Багдоев А.Г.
Ерофеев В.И.
Шекоян А.В.

Линейные и нелинейные волны в диспергирующих сплошных средах

МОСКВА
ФИЗМАТЛИТ ®

УДК 530
ББК В251
Б 14

Багдоев А.Г., Ерофеев В.И., Шекоян А.В. **Линейные и нелинейные волны в диспергирующих сплошных средах.** — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009. — 320 с. — ISBN 978-5-9221-1149-2.

Авторы разработали методы эволюционного и модуляционных уравнений для исследований распространения и устойчивости линейных и нелинейных волн в сплошных средах со сложной структурой. Рассматриваются среды: твердая с полостями, дисперсная предварительно деформированная, твердая с порами, заполненными электропроводящей и неэлектропроводящей жидкостью, магнитоупругая, пьезополупроводники, кристаллы с дислокациями, композиты с включениями, электропроводящая несимметричная жидкость, смесь газа с капельной жидкостью. Рассмотрено распространение лазерного луча через двухуровневую среду. Показано существование солитонообразных волн, найдены условия устойчивости волн. Изучены пучки, условия их фокусирования, самофокусирования (дефокусирования), условия модуляции или самомодуляции волн, другие эффекты. Рассмотрены резонаторы и интерферометры различных типов. В линейной постановке исследовано отражение волны от шероховатой поверхности.

Для научных и инженерно-технических работников, студентов и аспирантов, специализирующихся в области механики сплошных сред, физической акустики, физики конденсированного состояния. Отдельные главы могут оказаться полезными сейсмологам, геофизикам, метеорологам и специалистам по физике Земли, сейсмостойкому строительству, акустоэлектронике.

ISBN 978-5-9221-1149-2

© ФИЗМАТЛИТ, 2009

© А. Г. Багдоев, В. И. Ерофеев, А. В. Шекоян, 2009

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие

В любой области движения материи наблюдаются волновые процессы: в электродинамике, физике плазмы, оптике, акустике, гидродинамике; сложных двухфазных средах типа «газ — капельная система», в различных видах грунтов, в твердых телах с порами, заполненными жидкостью и т. д.

При распространении волн в различных сплошных средах существенны физические свойства материи. Особо важными из них, которые присутствуют в большинстве случаев, следует считать нелинейность, диссипацию, дисперсию, дифракцию и неоднородность.

Линейные и нелинейные волновые процессы представляют интерес также для применения их в различных прикладных задачах.

Интересно отметить, что, несмотря на различие в физической природе волновых процессов (акустические, электромагнитные), они описываются подобными уравнениями. Одними из мощных методов математического изучения, особенно нелинейных, волн являются метод эволюционного уравнения, или коротких волн, и метод уравнения нелинейной модуляции, последнее также часто называют нелинейным уравнением Шредингера. В этом аспекте возникают два вопроса: первый — как из различных сложных систем уравнений, описывающих волновое движение в данной среде и природу волны, вывести эволюционные уравнения; второй — как исследовать выведенные уравнения, которые в каждом случае имеют различные модификации (разные коэффициенты, порядок уравнений и т. д.).

При исследовании волнового процесса важно выявить законы линейной и нелинейной дисперсии, выявить виды модуляции (амплитудная, частотная и др.), изучить вопросы устойчивости (неустойчивости) модуляционной и других типов волн, например, солитонов. Если изучается распространение волновых пучков, то важными вопросами, встающими перед исследователями, являются вопросы фокусирования: нужно определить расстояния образования фокусов, фокальных пятен, выявить условия существования самофокусировки (самодефокусировки), закономерности изменения в пространстве и времени радиуса пучка.

В первой главе рассмотрена часто встречающаяся в природе и технике задача изучения волн в твердой среде с полостями, рассмотрены полубесконечная среда и слой, дифракционная задача, солитонообразные решения и пучки квазимонохроматических волн.

Во второй главе исследованы линейные и нелинейные волны в вязком дисперсном нелинейном предварительно деформированном слое со свободной поверхностью. Эту модель применяют для описания волн в композитах, грунтах и других природных и искусственных материалах. В таких средах возможны два типа волн — так называемые равновесные и «замороженные». Суть этих терминов заключается в том, что в первом случае возмущенное поле переходит в равновесное динамическое состояние, а во втором — в быстро изменяющееся динамическое состояние. Для обоих типов волн выведены нелинейные уравнения коротких волн, а из них — нелинейные модуляционные уравнения и изучены пучковые решения.

В третьей и четвертой главах рассмотрена твердая среда с порами, заполненными неэлектропроводящей и электропроводящей жидкостями (среда Био). Из вариационного принципа выведены линейное и нелинейное дисперсионные соотношения. Для нелинейных волн получено точное частное решение и условия, при которых это решение принимает вид сглаженной ударной волны, или солитонообразный вид. Рассмотрены также пучки в такой среде.

В пятой главе рассмотрены линейные и нелинейные волны в пьезокристаллах (диэлектрик и полупроводник), причем как бесконечные среды, так и слои. В отличие от предыдущих глав, здесь нелинейные уравнения выводятся как непосредственной подстановкой в исходную систему уравнений решения в виде квазимонохроматической волны, так и из эволюционных уравнений. В первом случае получаются физически наглядные решения, а во втором облегчается математический вывод.

В шестой главе рассмотрены линейные и нелинейные волны в магнитоупругих материалах, выведены обобщенные уравнения магнитной газодинамики с учетом тока смещения. Исследованы дисперсионные свойства магнитоупругих волн, особенности распространения нелинейных стационарных волн, в частности, магнитоупругих солитонов. Выведены нелинейные связные уравнения магнитной гидродинамики в случае высокочастотных процессов и больших полей, которые могут реализовываться в магнитных звездах, причем, как и в случае обычной магнитогазодинамики, где не учитывается ток смещения, уравнения инвариантны относительно преобразования Галилея.

В седьмой главе описаны различные типы волн в градиентно-упругом пространстве, неограниченном и ограниченном поверхностями. В рамках градиентной теории упругости с учетом поверхностной энергии показано существование SH-поверхностной волны (сдвиговой горизонтальной), которую в классической теории упругости описать невозможно. Проанализировано влияние микроструктуры на волновые процессы, а также исследовано влияние геометрической нелинейности на продольные, сдвиговые и SH-поверхностные волны.

В восьмой главе изучается распространение продольной акустической волны в твердом теле с дислокациями. Проанализировано влияние плотности дислокаций на дисперсию фазовой скорости волны, величину и характер затухания. Проведено сравнение полученных результатов с экспериментальными данными по изучению характеристик распространения упругих волн в образцах с изменяющейся плотностью дислокаций (деформируемых и циклически нагружаемых образцах). Предложена нелинейная математическая модель динамики твердой среды с дислокациями. Рассматривается распространение ультразвуковых квазигармонических волн. Показано, что наличие дислокаций приводит к модуляционной неустойчивости квазигармоник и формированию стационарных волн огибающих (волновых пакетов), при этом их амплитуда и ширина определяются эффективной массой дислокаций и коэффициентом акустодислокационного взаимодействия. Кроме того, в твердом теле с дислокациями может формироваться нелинейная стационарная акустическая волна. Такая волна является периодической и движется быстрее, чем акустические сигналы в линейной среде. Волна имеет пилообразную форму, длина волны увеличивается с ростом ее амплитуды. В этой же главе приведены результаты исследования влияния дислокаций на устойчивость и фокусировку (самофокусировку) волнового пучка.

Девятая глава посвящена изложению теории распространения упругих волн в твердых смесях. Смесь представляет собой два взаимопроникающих континуума. Каждая область, заполненная смесью, одновременно занята обеими компонентами, между которыми происходит взаимное относительное движение. Деформированное состояние каждого континуума определяется парциальными тензорами деформаций и вращений. Однако при движении смеси происходит не только деформирование отдельных континуумов, но и их взаимное смещение. Кинематически такое смещение может однозначно определяться компонентами вектора относительных перемещений (сдвиговая модель смеси). Основное внимание в главе уделяется обсуждению следующих вопросов: математические модели сдвиговых и инерционных смесей деформируемых твердых тел, учитывающие геометрическую и физическую нелинейности; дисперсионные свойства упругих продольных и сдвиговых волн, распространяющихся в указанных смесях; нелинейные эффекты при распространении упругих волн.

В десятой главе написаны уравнения движения двухфазной среды, состоящей из газа, в которой есть капельная система (облако в атмосфере), с учетом всех известных физических процессов (электрических и неэлектрических). Получены линейные дисперсионные уравнения и исследованы распространение и генерация акустических мод.

В одиннадцатой главе изучены линейные волны, появляющиеся на шероховатой свободной от напряжений поверхности, когда волна снизу падает на эту поверхность. Показано наличие разных волн, в частности показано, что шероховатость генерирует волны Рэлея.

В двенадцатой главе применены и развиты математические методы для описания линейных и нелинейных волн, в том числе и электромагнитных (лазерных), в газах с релаксацией, в теплопроводящем композите с внедренными шариками, в магнитных несимметричных жидкостях и в двухуровневой квантовой среде.

В тринадцатой главе изучена устойчивость солитонообразных волн при поперечных и продольных возмущениях. Найдены некоторые точные и приближенные решения эволюционного уравнения пятой степени.

В монографии используются и развиваются оригинальные результаты, полученные авторами при проведении исследований в Институте машиноведения им. А.А.Благонравова РАН (Нижегородский филиал), Институте механики НАН Армении, а также при проведении совместных исследований. Важное место занимает изучение эффектов самомодуляции упругих волн в средах со сложными физико-механическими свойствами (взаимодействие деформационных полей с электромагнитными полями, полями дефектов и др.).

Особенности распространения и взаимодействия нелинейных волн деформации в механических системах интенсивно изучаются последние три десятилетия во многих странах мира. Это связано, как уже говорилось, с многочисленными физическими, техническими и технологическими приложениями таких систем. Опубликован ряд монографий, посвященных нелинейным волнам в сплошных средах: [24, 65, 83, 112, 133, 165, 166, 192, 193, 203, 214, 225, 237, 250, 281, 327, 331, 363, 378, 392, 400].

Предлагаемая монография, посвященная, в первую очередь, изучению волновых процессов в средах, в которых существенно взаимодействие деформационных полей с полями иной физической природы, не дублирует содержание уже имеющихся книг, а призвана их дополнить, обретя свою нишу.

В основу книги положены работы [9, 17, 18, 25–61, 108, 113, 115–128, 267–276, 286–300, 330–340, 388, 389, 398, 406, 407]. В той или иной мере в ней удалось отразить и результаты исследований наших коллег-«волновиков», принадлежащих к различным научным школам Советского Союза [2, 3, 6, 8, 10–14, 20–23, 62–65, 67–69, 71, 75–77, 80–84, 87–89, 92, 95, 98–101, 103, 107, 130–135, 143, 145, 147, 152–155, 162–164, 176–178, 181–185, 192–194, 196–202, 204, 208–210, 213, 215, 216, 218, 220, 221, 224, 227, 228, 230, 231, 233, 234, 239, 245, 246, 252, 277, 278, 282, 349, 361, 383, 402].

Главы 2–5, 10, 11, 13, а также § 1.1–1.10, § 6.4, § 8.8, § 12.1–12.5, § 12.7, § 12.10 написаны А.В. Шекояном; А.Г. Багдоевым написаны § 6.1, § 12.6, § 12.8 и § 12.9; В.И. Ерофеевым — главы 7–9, а также § 1.11–1.14, § 6.2 и § 6.3.

Следует, однако, заметить, что, поскольку многие базовые публикации являются совместными, а в процессе работы над книгой авторы постоянно взаимодействовали (в том числе, осуществляя взаимное редактирование написанного), каждый из авторов несет полную ответственность за содержание монографии в целом.

Глава 1

ВОЛНЫ В ТВЕРДОЙ ВЯЗКОЙ СРЕДЕ С ПОЛОСТЯМИ

Введение

В природе имеется большое число веществ, содержащих полости, есть также искусственно созданные такие материалы, которые используют в различных приборах, например, в нанотехнике. В связи с этим представляет теоретический и практический интерес исследовать физические процессы в таких средах. В частности, результаты изучения волновых процессов в них можно использовать для неразрушающего контроля свойств таких сред.

В настоящее время достаточно хорошо изучено распространение волн в жидкости с пузырьками газа [192–194, 209, 98, 59, 130, 81]. В этих работах пользуются следующей физической моделью: в жидкости, содержащей пузырьки, распространяется акустическая волна, пузырьки под ее влиянием начинают колебаться. Для теоретического исследования такого процесса пользуются уравнениями гидродинамики и колебания пузырька.

Аналогичная физическая картина наблюдается, когда волна распространяется в твердом теле с полостями. Следовательно, можно пользоваться идеями гидродинамики. Подобная попытка сделана в книге [193], где выводится уравнение теории упругости и уравнения колебаний полостей. При этом ограничиваются одномерным приближением. В настоящей главе будет дано развитие этой теории в трехмерной постановке с использованием математических методов, развитых А.Г. Багдоевым и А.В. Шекояном [54, 286].

В основу этой главы положены работы [38, 287, 285, 118, 126, 298, 335–337, 388, 389].

§ 1.1. Постановка задачи

Пусть имеется полубесконечная изотропная вязкая (модель Фойхта) среда с полостями, в которой распространяются волны с конечной амплитудой (т. е. нелинейные волны при учете геометрической, физической и полостной нелинейностей). Матрица (основная среда) считается однородной. Предполагается, что расстояние между полостями l намного больше радиуса полостей R_0 $(l \gg R_0)$, но гораздо меньше длины волны Λ ($\Lambda \ll R_0$). Предполагается, что давлением в полостях можно пренебречь и что в среде распространяется квазипродольная волна, так что можно считать, что давление на полость обусловлено продольным напряжением $\sigma_{33} = (\lambda+2\mu)\dfrac{\partial u_3}{\partial x_3} - z'(\lambda+2\mu)$, где $z' = Nv'$, N — количество полостей в единице объема, v' — объем полости, $v' = v_0 + v$, v_0 — начальный объем полости, v — объем полости, возмущенной волной; λ, μ — константы Ламе, предполагается $\mu \ll \lambda$. При указанных предположениях, основываясь на работах [193, 286, 47], в лагранжевых координатах распространение квазипродольной нелинейной волны описывают следующие уравнения:

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u_{1,2}}{\partial t^2} = \mu \frac{\partial^2 u_{1,2}}{\partial x_3^2} + (\lambda+\mu)\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_{1,2}\partial x_3}, \tag{1.1}$$

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} = \mu \Delta_\perp u_3 + (\lambda+2\mu)\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2} + (\lambda+\mu)\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right) - \\ - N(\lambda+2\mu)\frac{\partial V}{\partial x_3} + b\frac{\partial^3 u_3}{\partial x_3^2 \partial t} + P\frac{\partial u_3^2}{\partial x_3^2}\frac{\partial u_3}{\partial x_3}, \tag{1.2}$$

$$\ddot{v} + \omega_0^2 v - \frac{R_0}{c_l}v - Gv^2 + \beta_1(2\,v\ddot{v} + \dot{v}^2) = (2\mu+\lambda)\frac{4\pi R_0}{\rho_0}\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_3} - Nv\right), \tag{1.3}$$

где ρ_0 — начальная плотность матрицы, b_1 — коэффициент вязкости, $\omega_0^2 = \dfrac{4\mu}{\rho_0 R_0}$ — квадрат резонансной частоты, $c_l^2 = \dfrac{\lambda+2\mu}{\rho_0}$, $G = (16\pi)^{-1}(9+2b_1)R_0^{-3}\omega_0^2$, $\beta_1 = \dfrac{1}{8\pi R_0^3}$, $P = (4\mu + 3\lambda + A + 6B + 2C)$, A, B, C — нелинейные коэффициенты Ландау. Координаты x_1 и x_2 выбраны в касательной плоскости к невозмущенной волне, а x_3 направлена вдоль распространения волны, подобно [62]. Предполагается, что в плоскости $x_3 = 0$, $u_1 = u_2 = 0$, т. е. основная волна продольная, поперечные слабые волны образуются при распространении продольных волн. Поперечные волны, как следствие, слабы, поэтому их уравнения линеаризованы.

§ 1.2. Вывод эволюционного уравнения

Сперва упростим уравнение (1.3), считая, что характерная частота волны α гораздо меньше, чем резонансная частота ($\alpha \ll \omega_0$), тогда нелинейным слагаемым в (1.3) при коэффициенте β_1 можно пренебречь. Главный член уравнения (1.3) есть

$$v = \frac{F}{D}\frac{\partial u_3}{\partial x_3}, \tag{1.4}$$

где $F = 4\pi R_0(\lambda+2\mu)\rho_0^{-1}$, $D = \omega_0^2 + FN$. Подставляя (1.4) в малые члены в уравнении (1.3), можно получить уточненное уравнение полости

$$v = \frac{F}{D}\frac{\partial u_3}{\partial x_3} - \frac{F}{D^2}\frac{\partial^3 u_3}{\partial x_3 \partial t^2} + \frac{R_0 F}{c_l D^2}\frac{\partial^4 u_3}{\partial x_3 \partial t^3} + \frac{GF^3}{D^3}\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right)^2. \qquad (1.5)$$

Учитывая (1.4) и (1.5), можно исключить в уравнении (1.2) величину v, тогда получится

$$\begin{aligned}\rho_0 \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} = {} & (\lambda+\mu)\frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right) + (\lambda + 2\mu)\left(1 - \frac{NF}{D}\right)\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2} + \\ & + \mu\Delta\perp u_3 + (\lambda+2\mu)\frac{NF}{D^2}\frac{\partial^4 u_3}{\partial x_3^2 \partial t^2} - \frac{R_0 NF}{c_l^2 D^2}(\lambda+2\mu)\frac{\partial^5 u_3}{\partial x_3^2 \partial t^3} + \\ & + \left[P - 2CF^2 N(\lambda+2\mu)D^{-3}\right]\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2}\frac{\partial u_3}{\partial x_3} + b\frac{\partial^3 u_3}{\partial x_3^2 \partial t}. \qquad (1.6)\end{aligned}$$

Итак, уравнение (1.6) следует решать совместно с уравнениями (1.1). Перейдем к новой координате $\tau_1 = (l_1 - x_3)\,c_l^{-1} - t = \tau_1' - t$. Так как в дальнейшем будет рассмотрен слой с толщиной l_1, удобно выбрать τ_1 в указанном выше виде, при полубесконечном случае $l_1 = 0$ и осью x_3 направленной противоположно распространению волны. В главном порядке после перехода к переменной τ_1 можно получить значение скорости распространения волны c_1 с учетом наличия полостей:

$$c_1^2 = c_l^2(1 - NFD^{-1}).$$

Вводя новую функцию $\psi_1 = \partial u_3/\partial \tau_1$, характеризующую скорость частиц среды (матрица) в переменных x_1, x_2, x_3 и τ_1, после исключения по (1.1) поперечных перемещений u_1 и u_2 при учете принятых порядков [47, 286], получится следующее эволюционное уравнение:

$$\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial \tau_1 \partial x_3} + L\Delta_\perp \psi_1 = \alpha_1 \frac{\partial}{\partial \tau_1}\left(\psi_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial \tau_1}\right) + \delta\frac{\partial^3 \psi_1}{\partial \tau_1^3} + \beta\frac{\partial^4 \psi_1}{\partial \tau_1^4} + \gamma\frac{\partial^5 \psi_1}{\partial \tau_1^5}, \quad (1.7)$$

где

$$\begin{aligned} L &= -[\mu + (\lambda+\mu)^2(\rho_0 c_1^2 - \mu)^{-1}]M_1^{-1}, \\ M_1 &= 2c_1^{-1}(1 - NFD^{-1})(\lambda+2\mu) = 2c_1\rho_0, \\ \alpha_1 &= M_1^{-1}c_1^{-3}[\rho - 2GF^2N(\lambda+2\mu)D^{-3}], \\ \delta &= bc_1^{-2}M^{-1}, \\ \beta &= FN(\lambda+2\mu)c_1^{-2}D^{-2}M^{-1}, \\ \gamma &= R_0FN(\lambda+2\mu)c_1^{-2}c_l^{-2}D^{-2}M^{-1}. \end{aligned} \qquad (1.8)$$

Как видно из (1.8), член с коэффициентом β связан с дисперсией и обусловлен полостями, а δ и γ обуславливают диссипацию, причем δ — вязкостью, а γ связан с полостями, при этом, когда $R_0 = 0$, $\rho = \gamma = 0$.

§ 1.3. Солитонное решение эволюционного уравнения пятого порядка

В уравнении (1.7) перейдем к новой функции $U = (\alpha_1/G)\psi_1$, тогда полученное уравнение будет таким, как и (1.7), только вместо ψ_1 будут U, а вместо α_1 — минус шесть. Если в полученном уравнении полагать $\delta = \gamma = 0$ и $\beta = -\beta_2$, то с точностью до коэффициентов получится уравнение Кадомцева–Петвиашвили [143], которое имеет солитонное решение [237] в следующем виде:

$$U_0 = \frac{C}{2}\,\mathrm{sech}^2\left(\frac{\sqrt{C}\,\xi_1}{2a\sqrt{\beta_2}}\right), \tag{1.9}$$

где $\xi_1 = a\tau_1 + b_2x_1 + d_2x_2 - kx_3$, $C = \left[ak - L\left(b_2^2 + d_2^2\right)\right]a^{-2}$, причем $C \geqslant 0$, $a > 0$, b_2 и d_2 показывают наклон плоскости фронта ($\xi_1 = \mathrm{const}$) солитона к оси x_3. Нормальная скорость солитона имеет вид

$$V_c^2 = \frac{a^2}{(ac_1^{-1} - k)^2 + b_2^2 + d_2^2}.$$

Постоянные a и k — некоторые характерные частота и волновое число процесса.

Решение уравнения для U будем искать в виде

$$U = U_n(\xi_1). \tag{1.10}$$

После постановки (1.10) в уравнение для U, дважды интегрируя с учетом, что U стремится к нулю при стремлении ξ_1 к бесконечности, получится следующее обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$a^2\beta_2\frac{d^2U_n}{d\xi_1^2} + 3U_n^2 - CU_n = \delta a\frac{dU_n}{d\xi_1} + a^3\gamma\frac{d^3U_n}{d\xi_1^3}. \tag{1.11}$$

Для отличных от нуля, но малых по сравнению с β коэффициентов δ и γ, что означает малость диссипации; решение уравнения (1.11) можно найти методом медленно меняющейся амплитуды [47, 267]. Тогда оно ищется в виде

$$U_n = U_0(\xi_1)[1 + T_3(\xi_1)], \tag{1.12}$$

причем требуется выполнение неравенств

$$T_3 \ll 1, \quad \frac{d^2T_3}{d\xi_1^2} \ll \frac{dT_3}{d\xi_1} \ll T_3. \tag{1.13}$$

Неравенства (1.13) означают, что из-за малой диссипации форма солитона мало и медленно меняется и функция $T_3(\xi_1)$ мала по величине. Подставляя (1.12) в уравнение (1.11), учитывая неравенства (1.13), для T_3 можно получить:

$$T_3 = \frac{a\delta}{3U_0}\frac{dU_0}{d\xi_1} + \gamma\frac{a^3}{3U_0}\frac{d^3U_0}{d\xi_1^3}. \tag{1.14}$$

После постановки (1.9) и выражения (1.14) для функции T_3 получится

$$T_3 = \frac{1}{3(C\beta_2)^{1/2}} \left[\frac{G\gamma C}{\beta_2} \operatorname{th} \left(\frac{\sqrt{C}\,\beta_2^{-1/2}}{2a} \xi_1 \right) - \left(\delta + \frac{\gamma C}{\beta_2} \right) \operatorname{sh} \left(2\, \frac{\sqrt{C}}{2a\sqrt{\beta_2}} \xi_1 \right) \right]. \tag{1.15}$$

В выражении (1.15) при стремлении ξ_1 к бесконечности T_3 тоже стремится к бесконечности, т. е. не выполняются неравенства (1.13). Поэтому решение (1.15) имеет смысл только вблизи вершины солитона, тогда для малых ξ_1 решение (1.15) можно преобразовать к виду

$$T_3 = \xi_1 \left[4\gamma C\beta_2^{-1} - 2\delta \right] (6a\beta_2)^{-1} = T_2 (6a\beta_2)^{-1} \xi_1. \tag{1.16}$$

Из (1.16) следует, что $T_3 > 0$, если ξ_1 одного знака с T_2; и $T_3 < 0$, если ξ_1 и T_2 противоположных знаков. Искажение формы солитона из-за диссипации качественно, но наглядно изображено на рис. 1.1, рис. 1.2, где пунктирная кривая соответствует функции (1.9)

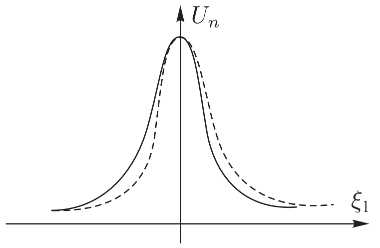

Рис. 1.1

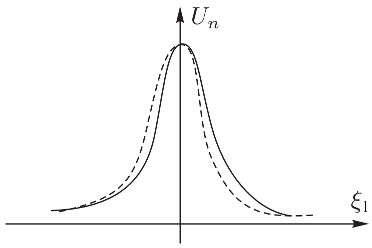

Рис. 1.2

при $T_3 = 0$, а сплошная — функции U_n. Следует отметить, что возможен также случай $T_2 = 0$, который означает, что в диссипативной среде возможно распространение такого же солитона, как в недиссипативной.

§ 1.4. Вывод уравнения модуляции для дифракционной и одномерной задач в случае квазимонохроматических волн

Поскольку нас будут интересовать не только стационарные, но и нестационарные задачи, в уравнении (1.7) заменяем $\dfrac{\partial}{\partial x_3} = c_1^{-1} \dfrac{\partial}{\partial t}$, тогда из (1.7) найдем

$$\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial t \partial \tau_1} + L\Delta_\perp \psi_1 = \alpha_1' \frac{\partial}{\partial \tau_1} \left(\psi_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial \tau_1} \right) + \delta' \frac{\partial^3 \psi_1}{\partial \tau_1^3} + \beta' \frac{\partial^4 \psi_1}{\partial \tau_1^4} + \gamma' \frac{\partial^5 \psi_1}{\partial \tau_1^5}, \tag{1.17}$$

где штрихованные коэффициенты получаются из коэффициентов (1.8) умножением на минус c_1. Так как в среде есть дисперсия и диссипация, решение уравнения (1.17) можно искать в виде квазимонохроматической волны:

$$\psi_1 = \frac{1}{2}\left\{A_1(\tau_1', x_1, x_2, t)\exp\left[i\,\alpha\tau_1 - (\nu + i\omega)\tau_1'\right] + + B_1(\tau_1', x_1, x_2, t)\times\right.$$
$$\left.\times\exp\left[2\,i\,\alpha\tau_1 - 2(\nu + i\omega)\tau_1'\right] + C_1(\tau_1', x_1, x_2, t) + \text{к.с.}\right\}, \quad (1.18)$$

где A_1, B_1, C_1 есть соответственно амплитуды первой, второй гармоник и свободный член, α — несущая частота, ω — модуляционная частота, а ν — коэффициент поглощения. При $\tau_1 = 0$ на границе среды задается монохроматическое колебание. В работах [45, 288] в решениях типа (1.18) в выражениях в экспонентах при $\tau_1 = 0$ остаются дисперсия и диссипация, что не очень естественно, хотя окончательные уравнения модуляции в основных порядках, как показано в расчетах статьи [47], получаются теми же.

Подставляя (1.18) в (1.17) для наивысших порядков, получим следующие дисперсионные соотношения:

$$\omega = \alpha^3\beta', \quad \nu = \alpha^2\delta' - \alpha^4\gamma'. \quad (1.19)$$

В следующих приближениях различаются две задачи: дифракционная и одномерная, для которых имеют место разные порядки величин. В обоих случаях можно получить следующее модуляционное уравнение для первой гармоники:

$$i\alpha\left(\frac{\partial A_1}{\partial t} + \frac{d\Omega}{d\alpha}\frac{\partial A_1}{\partial\tau_1'}\right) + \frac{\alpha}{2}\frac{d^2\Omega}{d\alpha^2}\frac{\partial^2 A_1}{\partial\tau_1'^2} + L'\Delta_\perp A_1 =$$
$$= (i\alpha - 3\nu - i\omega)^2\,\frac{\alpha'}{2}A_1^* B_1\exp(-2\nu\tau_1') + \alpha'(i\alpha - \nu - i\omega)^2 C_1 A_1, \quad (1.20)$$

где $\Omega = \alpha + \omega - i\nu$ — комплексная линейная частота. При вычислении коэффициента при $\dfrac{\partial^2 A_1}{\partial\tau_1'^2}$ в одномерной задаче использовано равенство

$$\frac{\partial}{\partial t} + \frac{d\Omega}{\partial\,\alpha}\,\frac{\partial}{\partial\tau_1'} = 0, \quad (1.21)$$

получаемое из главного члена в уравнении (1.20).

Уравнение для амплитуды второй гармоники B_1 после отбрасывания производных, что возможно в случае $\omega\tau_1' \gg 1$, для обеих задач получится в виде

$$4(3\omega - i\nu - 6i\alpha^4\gamma')B_1 = \alpha'\alpha A_1^2. \quad (1.22)$$

Свободный член C_1 в дифракционной задаче имеет порядок $C_1 \sim \varepsilon^3$, $\nu\varepsilon^3$, ε — некоторой малый параметр, характеризующий порядок ψ_1, причем $\alpha \sim \varepsilon^{-1}$, $x_{1,2} \sim \varepsilon^{1/2}$, тогда слагаемое с C_1 в (1.20) можно отбросить.

Чтобы получить уравнения для C_1 в одномерной задаче, в члене $\dfrac{\partial^2 C_1}{\partial t\partial\tau_1'}$ исключается производная по t согласно (1.21), при этом получится уравнение для свободного члена:

$$\left(\frac{2\,i\nu}{\alpha}-\frac{3\omega}{\alpha}-2\,i\alpha^3\gamma'\right)\frac{\partial^2 C_1}{\partial\tau_1'^2}=-\frac{\alpha}{2}\left(\nu\frac{\partial\,|A_1|^2}{\partial\tau_1'}-\frac{\partial^2\,|A_1|^2}{\partial\tau_1'^2}\right)\exp(-2\nu\tau_1'). \tag{1.23}$$

Для интерпретирования уравнения (1.23) рассмотрены два случая:

1) $\nu\tau_1'\gg 1$, тогда $\exp(-2\nu\tau_1')\approx 0$, и по (1.23) $C_1\approx 0$, так что аналогично дифракционной задаче свободный член не дает вклада в уравнение (1.20);

2) $\nu\tau_1'\ll 1$, тогда $\nu\dfrac{\partial\,|A_1|^2}{\partial\tau_1'}\ll\dfrac{\partial^2\,|A_1|^2}{\partial\tau_1'^2}$ и из (1.23) получится

$$4\left(-\frac{3\omega}{\alpha}+\frac{2\,i\nu}{\alpha}-2\,i\alpha^2\gamma'\right)C_1=\alpha\,|A_1|^2\,. \tag{1.24}$$

В одномерной задаче в случае 1) из (1.20) получается линейное уравнение. В случае 2), исключая из уравнения (1.20) B_1 и C_1, с помощью (1.22) и (1.24) можно получить, с учетом $\alpha\gg\omega$, ν, следующее уравнение:

$$i\left(\frac{\partial A_1}{\partial t}+\frac{d\Omega}{d\alpha}\frac{\partial A_1}{\partial\tau_1'}\right)+\frac{1}{2}\frac{d^2\Omega}{d\alpha^2}\frac{\partial^2 A_1}{\partial\tau_1'^2}=\frac{\alpha'^2}{2}\,[2(-3\omega+i\nu-6i\alpha^4\gamma')^{-1}-$$
$$-(2i\nu-3\omega-2i\alpha^4\gamma')^{-1}]A_1|A_1|^2. \tag{1.25}$$

Отметим, что, в отличие от дифракционной задачи, вклад C_1 в нелинейный член существенен.

В дифракционной задаче из (1.20), учитывая малость члена $\dfrac{\partial^2 A_1}{\partial\tau_1'^2}$ и отбрасывая C_1, можно найти

$$i\alpha\left(\frac{\partial A_1}{\partial t}+\frac{d\Omega}{d\alpha}\frac{\partial A_1}{\partial\tau_1'}\right)+L'\Delta_\perp A_1=\frac{\alpha'^2\alpha\,|A_1|^2\,A_1\exp(-2\nu\tau_1')}{8(i\nu-3\omega-6i\alpha^4\gamma')}. \tag{1.26}$$

§ 1.5. Постановка задачи о волновых полях в случае слоя

Вначале рассмотрим задачу об акустических волнах в резонаторе аналогично оптической задаче о волнах в бездиссипативном интерферометре [267]. В этом случае предполагается, что имеется два симметричных относительно плоскости $x_3=0$ акустических зеркала, которые являются поверхностями постоянной фазы для распространяющихся вправо и влево волн, каждая из которых удовлетворяет граничному условию на своем зеркале. В такой постановке в силу симметрии при $x_3=0$ $u_3=0$. Эта задача соответствует акустическому интерферометру [251], в котором левое зеркало служит источником колебаний, а справа имеется плоский жесткий рефлектор, и указанная постановка приводится к предыдущей задаче, в которой есть две волны. Аналогично этому в случае, когда имеется слой, на одном торце которого заданы колебания, а другой торец свободен от напряжений, можно считать, что имеются две распространяющиеся встречные волны. При этом идущая вправо волна удовлетворяет условию на излучателе, а отраженная от свободной поверхности волна вместе в падающей волной удовлетворяют условию на свободной поверхности. Этот вывод следует из сравнения с простым случаем распространения упругой одномерной линейной волны в слое, причем при $x_3 = 0$ $\dfrac{\partial u_3}{\partial x_3} = 0$, а при $x_3 = l_1$ $u_3 = e^{-i\alpha t}$. Решение волнового уравнения $\dfrac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} = c_1^{-2}\dfrac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2}$ при указанных граничных условиях при отсутствии начальных условий имеет вид

$$u_3 = \frac{1}{2}\left[\cos\frac{\alpha l_1}{c_1}\right]^{-1} \exp\left[\exp\left(i\frac{\alpha}{c_1}x_3 - i\alpha t\right) + \exp\left(-i\frac{\alpha}{c_1}x_3 - i\alpha t\right)\right]. \tag{1.27}$$

Таким образом для монохроматической волны решение в резонаторе представляет собой две волны, распространяющиеся навстречу друг другу. Аналогично этому для квазимонохроматических волн типа (1.18) получаются две идущие навстречу друг другу волны, амплитуды которых будут медленно меняющимися функциями за счет дисперсии, диссипации, нелинейности и дифракции.

Тот же вывод получается для резонатора, когда $u_3(x_3 = 0) = 0$, при этом в формуле (1.27) перед вторым слагаемым следует поменять знак и разделить вместо косинуса на $i\sin\dfrac{\alpha}{c_1}l_1$.

Формулу (1.27) для u_3 можно представить также в виде:

$$u_3 = \left\{\exp\left[i(x_3 - l_1)\frac{\alpha}{c_1} - i\alpha t\right] + \right.$$
$$\left. + \exp\left[i(x_3 + l_1)\frac{\alpha}{c_1} - i\alpha t\right]\right\} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \exp\left(2i\frac{\alpha n l_1}{c_2}\right). \tag{1.28}$$

Для высокочастотных волн ($\alpha \gg c_1 l_1^{-1}$) вклад в асимптотику решения дают лишь слагаемые в фигурной скобке, которые соответствуют падающей и отраженной от плоскости волнам, т. е. эйконалам τ_1 и τ_2, где $\tau_2 = (x_3 + l_1)c_1^{-1} - t$.

При этом, как следует из (1.28), граничное условие при $x_3 = l_1$ удовлетворяет только первым слагаемым в квадратной скобке. Остальные слагаемые там будут взаимно погашаться. Условие на свободной поверхности автоматически удовлетворяется первыми двумя членами. Таким образом, граничные условия удовлетворяются первыми двумя слагаемыми в (1.28), которые можно брать в качестве идущих направо и налево волн, а остальные слагаемые (с точностью до знака для задачи со свободной границей и соответственно точно для задачи о рефлекторе) периодически повторяют первые два члена (1.28) и могут быть включены в указанные две волны, что приводит к вышеуказанной постановке задачи.

В работах [45, 47, 145, 287, 288] для высокочастотной асимптотики записано решение квазилинейных систем уравнений в виде двух функций, каждая из которых зависит от своего эйконала. В предположении равенства нулю в основных порядках малости среднего значения искомых функций по своим эйконалам, система уравнений, описывающая волны, распространяющиеся вправо (однократно штрихованные, эйконал τ_1) и влево (двукратно штрихованные, эйконал τ_2) расщепляется на два независимых нелинейных уравнения. Условие равенства нулю средних по эйконалам значений функций выполняется как для дифракционных задач, в которых $c_{1,2}$ пренебрежимо малы, так и для одномерных задач, в которых $c_1 = c_2$, где c_i — свободный член отраженной волны. Уравнение (1.7) будет для падающей волны. Для отраженной волны получится уравнение типа (1.7), где ψ_1 заменены на ψ_2 и τ_1 на τ_2, причем $\psi_2 = \dfrac{\partial u_3}{\partial \tau_2}$. Аналогично следует записать уравнения (1.18)–(1.26), где в амплитудах и эйконалах следует заменить индекс «1» на «2».

§ 1.6. Дифракционная задача для узких пучков

Из уравнения (1.26), полагая $\dfrac{d\Omega}{d\alpha} = 1$ и для стационарной задачи $\dfrac{\partial A_1}{\partial t} = 0$, получим уравнение

$$i\alpha \frac{\partial A_1}{\partial \tau_1} + L\Delta_\perp A_1 = (\chi_1 + \chi_2)\, |A_1|^2 A_1, \tag{1.29}$$

где $\chi_1 = 3\omega\xi,\ \chi_2 = (\nu - 6\alpha^4\gamma')\xi,\ \xi = \dfrac{\alpha'^2\alpha}{8}\left[9\omega^2 + (\nu - 6\alpha^4\gamma')^2\right]^{-1} \times$ $\times \exp(-2\nu\tau_1')$.

В случае резонатора такое же уравнение получится для падающей волны A_1', а для отраженной волны следует заменить в (1.29) A_1 на A_1'' и τ_1' на $\tau_2' = (x_3 + l_1)\, c_1^{-1}$. Поэтому в дальнейшем будем писать решения для уравнения (1.29).

Запишем

$$A_1 = a_1 \exp(i\varphi_1), \tag{1.30}$$

где φ_1 — возмущенный эйконал, а a_1 — действительная амплитуда; подставляя (1.30) в уравнение (1.29), отделяя мнимые и действительные части, переходя к цилиндрическим координатам для осесимметричной задачи, получим уравнения для a_1 и φ. Они имеют вид

$$-\alpha a_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial \tau_1'} + L\frac{\partial^2 a_1}{\partial r^2} - a_1\left(\frac{\partial\, \varphi_1}{\partial r}\right)^2 + \frac{L}{r}\frac{\partial\, a_1}{\partial r} = \chi_1 a_1^3, \tag{1.31}$$

$$\alpha\frac{\partial a_1}{\partial \tau_1} + 2L\frac{\partial a_1}{\partial r}\frac{\partial \varphi_1}{\partial\, r} + La_1\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial r^2} + L\frac{a_1}{r}\frac{\partial \varphi_1}{\partial r} = \chi_2 a_1^3. \tag{1.32}$$

В уравнениях (1.31) и (1.32) r — цилиндрическая радиальная координата.

Решение уравнений ищется в виде

$$
\begin{gathered}
a_1 = b_1 f_1^{-1} \exp\Big[-\frac{r^2}{2}(r_1 f_1)^{-2}\Big], \\
\varphi_1 = \sigma_1(\tau_1) + \frac{r^2}{2} R_1^{-1}(\tau_1),
\end{gathered} \tag{1.33}
$$

где f_1 — безразмерная ширина пучка, σ_1 — набег фазы волны на оси пучка, $\alpha R_1 c_1^{-1}$ — переменный радиус кривизны фронта волны, b_1 и r_1 — амплитуды и радиус пучка на границе $x_3 = l_1$. Подставляя (1.33) в уравнения для a_1 и φ_1 обычным образом [45, 286, 287], получим следующую систему уравнений:

$$
R_1^{-1} = \frac{\alpha}{2Lf_1}\frac{d\,f_1}{d\,\tau_1'} + \frac{\chi_2 b_1^2}{2Lf_1^2}, \tag{1.34}
$$

$$
\frac{d\,\sigma_1}{d\,\tau_1'} = -2\left(\alpha L\, r_1^2 f_1^2\right)^{-1} - \chi_1 b_1^2 (\alpha f_1^2)^{-1} = G f_1^{-2}, \tag{1.35}
$$

$$
\frac{d^2 f_1}{d\,\tau_1'^2} = \frac{M}{f_1^3} + \frac{\chi_2 \nu b_1^2}{\alpha L f_1}, \tag{1.36}
$$

где

$$
M = \alpha^{-2}\left[L^2 r_1^{-4} + 2\chi_1 b_1^2 L r_1^{-2} - \chi_2^2 b_1^4\right]. \tag{1.37}
$$

Для отраженной волны имеют место уравнения (1.34)–(1.37), где следует индекс «1» заменить на «2» для R_1, σ_1, f_1, b_1 и r_1, а остальные величины заменить соответствующими штрихованными величинами.

§ 1.7. Граничные условия

Поскольку постановка задач для интерферометра и свободной границы аналогичны, рассмотрим вначале случай свободной границы. Для механических величин должны быть заданы условия на торцах слоя ($x_3 = 0$ и $x_3 = l_1$). Первое из них в плоскости ($x_3 = l_1$) или $\tau_1' = 0$ относится к падающей волне. Предполагается, что в этой плоскости задается пучок с гауссовским профилем и выполняются следующие условия:

$$
f_1(0) = 1, \quad \frac{df_1(0)}{d\tau_1'} = F, \quad \tau_1(0) = 0, \quad F = \frac{2L}{\alpha}\left[R_1^{-1}(0) - \frac{\chi_2}{2} b_1^2 L\right]. \tag{1.38}
$$

Уравнения (1.34)–(1.36) будем решать с граничными условиями (1.38). Для отраженной волны граничные условия заданы в плоскости $x_3 = 0$, в которой предполагается, что $\sigma_{32} = \sigma_{31} = \sigma_{33} = 0$. В наивысшем порядке эти уравнения расщепляются, так как ограничиваемся изучением пучка квазипродольных волн. В наивысшем порядке условие $\sigma_{33} = 0$ дает

$$
\frac{\partial u_3}{\partial x_3} = 0. \tag{1.39}
$$

В наивысшем порядке автоматически выполняется условие $\sigma_{32} = \sigma_{31} = 0$.

Подставляя в (1.39) $u_3 = u_3' + u_3''$, где u_3' соответствует падающей волне, а u_3'' — отраженной [45, 53, 288], переходя в выражениях $\psi_1 = -\dfrac{\partial u_3'}{\partial \tau_1}$ и $\psi_2 = -\dfrac{\partial u_3''}{\partial \tau_2}$ от координат τ_1 и τ_2 к x_3, учитывая $\dfrac{\partial}{\partial x_3} = \pm c_1^{-1}\dfrac{\partial}{\partial \tau_{1,2}}$, получим следующее граничное условие при $x_3 = 0$:

$$\psi_1 = -\psi_2. \tag{1.40}$$

Подставляя в (1.40) решение (1.18) при $\tau'_{1,2} = l_1/c_1$, ограничиваясь первой гармоникой, можно получить $A_1 = -A_2$, A_2 — амплитуда отраженной волны. Подставляя в последнее равенство эйкональные решения (1.30), а потом соотношения (1.33), можно получить для параметров пучка в плоскости $x_3 = 0$, $\tau_1' = l_1 c_1^{-1}$ следующие условия:

$$\begin{gathered} b_1 = -b_2, \quad f_1\left(\frac{l_1}{c_1}\right) = f_2\left(\frac{l_2}{c_1}\right), \quad R_1\left(\frac{l_1}{c_1}\right) = R_2\left(\frac{l_1}{c_1}\right), \\ \sigma_1\left(\frac{l_1}{c_1}\right) = \sigma_2\left(\frac{l_1}{c_1}\right), \quad \frac{d\, f_1(l_1 c_1^{-1})}{d\,\tau_1'} = \frac{d\, f_2(l_1 c_1^{-1})}{d\,\tau_2'}. \end{gathered} \tag{1.41}$$

Уравнения (1.34)–(1.36), написанные для отраженной волны, следует решать с граничными условиями (1.41). Из второго условия (1.41) следует, что всюду $r_1 = r_2$.

В случае интерферометра условие (1.38) имеет место для падающей волны. Вместо условия (1.39) будет $u_3 = 0$. Условия (1.41) остаются в силе, только первое равенство заменятся на $b_1 = b_2$.

§ 1.8. Уравнение безразмерной ширины пучка для неприосевых лучей

Уравнения (1.34)–(1.36) получены для приосевых лучей приравниванием нулевой и второй степеней радиальной координаты. Более общий подход для неприосевых лучей состоит в выборе уравнений (1.34) и (1.35), имеющих место на оси пучка, а взамен уравнения (1.36) берется интегральный закон сохранения, следующий из уравнений (1.29). В случае $\chi_2 = 0$ этот метод был применен в [286], где показано, что решение имеет такой же вид, что и для приосевых лучей, только коэффициент χ_1 заменяется на $\chi_1/4$, что лучше отражает характер численного решения уравнения Шредингера. Для $\chi_2 \neq 0$, когда учитывается нелинейное поглощение, умножаем уравнение (1.29) на $\dfrac{\partial A_1^*}{\partial \tau_1'}$, где A_1^* — комплексное сопряжение A_1. Умножим сопряженное для (1.29) уравнение на $\dfrac{\partial A_1}{\partial \tau_1'}$, сложим эти два уравнения, проинтегрируем их по цилиндрическим координатам r и θ. Тогда для случая осесимметричной задачи получится

$$-\frac{L}{2}\frac{d}{d\tau_1'}\left\{\int_0^\infty\left[\left|\frac{\partial A_1}{\partial r}\right|^2+\frac{\chi_1}{2}|A_1|^4\right]r\,dr\right\}=$$
$$=i\chi_2\int_0^\infty|A_1|^2\left(A_1\frac{\partial A_1^*}{\partial\tau_1'}-A_1^*\frac{\partial A_1}{\partial\tau_1'}\right)r\,dr. \quad (1.42)$$

Подставляя значение A_1, как в (1.30), и используя (1.34), (1.35), можно получить вместо (1.36) следующее уравнение:

$$f_1''=\left(f_1'+\frac{b_1^2\chi_2}{4\alpha f_1}\right)^{-1}\left\{f_1'\left[\left(\frac{L^2}{\alpha^2r_1^4}+\frac{b_1^2\chi_1L}{2\alpha^2r_1^2}+\frac{3b_1^4\chi_2^2}{2\alpha^2}\right)f_1^{-3}+\frac{\chi_2b_1^2}{\alpha}f_1^{-2}\right]+\right.$$
$$\left.+\frac{\chi_2b_1^2}{\alpha f_1}\left[2\nu+(f_1')^2(4f_1)^{-1}\right]+\frac{5\chi_2^2b_1^4\nu}{2\alpha^2f_1^2}+\left(\frac{L}{r_1^2}+\chi_1b_1^2\right)\frac{L\chi_2b_1^2}{f_1^4r_1^2\alpha^3}\right\}. \quad (1.43)$$

Полученное уравнение (1.43) следует решать при граничных условиях (1.38) и (1.41) численно. Поскольку численное решение уравнений (1.43) и (1.36) имеют одинаковую трудность, предпочтительно решать более точное уравнение (1.43). В предположении малой и большой диссипации можно полагать во всей фигурной скобке $\chi_2=0$. При этом получится совпадение с (1.36), только в последнем следует заменить χ_1 на $\chi_1/4$.

§ 1.9. Решение уравнения для безразмерной ширины пучка для приосевых лучей

Решение уравнения (1.36) будем искать в случаях слабого и сильного поглощения. В первом случае $\nu\tau_1$ и $\nu\tau_2$ малы, и экспоненты, входящие в $\chi_{1,2}$, можно считать равными единице. В случае сильного поглощения экспоненты можно считать нулями, и задача будет линейной. В случаях как сильного, так и слабого поглощения второе слагаемое в правой части уравнения (1.36) можно отбросить.

С учетом вышесказанного решение (1.36) с учетом (1.38) для $M<0$ и $M>0$ имеет вид

$$f_1^2=\frac{MF}{F^2+M}+(F^2+M)\left(\tau'+\frac{F}{F^2+M}\right)^2. \quad (1.44)$$

Для отраженной волны с учетом граничных условий (1.41) решение (1.36) имеет вид

$$f_2^2=\left[F_1^2+\frac{M}{f_1^2(0)}\right][\tau_1''+F_1f_1(0)]^2+\frac{M}{F_1^2+M'f_1^{-2}(0)}, \quad (1.45)$$

где $F_1=\dfrac{d\,f_1(0)}{d\,\tau'}$, $\tau'=-x_3c_1^{-1}$, $\tau''=x_3c_1^{-1}$.

Таким образом, получены решения для узких пучков в волноводах, позволяющие изучить их фокусирование.

§ 1.10. Анализ решений для узких пучков

Рассмотрение будет ограничено случаем фокальных пятен, который соответствует $M > 0$, $F < 0$. Полученная формула годится как для $\tau' < \tau'_{\text{фи}}$, так и для $\tau' > \tau'_{\text{фи}}$, где

$$\tau'_{\text{фи}} = -\frac{l_1}{c_l} - \frac{F}{F^2 + M}. \tag{1.46}$$

Формула (1.46) получается из условия $\dfrac{df_1}{d\tau'} = 0$.

При значении l_1, для которого $\tau'_{\text{фи}} < 0$, фокальное пятно находится внутри слоя, в случае $\tau'_{\text{фи}} > 0$ — вне слоя и при $\tau'_{\text{фи}} = 0$ — на границе слоя. Последний случай будет при $l = -c_1 F\ (F^2 + M)^{-1}$, тогда формула (1.44) упрощается и принимает вид

$$f_1^2 = \frac{M}{F^2 + M} + (F^2 + M)\ (\tau')^2. \tag{1.47}$$

Для отраженной волны ограничимся случаем $M' > 0$. Формулу (1.44) можно записать также в виде

$$f_1^2 = \frac{M}{F^2 + M} + (F^2 + M)\ \left(\tau' - \tau'_{\text{фи}}\right)^2. \tag{1.48}$$

Из (1.47) определяем $\dfrac{df_1(0)}{d\tau'} = -\tau'_{\text{фи}}\dfrac{F + M}{f_1(0)}$, и знак $\dfrac{d\,f_1(0)}{d\tau'}$ определяется знаком $\tau'_{\text{фи}}$. Когда $\tau'_{\text{фи}} < 0$, то $\dfrac{df_1(0)}{d\tau'} > 0$, $\dfrac{df_2(0)}{d\tau''} > 0$, и в (1.45) следует брать знак «плюс». При $\tau'_{\text{фи}} > 0$ $\dfrac{df_1(0)}{d\tau'} < 0$, $\dfrac{df_2(0)}{d\tau''} < 0$, тогда в (1.45) выбирается знак «минус». В обоих случаях в формуле (1.45) вторая квадратная скобка может быть записана в виде

$$\left[\tau'' + F_1 f_1(0)\right].$$

Фокальное пятно отраженной волны находится из условия $\dfrac{df_2}{d\tau''} = 0$. Тогда приравнивая нулю (1.47), можно найти

$$\tau''_{\text{фи}} = -F_1 f(0). \tag{1.49}$$

При $F_1 < 0$ $\tau''_{\text{фи}}$ находится внутри слоя, тогда как $\tau'_{\text{фи}}$ находится вне слоя, а при $F_1 > 0$ $\tau''_{\text{фи}}$ находится вне слоя, тогда как $\tau'_{\text{фи}}$ находится внутри слоя.

В случае $\tau'_{\text{фи}} = \dfrac{df_1(0)}{d\tau'} = \dfrac{df_2(0)}{d\tau''} = 0$, учитывая, что

$$f_1^2(0) = M(F^2 + M)^{-1},$$

формулу (1.45) можно записать в виде

$$f_2^2\,\frac{M'}{f_1^2(0)}\,(\tau'') + f_1^2(0) = \frac{M'(F^2+M)}{M}(\tau'')^2 + M(F^2+M)^{-1}. \qquad (1.50)$$

Итак, $\tau'_{\text{фи}} = 0$, $\tau''_{\text{фи}} = 0$, т. е. обе фокальные точки находятся на свободной границе среды.

§ 1.11. Переход к одномерному случаю. Анализ дисперсионных свойств плоских волн

Распространение продольной волны в материале, содержащем полости, вдоль оси x_3 может быть описано следующей системой двух нелинейных уравнений (поскольку далее в главе рассматривается одномерное уравнение, для удобства записи обозначение координаты x_3 заменено на x, так же как обозначение для продольной составляющей вектора перемещений u_3 заменено на u):

$$\rho_0\,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = (\lambda+2\mu)\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - N(\lambda+2\mu)\,\frac{\partial v}{\partial x} + b\frac{\partial^3 u}{\partial t\partial x^2} + \frac{P}{2}\,\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2, \qquad (1.51)$$

$$\ddot v + \omega_0^2 v - \frac{R_0}{c_l}\,\dddot v - Gv^2 - \beta_1(2v\ddot v + \dot v^2) = (\lambda+2\mu)\,\frac{4\pi R_0}{\rho_0}\left(\frac{\partial u}{\partial x} - Nv\right). \qquad (1.52)$$

Первое уравнение описывает распространение плоской продольной волны в материале с порами при учете особенностей, вызванных изменением объемов пор. Второе уравнение описывает процесс осцилляторного изменения объема полостей под влиянием деформации основной матрицы.

В линейном приближении дисперсионные свойства продольной волны описываются уравнением

$$\omega^4 - \left(\omega_0^2 + 4\pi R_0 c_l^2 N + c_l^2 k^2\right)\omega^2 + \omega_0^2 c_l^2 k^2 = 0, \qquad (1.53)$$

которое получается при подстановке в (1.51), (1.52) (при $P=0$, $G=0$ и при отсутствии вязкости) решения в виде бегущей гармонической волны $u,\ v \approx e^{i(\omega t - kx)}$, где ω — круговая частота, $k = 2\pi/\Lambda$ — волновое число.

Продольная волна, распространяющаяся в смеси, обладает дисперсией, т. е. ее фазовая скорость $V_{\text{ф}} = \omega/k \neq \text{const}$. В частотном диапазоне от $\omega = 0$ до

$$\omega = \omega_* = \omega_0\sqrt{1 + \frac{3}{4}\left(\frac{c_l}{c_\tau}\right)^2 m} \qquad (1.54)$$

(где $c_\tau^2 = \mu/\rho_0$) имеется одна дисперсионная ветвь, а при $\omega \geqslant \omega_*$ появляется вторая дисперсионная ветвь.

Через $m = (4/3)\pi R_0^3 N$ обозначено отношение объема полостей к объему материала.

В одномерных уравнениях (1.51), (1.52) , описывающих распространение плоской волны, также присутствует слагаемое, отвечающее за рассеяние энергии волны за счет вязкости основной матрицы и за рассеяние на колеблющихся полостях. На рис.1.3 показана зависимость фазовой скорости волны, распространяющейся в вязком материале, от пористости материала на различных частотах. На более высоких

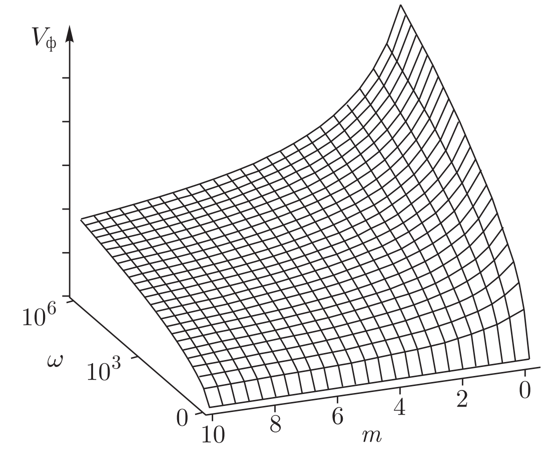

Рис. 1.3

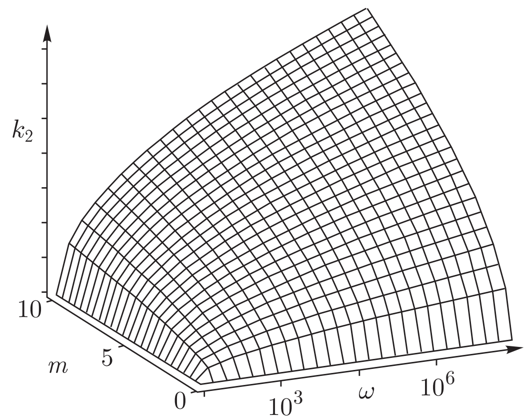

Рис. 1.4

частотах вязкость значительно влияет на скорость волны. Рис.1.4 показывает, что пористость вносит тем больший вклад в затухание, чем выше частота распространяющейся волны.

§ 1.12. Получение эволюционных уравнений методом связанных нормальных волн

Существует достаточно много физически и математически корректных методов перехода от исходных уравнений к эволюционным [214]. В данных исследованиях использовался метод связанных нормальных волн, развитый в [208]. Исходные системы переписываются в виде:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{B}\,(q)\,\mathbf{u} = \mathbf{F}\,(u, q)\,. \tag{1.55}$$

Здесь $\mathbf{u}^T = (V, u, v, Q)$ — четырехмерный вектор физических переменных; $V = \partial u/\partial t$, $Q = \partial v/\partial t$;

$$B(q) = \begin{pmatrix} 0 & -c_l^2 q^2 & c_l^2 N q^2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -4\pi R_0 c_l^2 q & \omega_0^2 + 4\pi R_0 c_l^2 N & 0 \end{pmatrix}$$

— линейная операторная матрица, $q = \partial/\partial x$ — оператор дифференцирования; $\mathbf{F}^T = \left(\dfrac{P}{\rho_0}\, q^3 u^2, 0, 0, G v^2\right)$ — вектор нелинейных величин.

Переход от (1.51), (1.52) к уравнениям связанных нормальных волн заключается в диагонализации операторной матрицы $B\,(q)$ путем перехода в ее собственный базис с помощью замены переменных

$$u\,(x,t) = \sum_{k=1}^{4} r_k\,(q) W_k\,(x,t)\,, \tag{1.56}$$

где $W_k\,(x,t)$ — новые переменные, $\mathbf{r}_k$ — правые собственные векторы матрицы $B\,(B\mathbf{r}_k = p_k \mathbf{r}_k)$; $p_k\,(q)$ — ее собственные значения.

Подставим (1.56) в (1.55). Умножим их на левые собственные векторы $\mathbf{l}_j\,(q)$ и, воспользовавшись условием ортогональности $\mathbf{l}_j \mathbf{r}_k = 0$ при $j \neq k$, получим уравнения связанных нормальных волн $(\partial W_k/\partial t) + p_k\,(q)\, W_k = (\mathbf{l}_j \mathbf{r}_k)^{-1}\,[\mathbf{l}_k \mathbf{F}\,(r_k W_k, q)]$, где p_k определяет различные ветки дисперсионного уравнения линеаризованной системы. Произвол в выборе собственных векторов можно использовать для приведения правой части к наиболее простому виду. Воспользовавшись этим и раскладывая собственные значения p_k в ряды Тейлора по q, ограничиваясь первыми двумя слагаемыми, придем к следующим эволюционным уравнениям:

$$\begin{gathered} i\,\frac{\partial W_1}{\partial t} - a_1 \frac{\partial^2 W_1}{\partial x^2} + a_2 W_1 = b_1 \frac{\partial^2}{\partial x^2}\,(W_1 + W_2 + W_3 + W_4)^2\,, \quad W_2 = W_1^*, \\ \frac{\partial W_{3,4}}{\partial t} \pm c_2 \frac{\partial W_{3,4}}{\partial x} \pm g\,\frac{\partial^3 W_{3,4}}{\partial x^3} = \mp b_2 \frac{\partial}{\partial x}\,(W_1 + W_2 + W_3 + W_4)^2\,, \end{gathered} \tag{1.57}$$

где W^* — величина, комплексно-сопряженная с W.

Эволюционные уравнения одинаковы по виду для обеих моделей, отличаются они лишь выражениями для коэффициентов и связью новых переменных с исходными.

Коэффициенты эволюционного уравнения будут выглядеть следующим образом:

$$a_1 = \frac{2c_l^4 \pi R_0 N \sqrt{\omega_0^2 + 4\pi R_0 c_l^2 N}}{\left(\omega_0^2 + 4\pi R_0 c_l^2 N\right)^2}, \quad a_2 = \sqrt{\omega_0^2 + 4\pi R_0 c_l^2 N}\,,$$

$$c_2 = \frac{c_l \omega_0}{\sqrt{\omega_0^2 + 4\pi R_0 c_l^2 N}}, \quad g = \frac{c_l^3}{8\omega_0 \sqrt{\omega_0^2 + 4\pi R_0 c_l^2 N}},$$

$$b_1 = \frac{0{,}5P}{\rho_0 \sqrt{\omega_0^2 + 4\pi R_0 c_l^2 N}},$$

$$b_2 = \frac{P}{2\rho_0} \frac{\sqrt{\omega_0^2 + 4\pi R_0 c_l^2 N}}{c_l \omega_0} \left\{1 - \rho_0 G \left(1 + \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 + 4\pi R_0 c_l^2 N}\right)^3 \frac{1}{4\pi R_0 P N^2}\right\}.$$

Связь новых переменных (W_i) с исходными (u, v) определяется выражениями

$$\frac{\partial u}{\partial x} = W_1 + W_2 + W_3 + W_4,$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \left\{\left(1 + \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 + 4\pi R_0 c_l^2 N}\right) \frac{\partial}{\partial x}\right\} \frac{(W_1 + W_2)}{N} - \\ - \frac{\left(\omega_0^2 + 4\pi R_0 c_l^2 N\right)(W_3 + W_4)}{c_l^2 N\,(\partial/\partial x)}.$$

Для $W_{1,2}$ система представляет собой комплексно-сопряженные уравнения Шредингера, а для $W_{3,4}$ — уравнения Кортевега–де Вриза. Нелинейность приводит к тому, что все четыре уравнения оказываются связанными между собой.

Анализ системы (1.57) показал, что в широком частотном диапазоне эволюционные уравнения достаточно хорошо аппроксимируют дисперсионные зависимости исходных систем. Дисперсионные зависимости, соответствующие исходной системе и системе эволюционных уравнений $(K\,dV, Sch)$, показаны на рис. 1.5.

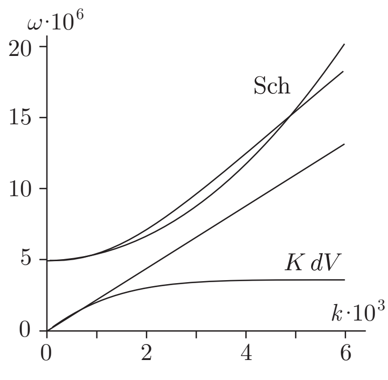

Рис. 1.5

Переход к системе эволюционных уравнений позволяет оценить

Таблица 1.1

Параметры упругой нелинейности в различных материалах

Материал	Параметр нелинейности b_2/c_2	Метод определения	Частота сигнала	Авторы
Супеси	2500	Кроссмодуляция	$f_1 = 10$–90 Гц $f_2 = 40$ Гц	А.С. Алешин и др. [8]
Грунт	10^4	Генерация гармоник	—	В.В. Гущин Г.М. Шалашов [101]
Гранит	$5 \cdot 10^4$	Барическая зависимость скоростей	—	В.Н. Бакулин, А.Г. Протосеня (см. [83])
Слабо-песчанистые алевритные глины	2500	Межскважинное прозвучивание с кроссмодуляцией	$f_1 = 40$ Гц $f_2 = 3$ кГц	А.Л. Грошков, Р.Р. Калимулин, Г.М. Шалашов (см. [83])
Суглинистая почва	700–1000	Кроссмодуляция	$f_1 = 50$ Гц $f_2 = 3$ кГц	А.Л. Грошков, Р.Р. Калимулин, Г.М. Шалашов (см. [83])
Пластизоль сферич. поры цилиндр. поры	370–1100 $2{,}8 \cdot 10^3$–$2{,}6 \cdot 10^4$	Анализ нелинейных искажений	3 кГц	И.Ю. Беляева, Е.М. Тиманин (см. [83])
Речной песок Гранит Мрамор	800 250 $2{,}9 \cdot 10^8$	Резонансный	(3–10) кГц	С.В. Зименков, В.Е. Назаров (см. [83])
Образец из зерен туфа	130–1500	Метод генерации второй и третьей гармоник	—	И.Ю Беляева, В.Ю. Зайцев, Л.А. Островский (см. [83])
Кристаллические породы Метаморфические породы Осадочные породы	10–100 100–1000 10^3–10^4	— — —	0,5–20 Гц 0,5–20 Гц 0,5–20 Гц	А.В. Николаев (см. [83])

вклад «полостной» нелинейности в общую нелинейность. Это можно осуществить, проанализировав зависимость коэффициента нелинейности b_2/c_2 от m.

При увеличении m и выполнении условия $\Lambda \gg L \gg R_0$ коэффициент нелинейности ведет себя как $b_2/c_2 = (P/2\rho_0 c_l^2) \times \times \left[1 + (3/4)\,(c_l/c_\tau)^2\, m\right]$, т. е. линейно растет с ростом m и может существенно превосходить значения «классической» геометрической и физической нелинейностей материала, что согласуется с имеющимися экспериментальными данными (табл. 1.1).

§ 1.13. Фазово-групповой синхронизм низкочастотных и высокочастотных волн

Считаем, что в среде в положительном направлении оси x распространяются волна W_3 с частотой $\omega_{\text{н}}$ и волновым числом $k_{\text{н}}$ и волна W_1 с частотой $\omega_{\text{в}}$ и волновым числом $k_{\text{в}}$. При этом $\omega_{\text{н}} \ll \omega_{\text{в}}$, т. е. волну W_3 отождествляем с вибрационным полем, а волну W_1 — с ультразвуковым акустическим сигналом.

В результате взаимодействия двух волн из-за квадратичной нелинейности системы (1.57) будет генерироваться волна W_1 суммарной частоты ω_Σ, удовлетворяющей условиям трехчастотного резонансного взаимодействия:

$$\omega_\Sigma = \omega_{\text{н}} + \omega_{\text{в}} \tag{1.58}$$

$$k_\Sigma = k_{\text{н}} + k_{\text{в}} \tag{1.59}$$

Частота и волновое число вибрационного поля должны при этом подчиняться закону дисперсии уравнения Кортевега–де Вриза:

$$\omega_{\text{н}} = c_2 k_{\text{н}} - g k_{\text{н}}^3, \tag{1.60}$$

а частоты и волновые числа ультразвука должны подчиняться закону дисперсии уравнения Шредингера, т. е. удовлетворять соотношениям:

$$\omega_{\text{в}} = a_1 k_{\text{в}}^2 + a_2, \tag{1.61}$$

$$\omega_\Sigma = a_1 k_\Sigma^2 + a_2. \tag{1.62}$$

Ультразвуковая волна суммарной частоты ω_Σ должна, согласно поставленной задаче, подчиняться еще и условию фазово-группового синхронизма с вибрационным полем, т. е.

$$V_{\text{гр}_\Sigma} = V_{\text{ф}_{\text{н}}}, \tag{1.63}$$

где $V_{\text{гр}_\Sigma} = \dfrac{d\omega_\Sigma}{dk_\Sigma}$ — групповая скорость ультразвука, а $V_{\text{ф}_{\text{н}}} = \dfrac{\omega_{\text{н}}}{k_{\text{н}}}$ — фазовая скорость вибрационного поля.

Для определения частот и волновых чисел, при которых возможны рассматриваемые процессы, следует решить систему алгебраических уравнений (1.58)–(1.63), которая решается аналитически при учете того обстоятельства, что условие (1.63) сведется к соотношению

$$c_2 = 2a_1 k_\Sigma, \tag{1.64}$$

поскольку вклад величины $\sim k_{\text{н}}^2$ в значении фазовой скорости вибрационного поля пренебрежимо мал.

Из решения системы (1.58)–(1.64) находим значения частот волн, участвующих в фазово-групповом синхронизме:

$$\begin{aligned} \omega_{\text{н}} &= 16\,\frac{c_l^2 \pi R_0 N \omega_0^2}{\left(\omega_0^2 + 4\pi R_0 N \omega_0^2\right)^{3/2}}, \\ \omega_{\Sigma} &= \sqrt{\omega_0^2 + 4\pi R_0 N \omega_0^2}\,\left\{1 + \frac{\omega_0^2}{8\pi c_l^2 R_0 N}\right\}. \end{aligned} \tag{1.65}$$

Графическое решение системы уравнений (1.58)–(1.64) приведено на рис. 1.6. При этом $\operatorname{tg}\theta = \dfrac{d\omega_{\Sigma}}{dk_{\Sigma}} = \dfrac{\omega_{\text{н}}}{k_{\text{н}}}$.

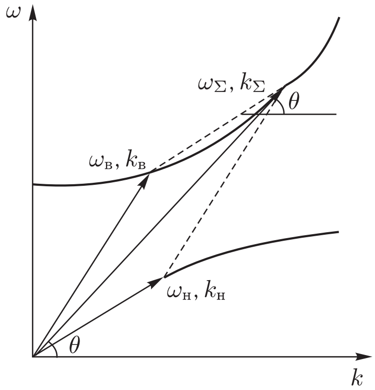

Рис. 1.6

Из анализа величины отношения $\omega_{\Sigma}/\omega_{\text{н}}$ определены параметры модели твердого пористого материала, при которых возможен процесс фазово-группового синхронизма. Так, при $\omega_{\Sigma}/\omega_{\text{н}} \sim 10^2$ получаем количество полостей в единице объема $N \sim 10^5$ с радиусами $R_0 \sim 10^{-2}$ м, а из соотношения между радиусом полости, расстоянием между полостями и длиной волны может быть найден объем материала для конкретных длин распространяющихся в нем волн.

Пусть отношение $\varepsilon = k_{\text{н}}/k_{\Sigma}$ характерных волновых чисел вибрационного поля и ультразвуковой волны мало. Воспользуемся традиционным переходом в подвижную систему координат с изменением масштабов времени и пространства

$$\xi = \varepsilon\left(x - V_{\text{гр}\Sigma} t\right), \quad \tau = \varepsilon^2 t. \tag{1.66}$$

Производные $\partial/\partial x$ и $\partial/\partial t$ при введении нового набора независимых переменных $x, t; \xi, \tau$ преобразуются по следующему закону:

$$\frac{\partial}{\partial t} \to -\varepsilon V_{\text{гр}\Sigma}\,\frac{\partial}{\partial \xi} + \varepsilon^2\,\frac{\partial}{\partial \tau}; \quad \frac{\partial}{\partial x} \to \omega\,\frac{\partial}{\partial \xi}.$$

Переходя в системе (1.57) (при $W_4 = 0$) к новым переменным, получаем

$$\begin{aligned} \left(V_{\text{гр}\Sigma} - c_2\right)\frac{\partial \widetilde{V}}{\partial \xi} - \varepsilon\frac{\partial \widetilde{V}}{\partial \tau} &= 2b_2\frac{\partial}{\partial \xi}\left(|A|^2\right), \\ i\frac{\partial A}{\partial \tau} - a_1\frac{\partial^2 A}{\partial \xi^2} &= -2b_1 k^2 A\widetilde{V}. \end{aligned} \tag{1.67}$$

Здесь кроме новых координат и времени появляются функции A и $\widetilde{V}$:

$$W_1 = Ae^{i\phi} + \text{к.с.}, \quad W_3 = \widetilde{V}, \quad \phi = k\xi - \omega\tau, \tag{1.68}$$

где через к.с. — обозначена комплексно-сопряженная величина.

В отсутствие резонанса ($V_{\text{гр}\Sigma} \neq c_2$) второе слагаемое в первом уравнении системы (1.67) оказывается много меньше первого, что дает $\widetilde{V} = 2b_2 \left|A\right|^2 / \left(V_{\text{гр}\Sigma} - c_2\right)$ и позволяет привести систему (1.67) к одному нелинейному уравнению Шредингера для комплексной амплитуды ультразвуковой волны:

$$iA_\tau - a_1 A_{\xi\xi} = -\frac{4b_1 b_2}{\left(V_{\text{гр}\Sigma} - c_2\right)} k^2 \left|A\right|^2 A. \tag{1.69}$$

В случае резонанса существует такое $k_{\Sigma}*$, при котором $V_{\text{гр}\Sigma}\left(k_{\Sigma}*\right) = c_2$, т. е. групповая скорость коротких ультразвуковых волн совпадает с фазовой скоростью длинных вибрационных сигналов.

Из условия резонанса может быть выражена длина волны λ^* возбуждаемого ультразвука:

$$\lambda^* = \frac{c_l}{c_\tau} \frac{\pi R_0}{\left(1 + \left(\dfrac{c_\tau}{c_l}\right)^2 \dfrac{1}{\pi R_0^3 N}\right)}. \tag{1.70}$$

Приближение длинно-короткого волнового резонанса будет тем точнее работать, чем строже выполняется неравенство $\lambda^*/\lambda_{\text{н}} \sim \varepsilon \ll 1$, где $\lambda_{\text{н}}$ — длина низкочастотной волны, причем $\lambda_{\text{н}} \gg \left(\dfrac{g}{c_2}\right)^{1/2} = \dfrac{R_0}{4\sqrt{2}} \dfrac{c_l}{c_\tau}$. Последнее неравенство следует из дисперсионного соотношения и означает, что наиболее эффективный резонанс действительно достигается в области линейного участка дисперсионной кривой уравнения Кортевега–де Вриза.

Известно, что в кубически-нелинейной среде квазигармоническая волна может оказаться неустойчивой по отношению к разбиению на отдельные волновые пакеты. Это явление называется модуляционной неустойчивостью или самомодуляцией [142, 250].

Наличие модуляционной неустойчивости определяется из уравнения (1.69) с помощью критерия Лайтхилла и возникает в рассматриваемой системе, если

$$\frac{4a_1 b_1 b_2 k^2}{V_{\text{гр}\Sigma} - c_2} < 0. \tag{1.71}$$

Поскольку $b_1 > 0$, $b_2 > 0$, $a_1 > 0$, условие (1.71) эквивалентно неравенству

$$V_{\text{гр}\Sigma} - c_2 < 0. \tag{1.72}$$

Таким образом пространственная локализация ультразвуковой волны будет наблюдаться до наступления фазово-группового синхронизма.

Введем в рассмотрение вместо комплексной амплитуды A действительные амплитуду (a) и фазу (φ): $A = ae^{i\varphi}$. Тогда уравнение