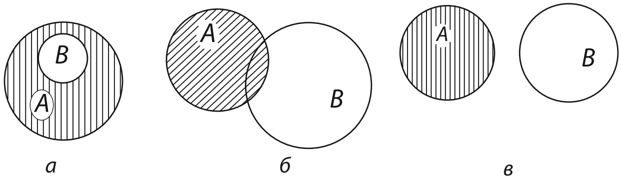


Рис 4.

Если $A \subset B$, то разность $B \setminus A$ называется *дополнением* множества A до множества B. Дополнение некоторого множества A до универсального множества U обозначается $\overline{A}$. Таким образом, если $A \subset U$, то U можно представить в виде объединения двух непересекающихся множеств:

$$U = A \cup \overline{A}.$$

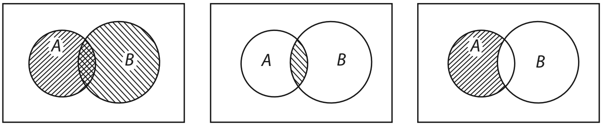
Говорят при этом, что множество U *разбито* на два множества A и $\overline{A}$. Аналогичному *разбиению* можно подвергнуть множество A или множество $\overline{A}$ или то и другое. При этом получим более мелкое разбиение исходного множества U. Этот процесс можно продолжить и далее. В итоге получим представление множества U в виде объединения попарно непересекающихся подмножеств:

$$U = \bigcup_{k=1}^{n} A_k \text{, где } A_i \cap A_j = \varnothing, \text{ если } i \neq j.$$

Типичным примером разбиения множества является классификация живых существ. Все множество живых организмов разбивается, как известно, на типы, типы — на классы, классы — на порядки и т. д. Это, разумеется, не единственное возможное разбиение. Так, например, биофизик, изучающий механизм зрения, разобьет все множество животных не по типам, а по чувствительности к световым сигналам. При таком разбиении в одно множество могут попасть слепые насекомые (например, некоторые виды муравьев) и некоторые позвоночные (например, кроты).

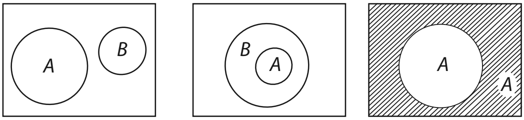
Для наглядного изображения соотношений между подмножествами какого-либо универсального множества используют диаграммы *Эйлера—Венна* (Джон Венн (1834—1923) — английский математик).

Само универсальное множество U изображают в виде прямоугольника, а его подмножества — в виде кругов, расположенных внутри прямоугольника. Множества, полученные в результате операций над множествами A и B, изображены на рис. 5 заштрихованными областями. Непересекающиеся множества изображаются неперекрывающимися областями, а включение множества соответствует области, целиком располагающейся внутри другой (рис. 6, *а*, *б*). Дополнение множества A (до U), т. е. множество $\bar{A}$, изображается той частью прямоугольника, которая лежит за пределами круга, изображающего A (рис. 6, *в*).



а *б* *в*

Рис 5.



а *б* *в*

Рис 6.

3. Алгебра Буля. Введенные операции объединения, пересечения и вычитания (дополнения) множеств подчиняются простым законам. Некоторые из этих законов уже установлены ранее, другие также нетрудно устанавливаются. Приведем сводку этих законов:

I. $\bar{\bar{A}} = A$.

II. $A \cap A = A$, $A \cup A = A$.

III. $A \cap \bar{A} = \varnothing$, $A \cup \bar{A} = U$.

IV. $A \cap U = A$, $A \cup U = U$.

V. $A \cap \varnothing = \varnothing$, $A \cup \varnothing = A$.

VI. $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$ (*закон де Моргана*);
$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$ (*закон де Моргана*).

VII. $A \cap B = B \cap A$ (*коммутативность* $\cap$);
$A \cup B = B \cup A$ (*коммутативность* $\cup$).

VIII. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ (*ассоциативность* $\cap$);
$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ (*ассоциативность* $\cup$).

IX. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (*дистрибутивность* $\cap$ *относительно* $\cup$);

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (*дистрибутивность* $\cup$ *относительно* $\cap$).

Проверим для примера закон де Моргана $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$. Пусть $x \in \overline{A \cup B}$. Тогда $x \in U$ и $x \overline{\in} A \cup B$. Следовательно, $x \overline{\in} A$ и $x \overline{\in} B$. Отсюда $x \in \bar{A}$ и $x \in \bar{B}$ и потому $x \in \bar{A} \cap \bar{B}$. Таким образом,

$$\overline{A \cup B} \subset \bar{A} \cap \bar{B}. \tag{1}$$

Если теперь $x \in \bar{A} \cap \bar{B}$, то $x \in \bar{A}$ и $x \in \bar{B}$. Отсюда $x \in U$ и $x \overline{\in} A$, $x \overline{\in} B$. Значит, $x \overline{\in} A \cup B$, т. е. $x \in \overline{A \cup B}$. Итак,

$$\bar{A} \cap \bar{B} \subset \overline{A \cup B}. \tag{2}$$

Включения (1) и (2) в силу теоремы 1 (п. 1) и доказывают закон де Моргана.

Пользуясь операциями объединения, пересечения и вычитания множеств, можно из некоторых исходных множеств A, B, C и т. д. получать новые множества: $(A \cup B) \cap \bar{C}$, $(A \setminus \bar{B}) \cup (\bar{A} \setminus C)$, $\bar{C} \cap (A \cup B)$ и т. п. К этим множествам можно применять указанные операции и получать еще более сложные выражения и т. п. Законы I—IX позволяют преобразовывать эти выражения, упрощать их, из одних получать другие. Таким образом, получаем исчисление множеств, или алгебру множеств. Это исчисление является примером так называемой *булевой* алгебры, или алгебры *Буля* (Джордж Буль (1815—1864) — английский математик и логик).

§ 1.2. ОТОБРАЖЕНИЯ И ФУНКЦИИ

Пусть имеются два множества D и E. Это могут быть множества совершенно различной природы. Например, может быть, что D — это множество людей, населяющих земной шар, а E — шкала цветов.

Предположим, что существует правило, по которому каждому элементу из D ставится в соответствие один и только один элемент из E. Тогда это правило называют *отображением множества* D в E (рис. 7).

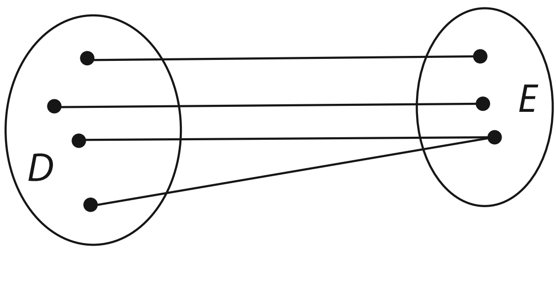


Рис 7.

Например, каждому человеку земного шара можно поставить в соответствие цвет его волос. Так будет определено отображение множества людей в шкалу цветов. Подобно этому можно определить отображение множества людей в множество имен, множества книг в множество языков и т. д. Вместо слова «отображение» говорят также «*функция*» и, если задано отображение множества D в E, то говорят, что *на множестве D задана (определена) функция со значениями в E.* Для обозначения функции будем, как правило, использовать букву f. Эта договоренность не мешает использовать и другие буквы g, h, F, G, и т.п.

Если на множестве D определена некоторая функция f со значениями в E, то общий элемент множества D обозначается обычно x и называется *независимой переменной,* или *аргументом* этой функции, а отдельные конкретные элементы множества D называются *значениями аргумента.* Значения аргумента часто обозначают той же буквой, что и сам аргумент, с прибавлением каких-либо индексов. Например, x_0, x_1, $\tilde{x}$, и т. п. Элемент из E, соответствующий элементу $x \in D$, в силу правила f, называется *значением функции f* на элементе x и обозначается $f(x)$ (читается: «эф от икс»).

Множество D называется *областью определения* функции f. Множество всех элементов $f(x)$, соответствующих элементам $x \in A$, где A — произвольное подмножество множества D, называется *образом* множества A и обозначается $f(A)$. В частности, $f(D)$ называется *областью значений* функции f Область значений $f\,(D)$ есть подмножество множества E, которое в общем случае может и не совпадать со всем E. Если же $f(D) = E$, то говорят что f есть отображение D на E.

Две функции f и g *равны* (*тождественны, совпадают*), если совпадают их области определения и если для любого x из области определения имеет место равенство

$$f(x) = g(x).$$

Подчеркнем еще раз, что в требование равенства двух отображений входит требование совпадения их областей определения.

Пример. Пусть x — элемент какого-нибудь числового множества. Равны ли функции f и g, если

$$f(x) = x + 1, \text{ а } g(x) = -x^3 + 2x + 1?$$

На этот вопрос ответить нельзя, так как не указаны области определения функций. Если в качестве общей области определения взять все множество действительных чисел, то функции f и g не равны, так как, например,

$$f(2) = 3 \neq -3 = g(2).$$

Если же в качестве области определения взять конечное множество $D = \{-1, 0, 1\}$, то f и g, заданные в этой области, окажутся равными.

Рассмотрим некоторые частные виды отображений.

Если область значений $f(D)$ состоит всего из одного элемента, то функцию f называют *постоянной* (рис. 8, *а*). Иными словами, функцию f называем постоянной, если значения ее на всех элементах $x \in D$ равны одному и тому же элементу $a \in E$.

Если *разным* элементам $x \in D$ соответствуют *разные* элементы $f(x) \in E$, то отображение f называют *взаимно однозначным* (рис. 8 б).

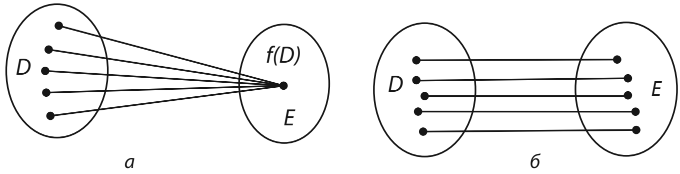


Рис 8.

Примером взаимно однозначного отображения является паспортная система. Каждому человеку, достигшему 14 лет, ставится в соответствие определенный набор паспортных данных (фамилия, имя, отчество, год и место рождения, домашний адрес и т. п.), записанных в его паспорте. При этом разным людям соответствуют разные паспортные данные.

Если f — взаимно однозначное отображение, то каждому элементу $y \in f(D)$ можно поставить в соответствие определенный элемент $x \in D$, именно тот, значение функции на котором равно y. Так будет установлено отображение образа $f(D)$ на множество D. Это отображение называется *обратным* по отношению к f и обозначается f^{-1}.

Если образ $f(D)$ есть подмножество множества D, то говорят, что функция f отображает D *в себя*. Например, функция $f = \sin x$ отображает все множество действительных чисел на подмножество этого множества — промежуток $[-1, 1]$.

В частном случае может оказаться, что функция f каждому элементу $x \in D$ ставит в соответствие сам этот элемент: $f(x) = x$. В этом случае функцию f называют *тождественной*.

Функция, областью значений которой является числовое множество, называется *числовой*. Часто термин «функция» употребляют именно для числовых функций, оставляя для других функций термин «отображение». Особенность числовых функций состоит в том, что в области их значений (т.е. во множестве чисел) имеются операции сложения, вычитания, умножения и деления. Это позволяет ввести аналогичные операции и для числовых функций. Так, например, суммой двух числовых функций f и g, имеющих общую область определения D, назовем функцию h, которая для каждого $x \in D$ определяется как число, равное сумме:

$$h(x)=f(x)+g(x)\cdot$$

Аналогично определяются и другие операции. В частности, операция умножения позволяет рассматривать степени функции, например $f^2 = f \cdot f$. Сложнее обстоит дело с частным от деления $\frac{f}{g}$. Чтобы не пришлось делить на нуль, из области определения частного, как правило, исключают те элементы, на которых значения g равны нулю.

Введем еще два важных понятия относительно общих отображений.

Пусть имеются две функции f_1 и f_2 с областями определения D_1 и D_2. Пусть $D_1 \subset D_2$, и для всех $x \in D_1$ выполняется равенство

$$f_1(x) = f_2(x)\cdot$$

Тогда функция f_1 называется *сужением* функции f_2. Таким образом, сужение f_2 — это то же правило f_2, но действующее только на $D_1 \subset D_2$.

Пусть, наконец, f — функция, определенная на D, со значениями в E, а F — функция, определенная на $A \subset E$, со значениями в H. Тогда функция G, определенная на $B \subset D$ таком, что $f(B) = A \cap f(D)$, со значениями в H, действующая по формуле

$$G(x) = F[f(x)],\ x \in B,$$

называется функцией от функции, или *суперпозицией* функций, или *сложной* функцией (рис. 9).

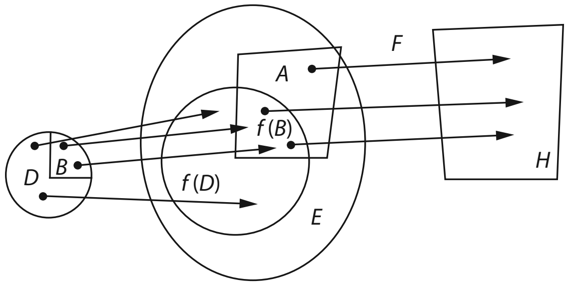


Рис 9.

Упражнения

1. Равны ли множества:

а) $\{3; 4; 5; 6\}$ и $\{5; 4; 3; 6\}$;

б) $\{x: x > 0, x^2 \le 4\}$ и $\{x: 0 < x \le 4 - x\}$; в) $\{x: 0 \le \mathrm{x} \le 1\}$и $\{x: 3x^2 \le 3\}$.

2. Вместо звездочек напишите знак $\subset$ или знак $\in$, чтобы получилась верная запись:

а) $\{5; 6\}*\{5; 6; 8\}$;

б) $5*\{5; 6; 8\}$;

в) $2*N$.

3. Укажите пустые множества среди следующих множеств:

а) множество целых корней уравнения $x^2 - 9 = 0$;

б) множество целых корней уравнения $x^2 + 16 = 0$;

в) множество целых корней уравнения $x^2 - 5x + 6 = 0$;

г) множество натуральных чисел, меньших 1.

4. Пусть $A = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ и $B = \{3; 4; 5; 6; 7; 8\}$.
Найдите множества $A \cup B$ и $A \cap B$.

5. Пусть $A = \{2; 4; 6; 8; \ldots; 2n, \ldots\}$, $B = \{1; 3; 5; 7; ...; 2n - 1, \ldots\}$.
Найдите $A \cup B$ и $A \cap B$.

6. Пусть $A = \{1; 2; 3; 4; 5; 6)$, $B = \{3; 4; 5; 6; 7; 8)$. Найдите $S = A \backslash B$.

7. Пусть $A = \{1; 2; 3; 4; ...\}$ и $B = \{2; 4; 6; 8, \ldots, 2n, \ldots\}$. Найдите $A \backslash B$.

8. Выпишите все подмножества множества $A = \{1; 2; 3\}$.

9. Пусть $A = \{-4; -3; -2; -1; 0; 1; 2)$, $B = \{4; 3; 2; 1; 0; -1; -2\}$,
$\mathrm{C} = \{-4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4\}$.
Найдите множества: а) $A \cup B$; б) $A \cap B$; в) $A \cup \mathrm{C}$; г) $A \cap C$; д) $B \cup C$.

ГЛАВА 2.
КОМБИНАТОРИКА

Комбинаторика — раздел математики, изучающий вопросы о том, сколько комбинаций определенного типа можно составить из данных предметов (элементов)

§2.1 МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ИНДУКЦИЯ

1 Принцип математической индукции. При доказательстве комбинаторных теорем понадобится часто употребляемая теорема, называемая обычно принципом математической индукции.

Как известно, любое конечное множество можно задать перечислением его элементов $A = \{a_1, a_2, ..., a_p\}$. До сих пор не был важен *порядок* следования элементов, и, например, множества $\{a_1, a_2, \ldots, a_p\}$ и $\{a_2, a_1, a_3, ..., a_p\}$ не различали. В дальнейшем будет важен порядок, в котором записаны элементы. Множество, в котором задан порядок следования элементов, называется *упорядоченным.* Таким образом, если множество упорядочено, то каждому элементу приписан свой номер, и можно говорить «первый элемент», «второй элемент» и т. д. Можно сказать также, что в упорядоченном множестве каждому элементу отведено место, на котором он помещается среди других элементов этого множества.

Принцип математической индукции. *Если 1) некоторое утверждение справедливо для $k = 1$, 2) из справедливости утверждения для произвольного натурального k следует его справедливость для $k + 1$, то это утверждение справедливо для всякого натурального n.*

Доказательство. Предположим противное, т.е. что при выполнении обоих условий для некоторых натуральных чисел утверждение не выполняется. Пусть m — наименьшее из этих чисел. Это значит, что, во-первых, $m > 1$ и, во-вторых, для $m - 1$ утверждение выполняется, а для m — уже нет. Но это противоречит второму условию. Следовательно, числа m с указанным свойством не существует. Принцип математической индукции доказан.

Приведем пример использования этого метода для доказательства справедливости формулы

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3 + \ldots + \frac{n(n-1)(n-2)\ldots[n-(m-1)]}{1\cdot 2\cdot 3\ldots m}x^m + \ldots + x^n, \quad (1)$$

где $x > -1$, $x \neq 0$, $n \in N$, *называемой* формулой бинома Ньютона.

Доказательство 1. При $n = 1$ формула (1) очевидна.

2. Пусть при $n = k$ формула (1) верна, т.е.

$$(1+x)^k = 1+kx+\frac{k(k-1)}{1\cdot 2}x^2+\frac{k(k-1)(k-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3+\ldots+\frac{k(k-1)(k-2)\ldots[k-(m-1)]}{1\cdot 2\cdot 3\ldots m}x^m+\ldots+x^k.$$

Докажем, что тогда верна и формула

$$(1+x)^{k+1} = 1+(k+1)x+\frac{(k+1)k}{1\cdot 2}x^2+\frac{(k+1)k(k-1)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3+\ldots$$
$$\ldots+\frac{(k+1)k(k-1)\ldots[k+1-(m-1)]}{1\cdot 2\cdot 3\ldots m}x^m+\ldots+x^{k+1}. \qquad (2)$$

Итак,

$$(1+x)^{k+1}=(1+x)^k(1+x)=\left(1+kx+\frac{k(k-1)}{1\cdot 2}x^2+\frac{k(k-1)(k-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3+\ldots\right.$$
$$\left...+\frac{k(k-1)(k-2)\ldots[k-(m-2)]}{1\cdot 2\cdot 3\ldots(m-1)}x^{m-1}+\frac{k(k-1)(k-2)\ldots[k-(m-1)]}{1\cdot 2\cdot 3\ldots m}x^m+\ldots+x^k\right)\times$$
$$\times(1+x)=1+kx+\frac{k(k-1)}{1\cdot 2}x^2+\frac{k(k-1)(k-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3+\ldots+\frac{k(k-1)(k-2)\ldots[k-(m-2)]}{1\cdot 2\cdot 3\ldots(m-1)}\times$$
$$\times x^{m-1}+\frac{k(k-1)(k-2)\ldots[k-(m-1)]}{1\cdot 2\cdot 3\ldots m}x^m+\ldots+x^k+x+kx^2+\frac{k(k-1)}{1\cdot 2}x^3+$$
$$+\frac{k(k-1)(k-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^4\ldots+\frac{k(k-1)(k-2)\ldots[k-(m-2)]}{1\cdot 2\cdot 3\ldots(m-1)}x^m+\ldots+x^{k+1}=1+(k+1)x+$$
$$+\frac{(k+1)k}{1\cdot 2}x^2+\frac{(k+1)k(k-1)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3+\ldots+\frac{(k+1)k(k-1)\ldots[k-(m-2)]}{1\cdot 2\cdot 3\ldots m}x^m+\ldots+x^{k+1},$$

т. е. получаем формулу (2).

3. Учитывая результаты шагов 1 и 2 доказательства и применив принцип математической индукции, считаем формулу (1) доказанной для любого $n\in N$.

2 Слова. Рассмотрим конечное множество первых k натуральных чисел $D = \{1, 2, \ldots, k\}$ и какое-нибудь конечное множество $A = \{a, b, c, \ldots, \upsilon\}$. Множество A будем называть *алфавитом,* а число элементов в множестве A *мощностью* этого множества.

Определим отображение φ на множестве D со значениями в A, т.е. каждому натуральному числу $i\in D$ поставим в соответствие один определенный элемент $\varphi(i)\in A$. Последовательность $\varphi(1)$, $\varphi(2)$, ..., $\varphi(k)$ назовем *словом длины* k.

По-иному можно сказать, что имеется упорядоченный набор мест 1, 2, ..., k и чтобы образовать слово, на каждое место помещаем определенный правилом φ элемент из алфавита A.

В дальнейшем, образуя слова, для простоты написания не будем разделять запятыми элементы $\varphi(i)$ в нем. Точно так же образуются слова, которыми пользуемся в нашей речи. Например, из алфавита $A = \{а, б, р\}$ можно образовать слова длины 2: *ба, ар, бр, ра;* слова длины 3: *бра, бар, раб, брр;* слова длины 4: *баба, арба, раба, араб* и т.д. Аналогично из алфавита $A = \{0, 1\}$ можно образовать два слова единичной длины: 0 и 1, слова длины 2: 00, 01, 10, 11; слова длины 3: 000, 001, 010 и т.п.; слова длины 5: 00101, 10001, 10101 и т. д.

Слово длины k будем называть также *k-буквенным словом,* а элементы алфавита — *буквами.* Уже из приведенных примеров видно, что длина k — буквенного слова может быть и меньше, и больше мощности алфавита. Даже в русском языке, алфавит которого состоит из 33 букв, есть слова, длина которых больше 33. Например, научное название акрихина — метоксихлордиэтиламинометилбутиламиноакридин. Это слово содержит 44 буквы.

Два слова, образованные из одного алфавита, одинаковы тогда и только тогда, когда они имеют одинаковую длину, и на одинаковых местах стоят одинаковые буквы. Сколько всевозможных слов заданной длины k можно образовать из алфавита мощности n, если считать, что все такие слова имеют смысл?

Теорема. *Число всевозможных слов длины k, образованных из алфавита мощности n, равно n^k .*

Доказательство. Пусть a_1, a_2, ..., a_n — элементы алфавита A мощности n. Из этого алфавита можно образовать n различных слов длины 1. Такими словами будут буквы алфавита. Если к каждому из этих слов приписать последовательно каждый из n элементов множества A, то образуются все возможные слова длины 2:

$$a_1a_1, a_1a_2, ..., a_1a_n,$$

$$a_2a_1, a_2a_2, ..., a_2a_n,$$

$$.......$$

$$a_na_1, a_na_2, ..., a_na_n$$

Число таких пар равно n^2, т.е. теорема выполняется для случаев $k = 1$ и $k = 2$.

Предположим теперь, что теорема верна для $i = k - 1$. Это значит, что число различных слов длины $k - 1$, образованных из $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$, равно n^{k-1} Покажем тогда, что теорема остается верной и для $i = k$.

Чтобы из множества A образовать все возможные слова длины k, достаточно к каждому слову длины $k - 1$ приписать на последнее место последовательно каждый из n элементов множества A. Таким образом, каждое слово длины $k - 1$ даст n различных слов длины k, и этим способом получим все возможные слова длины k. Поскольку слов длины $k - 1$ имеется n^{k-1} то общее число слов длины k будет равно $n \cdot n^{k-1} = n^k$. Вместе с принципом математической индукции это доказывает теорему.

Например, из алфавита $A = \{0, 1\}$ можно образовать $2^2 = 4$ двухбуквенных слов.

§ 2.2 РАЗМЕЩЕНИЯ, ПЕРЕСТАНОВКИ И СОЧЕТАНИЯ

1. Размещения и перестановки. Образуя слова из алфавита $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$, от функции φ требовалась только однозначность. Пусть теперь φ — взаимооднозначное отображение. Это значит, что в слове, образованном с помощью значений этого отображения, нет одинаковых букв. Такие слова называются *размещениями.* Например, из алфавита $A = \{1, 0\}$ можно образовать только два размещения длины 2: 01 и 10. Из алфавита $A = \{1, 2, 3\}$ можно образовать шесть различных размещений длины 2: 12, 21, 13, 31, 23 и 32. Нетрудно установить число различных размещений для данного алфавита и в общем случае. Заметив, что длина размещения не может быть больше мощности алфавита, покажем, что справедлива следующая.

Теорема. *Число различных размещений длины k, образованных из алфавита мощности n, равно $n(n - 1)(n - 2)... (n - k + 1)$.*

Доказательство. Для $k = 1$ теорема верна, так как число однобуквенных размещений равно числу букв в алфавите, т. е. n.

Пусть теорема верна для $i = k - 1$. Это значит, что число размещений длины $k - 1$, образованных из алфавита $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$, равно $n(n - 1)...(n - k + 2)$. Но чтобы получить все размещения длины k, достаточно к каждому размещению длины $k - 1$ приписать поочередно одну из $n - (k - 1)$ букв, не вошедших в это размещение. Таким образом, каждое размещение длины $k - 1$ порождает $n - (k - 1)$ размещений длины k. Следовательно, всего размещений длины k будет

$$n\,(n - 1)...(n - к + 2)\,[n - (k - 1)],$$

что и требовалось доказать.

Число различных размещений длины k, образованных из алфавита мощности n, обозначают A_n^k. Таким образом,

$$A_n^k = n(n - 1)...(n - k + 1). \qquad (1)$$

Пример 1. Сколько можно составить сигналов из 6 флажков различного цвета, взятых по 2?

Искомое число сигналов $A_6^2 = 6 \cdot 5 = 30$.

Пример 2. Из группы в девять крыс необходимо выбрать трех и поместить их в три клетки, обозначенные C_1, C_2 и C_3. Сколькими способами это можно сделать?

Здесь речь идет о размещении из девяти объектов по три. Согласно формуле (1), число таких размещений равно $9 \cdot 8 \cdot 7 = 504$.

Частным случаем размещений являются *перестановки.* Так называются размещения, длина которых равна мощности алфавита. Например, из алфавита $A = \{1, 2, 3\}$ можно образовать шесть различных перестановок: 123, 132, 213, 231, 312 и 321.

Из формулы (1) при $k = n$ получаем, что число всевозможных перестановок, которые можно образовать из алфавита мощности n (обозначение P_n), равно

$$P_n = n(n-1)...(n-n+2)\ (n-n+1) = n!$$

Пример 3. Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, если каждая цифра входит в изображение числа только один раз?

Искомое число трехзначных чисел

$$P_3 = 3! = 1{\cdot}2{\cdot}3 = 6.$$

Пример 4. Восемь лабораторных животных нужно проранжировать в соответствии с их способностями выполнять определенные задания. Каково число возможных ранжировок, если допустить, что одинаковых способностей нет?

Существует 8! ранжировок по способностям, т.е. $1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8 = 40320$.

Пример 5. Имеется n юношей и n девушек. Сколькими вариантами их можно соединить в танцевальные пары?

Чтобы решить эту задачу, выстроим всех юношей в шеренгу и присвоим каждому номер от 1 до n. Тогда ясно, что искомое число вариантов равно числу перестановок из множества девушек, т. е. n!

2. Сочетания. Пусть опять имеется некоторое конечное множество мощности n $A = \{a_1\ a_2, ..., a_n\}$. Любое подмножество этого множества, содержащее k элементов, называется *сочетанием из n элементов по k.*

Понятно, что если $k < n$, то из одного и того же множества A мощности n можно образовать несколько различных сочетаний из n элементов по k. Например, из множества $A = \{a_1\ a_2, a_3\}$ можно образовать три различных подмножества, содержащих по два элемента, т. е. три различных сочетания из трех элементов по два: $A_1 = \{a_1, a_2\}$, $A_2 = \{a_1, a_3\}$ и $A_3=\{a_2, a_3)$.

Понятно также, что число различных сочетаний из n элементов по k зависит от мощности сочетания, т.е. от k и от мощности множества A, т. е. от n. Это число обозначают символом C_n^k (иногда употребляется еще символ $\binom{n}{k}$). Например, C_n^1 — число различных сочетаний, взятых из n элементов по одному. Ясно, что таких сочетаний будет столько, сколько элементов в исходном множестве A, т. е. n. Таким образом, $C_n^1 = n$.

Далее C_n^2 — это число различных сочетаний, взятых из n элементов по два. Это число легко подсчитать. Если каждый элемент множества $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ поочередно сочетать с каждым из всех остальных, то получатся пары элементов, из которых можно составить таблицу:

$$\begin{array}{ll}
\{a_1, a_2\} & \{a_1, a_3\} \ldots \{a_1, a_n\} \\
\{a_2, a_1\} & \{a_2, a_3\} \ldots \{a_2, a_n\} \\
\ldots\ldots & \ldots\ldots \\
\{a_{n-1}, a_1\} & \{a_{n-1}, a_2\} \ldots \{a_{n-1}, a_n\} \\
\{a_n, a_1\} & \{a_n, a_2\} \ldots \{a_n, a_{n-1}\}
\end{array}$$

В этой таблице $n - 1$ столбец и n строк. Следовательно, всего выписано $n(n - 1)$ пар. Но каждая пара встречается дважды. Так, например, пара $\{a_1, a_2\}$ один раз получается, когда a_1 сочетаем с a_2, а второй раз — при сочетании a_2 с a_1. Таким образом, различных пар, т.е. различных сочетаний из n элементов по 2, будет $\frac{n(n-1)}{2}$. Следовательно, $C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$. В частности, $C_3^2 = \frac{3 \cdot 2}{2} = 3$, в чем убедились непосредственно.

Подсчитаем еще C_n^n и C_n^0. Число C_n^n — это число сочетаний из n элементов по n. Единственным подмножеством множества A, содержащим n элементов, будет само множество A. Следовательно, $C_n^n = 1$. Наконец, C_n^0 — число подмножеств, содержащих 0 элементов, т. е. не содержащих элементов вовсе. Таким подмножеством является только пустое множество (оно содержится во всяком множестве, следовательно, и в A). Таким образом, $C_n^0 = 1$.

Теперь докажем теорему, которая позволит подсчитать любое C_n^k.

Теорема. *Число сочетаний из n элементов по k, где* $0 \le k \le n$, *выражается формулой*

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!},$$

или (при $k \neq 0$)

$$C_n^k = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}. \tag{2}$$

Доказательство. Заметим, что для того чтобы получить всевозможные размещения длины k из алфавита мощности n, достаточно взять всевозможные сочетания из n по k, а затем из каждого сочетания образовать $k!$ всевозможных перестановок. Таким образом,

$$A_n^k = C_n^k k!,$$

откуда

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

П р и м е р 1. Из группы в пять мышей нужно выбрать три безотносительно к порядку выбора. Сколькими способами можно это сделать?

Искомое число способов

$$C_5^3 = \frac{5\cdot 4\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3} = 10$$

Числа C_n^k имеют много важных приложений. Вспомним, например, формулу разложения бинома Ньютона для любого $n \in N$ (см. § 2.1)

$$(1+x)^n = 1 + \frac{n}{1!}x + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \ldots + \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}x^k + \ldots$$
$$\ldots + \frac{n(n-1)\ldots 3\cdot 2\cdot 1}{n!}x^n.$$

Сравнив коэффициенты этого полинома с формулой (2), замечаем, что коэффициент при k-й степени равен C_n^k. Таким образом,

$$(1 + x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \ldots + C_n^n x^n . \tag{3}$$

Поэтому числа C_n^k называют *биномиальными коэффициентами.* Из формулы (3) вытекают интересные следствия. Положив, например, в ней $x = 1$, получим

$$C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n = 2^n. \tag{4}$$

Таким образом, сумма биномиальных коэффициентов равна 2^n, где n — степень бинома.

С другой стороны, слева в формуле (4) написано общее число всех подмножеств множества мощности n. Из формулы (4) следует, что это число равно 2^n.

Заметим еще, что биномиальные коэффициенты удобно вычислять, пользуясь так называемым «треугольником Паскаля»:

$$\begin{array}{ccccccc}
1 \\
1 & 1 \\
1 & 2 & 1 \\
1 & 3 & 3 & 1 \\
1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\
1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 \\
1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & 1 \\
. & . & . & . & . & . & .
\end{array}$$

Будем считать верхнюю единицу нулевой строкой треугольника. Тогда в n-й строке этого треугольника записаны последовательно биномиальные коэффициенты бинома *n-й* степени (n = 0, 1, 2, …). Каждая следующая строка получается из предыдущей простым способом: коэффициент последующей строки (за исключением первого и последнего, равных единице) пишется под коэффициентом предыдущей строки и полагается равным сумме над ним стоящего и стоящего перед последним, т.е.

$$C_n^{k+1} = C_{n-1}^{k+1} + C_{n-1}^{k}.$$

Докажем эту формулу. Имеем

$$C_{n-1}^{k+1} + C_{n-1}^{k} = \frac{(n-1)!}{(k+1)!(n-1-k-1)!} + \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} = \frac{(n-1)!}{k!(n-k-2)!}\left(\frac{1}{k+1} + \frac{1}{n-k-1}\right) =$$

$$= \frac{n(n-1)!}{k!(k+1)(n-k-2)!(n-k-1)} = \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!},$$

что и требовалось доказать.

Заметим, наконец, что $C_n^k = \frac{n!}{n!(n-k)!} = C_n^{n-k}$,

§ 2.3. КОМБИНАТОРИКА И ГЕНЕТИКА

Комбинаторный анализ применяется в тех многочисленных вопросах естествознания, которые связаны с перебором множества возможностей, с выделением из этого множества тех или иных подмножеств. Приведем две простые задачи из генетики.

1. Хорошо известно, что хромосому схематично можно представить как цепочку из генов. При этом свойства хромосомы зависят не только от состава генов, но и от их расположения в цепочке. Существуют методы, позволяющие изменить порядок генов в хромосоме. Возникает вопрос: какое количество хромосом можно получить из данной, изменяя в ней порядок следования генов?

Пусть исходная хромосома состоит из n генов. Обозначим их a_1, a_2,..., ..., a_n и пусть $A = \{a_1\ a_2, ..., a_n\}$. Тогда понятно, что каждая хромосома, имеющая данный набор генов, есть перестановка множества A. Число таких перестановок, как известно, равно n!

2. Пусть имеется n сортов мономеров (например, азотистых оснований). Из этих мономеров образуется полимер, который можно представить как цепочку из k мономеров. При этом k, как правило, больше n, и мономеры в цепочке могут повторяться.

Какое количество различных полимеров длины k можно образовать из данных n сортов мономеров? Будем считать набор мономеров алфавитом из n элементов. Тогда каждый полимер, состоящий из k мономеров, есть слово длины k. Число таких слов, как известно, равно n^k, а число различных полимеров будет в два раза меньше, так как, например, молекулы $a_1a_2a_3$ и $a_3a_2a_1$ не различают (одна из них превращается в другую, если ее повернуть на 180°).

В частности, если алфавит состоит из 4 азотистых оснований *А*, *Ц*, *Г* и *Т* (т.е. $n = 4$), а полимером является ген (средняя длина гена равна 1000 единиц, т. е. $k = 1000$), то число всевозможных генов, которые можно получить из 4 оснований, равно

$$\frac{1}{2}n^k = \frac{1}{2}4^{1000} = \frac{2^{2000}}{2} = 2^{1999}.$$

Это громадное число. По некоторым подсчетам оно превосходит общее число атомов в Солнечной системе.

Упражнения

1. Нужно присудить первую, вторую и третью премии на конкурсе, в котором принимают участие 20 человек. Сколькими способами можно распределить эти премии?

2. Сколько четырехбуквенных «слов» можно образовать из букв слова «причем»?

3. Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, если каждая цифра входит в изображение числа только один раз?

4. Сколькими способами группа из шести человек может расположиться в ряд?

5. Сколькими способами можно выбрать две детали из ящика, содержащего 10 деталей?

6. У шести мальчиков в классе имеются признаки инфекционного заболевания. Чтобы проверить наличие заболевания, требуется взять выборочный анализ крови у двух мальчиков. Сколькими способами можно это сделать?