

А.В. АРУТЮНОВ

**ЛЕКЦИИ
ПО ВЫПУКЛОМУ
И МНОГОЗНАЧНОМУ АНАЛИЗУ**

Допущено УМО по классическому университетскому образованию
в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений,
обучающихся по направлениям 010100 «Математика»,
010400 «Прикладная математика и информатика»
и 010300 «Фундаментальная информатика и информационные технологии»



МОСКВА
ФИЗМАТЛИТ®
2014

УДК 517+519.8

ББК 22.162

А 86

Арутюнов А.В. **Лекции по выпуклому и многозначному анализу.** — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2014. — 184 с. — ISBN 978-5-9221-1558-2.

В основу настоящего учебника положен годовой курс лекций, разработанный автором и читаемый им на протяжении ряда лет в МГУ на кафедре системного анализа факультета ВМК и в РУДН на кафедре нелинейного анализа и оптимизации.

Допущено УМО по классическому университетскому образованию в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлениям 010100 «Математика», 010400 «Прикладная математика и информатика» и 010300 «Фундаментальная информатика и информационные технологии».

Учебное издание

АРУТЮНОВ Арам Владимирович

**ЛЕКЦИИ ПО ВЫПУКЛОМУ
И МНОГОЗНАЧНОМУ АНАЛИЗУ**

Редактор *В.С. Аролович*

Оригинал-макет: *Д.П. Вакуленко*

Оформление переплета: *Н.Л. Лисицына*

Подписано в печать 19.05.2014. Формат 60×90/16. Бумага офсетная.

Печать офсетная. Усл. печ. л. 11,5. Уч.-изд. л. 11,6. Тираж экз. Заказ №

Издательская фирма «Физико-математическая литература»

МАИК «Наука/Интерпериодика»

117342, Москва, ул. Бутлерова, 17Б

E-mail: fizmat@maik.ru, fmlsale@maik.ru;

<http://www.fml.ru>

Неизвестная типография

...
...
...
...

ISBN 978-5-9221-1558-2



9 785922 115582

ISBN 978-5-9221-1558-2

© ФИЗМАТЛИТ, 2014

© А.В. Арутюнов, 2014

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	5
Список обозначений	8
Часть 1. Выпуклый анализ	11
§ 1.1. Выпуклые множества и их свойства	11
§ 1.2. Выпуклая оболочка множества. Внутренность выпуклых множеств	16
§ 1.3. Аффинная оболочка множества. Относительная внутренность выпуклых множеств	21
§ 1.4. Теоремы отделимости выпуклых множеств.	29
§ 1.5. Выпуклые функции	38
§ 1.6. Замкнутость, ограниченность, непрерывность и липшицевость выпуклых функций	46
§ 1.7. Сопряженные функции	54
§ 1.8. Опорные функции	61
§ 1.9. Дифференцируемость выпуклых функций и субдифференциал	68
§ 1.10. Выпуклые конусы	81
§ 1.11. Немного о выпуклых конусах в бесконечномерных пространствах	86
§ 1.12. Задача линейного программирования	89
§ 1.13. Еще о выпуклых множествах и выпуклых оболочках	94
Часть 2. Многозначный анализ	101
§ 2.1. Введение в теорию топологических и метрических пространств	101
§ 2.2. Метрика Хаусдорфа и расстояние между множествами	105

§ 2.3. Многозначные отображения. Полунепрерывные сверху и полунепрерывные снизу многозначные отображения. . . .	113
§ 2.4. База топологии пространства $\mathcal{H}_c(X)$	125
§ 2.5. Измеримые многозначные отображения. Измеримые селекторы и теоремы об измеримом выборе.	127
§ 2.6. Теорема Майкла и непрерывные селекторы. Липшицевы селекторы	135
§ 2.7. Специальные селекторы многозначных отображений	140
§ 2.8. Дифференциальные включения	148
§ 2.9. Неподвижные точки и точки совпадения отображений в метрических пространствах	155
§ 2.10. Точки совпадения многозначных отображений	166
§ 2.11. Устойчивость точек совпадения и свойства накрывающих отображений	172
Список литературы	179
Предметный указатель	182

Предисловие

Около двадцати лет назад заведующий кафедрой системного анализа факультета вычислительной математики и кибернетики МГУ им. М. В. Ломоносова академик РАН А. Б. Куржанский предложил автору этих строк разработать курс «Выпуклый и многозначный анализ». Настоящая книга — это результат систематизации материала этих лекций, которые автор читает в МГУ с 1993 г. студентам третьего курса. Опыт, накопленный при чтении лекций, обусловил структуру книги и ее содержание.

Книга, как и сам двухсеместровый курс, состоит из двух взаимосвязанных частей. Первая часть (она соответствует материалу первого семестра) посвящена выпуклому анализу. Этот термин сформировался во второй половине прошлого века и означает молодой раздел математики, тесно примыкающий к анализу и геометрии. Становление выпуклого анализа как самостоятельной дисциплины было обусловлено бурным развитием теории оптимизации, математической экономики и различных областей прикладной математики, в которых все более важную роль играют методы, связанные с понятием выпуклости.

Вторая часть посвящена многозначному анализу. Это тоже молодой раздел математики, тесно примыкающий к функциональному анализу и возникший также во многом благодаря приложениям, в особенности из теории управления. Основным предметом многозначного анализа является исследование отображений, которые ставят в соответствие каждой точке исходного множества не одну точку пространства-образа, а целое его подмножество. Такие отображения называются многозначными. Достаточно подробное представление о содержании книги дает ее оглавление.

Большая часть изложенного материала достаточно традиционна и основана на подходах, частично разработанных в замечательных книгах, некоторые из которых мы здесь перечислим. По выпуклому анализу — это, в первую очередь, изданная в 1970 г. монография Р. Т. Рокафеллара [1], которая давно стала «энциклопедией по конечномерному выпуклому анализу». Затем появились книги А. Д. Иоффе и В. М. Тихомирова [2], Б. Н. Пшеничного [3], И. Экланда и Р. Темама [4], В. М. Алексеева,

В. М. Тихомирова и С. В. Фомина [5], Ж. Борвейна и А. Льюиса [6], Е. С. Половинкина и М. В. Балашова [7] и др. По многозначному анализу хотелось бы выделить книги Ю. Г. Борисовича, Б. Д. Гельмана, А. Д. Мышкиса и В. В. Обуховского [8], Ж. Борвейна и А. Льюиса [6], Е. С. Половинкина и М. В. Балашова [7], Дж. Варги [9, § 1.7].

В то же время предлагаемая читателю книга не повторяет перечисленные издания, а дополняет их. При этом в ней имеется и целый ряд результатов, которые либо мало освещены в учебной литературе, либо ранее в ней не излагались (например, теория точек совпадений, свойства локально выпуклых множеств и др.). Отличительной чертой этой книги является большое количество предлагаемых примеров и контрпримеров, проясняющих вводимые понятия и получаемые результаты. Она основана на читающемся курсе лекций и максимально адаптирована к современным требованиям и интересам студентов. Изложение достаточно замкнуто и не требует серьезной предварительной подготовки (быть может, за исключением одного-двух параграфов второй части). Основные используемые сведения из функционального анализа имеются в классическом учебнике [10].

Как отмечалось, по материалам книги читается двухсеместровый курс лекций на третьем курсе факультета ВМК МГУ, а по первой ее части — студентам бакалавриата факультета физико-математических и естественных наук Российского университета дружбы народов. Книга рассчитана на широкий круг студентов, обучающихся по специальностям «Математика» и «Прикладная математика», аспирантов и специалистов. При этом книга написана не с узкими целями (для экономистов или инженеров) и не в расчете на какую-нибудь одну группу специалистов. Она предназначена широкой аудитории, ибо, несомненно, и выпуклый, и многозначный анализ целесообразно изучить как математикам разных классических направлений, так и прикладникам, в особенности тем, чьи исследования связаны с задачами оптимизации.

Несколько слов о принятой нумерации. Книга состоит из двух частей, каждая часть разбита на параграфы, которые нумеруются двумя числами, где первое число — номер части, а второе — номер параграфа в этой части. Например, § 2.4 — это четвертый параграф во второй части. Формулы и утверждения нумеруются тремя числами, первые два из которых — номер параграфа, а третье — номер формулы в нем. Например, (1.3.5) — это пятая формула в параграфе 1.3.

Я выражаю благодарность моим коллегам и друзьям, профессорам Борису Даниловичу Гельману, Алексею Феридовичу Измаилову, Валерию Владимировичу Обуховскому, Борису Алексеевичу Пасынкову и Евгению Сергеевичу Половинкину за ценные плодотворные обсуждения. Я благодарен моим ученикам к.ф.-м.н. Сергею Евгеньевичу Жуковскому, д.ф.-м.н. Дмитрию Юрьевичу Карамзину и аспирантке Зухре Тагировне Мингалевой, которые помогли исправить ряд неточностей и опечаток и подготовить рукопись к печати. Я также благодарен моим слушателям, студентам 3 курса кафедры системного анализа факультета ВМК МГУ.

Список обозначений

- $[x_1, x_2]$ — отрезок, соединяющий точки x_1 и x_2 ;
 $[x_1, x_2)$; $(x_1, x_2]$ — полуинтервалы; (x_1, x_2) — интервал;
 $\text{conv} A$ — выпуклая оболочка множества A ;
 $\text{lin} A$ — линейная оболочка множества A ;
 $\text{aff} A$ — аффинная оболочка множества A ;
 $\dim X$ — размерность линейного пространства X ;
 $\text{ext}(A)$ — множество крайних точек множества A ;
 $\text{cl} A$ — замыкание множества A ;
 ∂A — граница множества A ;
 $\text{int} A$ — внутренность множества A — множество всех внутренних точек множества A ;
 $\text{ri} A$ — относительная внутренность выпуклого множества A ;
 $\|x\|$ — норма элемента x ;
 $|x| = \langle x, x \rangle^{1/2}$ — модуль вектора x , т. е. евклидова норма элемента x ;
 X^* — (топологически) сопряженное пространство к нормированному пространству X , т. е. пространство линейных непрерывных функционалов на X ;
 $A + B = \{x: x = x_1 + x_2, x_1 \in A, x_2 \in B\}$ — сумма множеств по Минковскому;
 $\alpha A = \{x: x = \alpha x_1, x_1 \in A\}$ — произведение множества A на число α ;
 $K^* = \{x^* \in X: \langle x^*, x \rangle \geq 0 \ \forall x \in K\}$ — сопряженный конус к K ;
 $K^0 = \{x^* \in X: \langle x^*, x \rangle \leq 0 \ \forall x \in K\}$ — нормальный конус к конусу K ;
 $K^{**} = (K^*)^*$ — второй сопряженный к конусу K ;
 $O(x_0, \varepsilon) = \{x \in X: \|x - x_0\| < \varepsilon\}$ — открытая ε -окрестность точки x_0 в нормированном пространстве;
 $O_\varepsilon = O(0, \varepsilon)$ — открытая ε -окрестность точки 0 в нормированном пространстве;
 $A_\varepsilon = A + O_\varepsilon$ — открытая ε -окрестность множества A в нормированном пространстве;
 (X, τ) — топологическое пространство (множество X с заданной на нем топологией τ);

ρ — метрика; $\rho(x_1, x_2)$ — расстояние между элементами x_1 и x_2 ;

(X, ρ) — метрическое пространство (множество X с заданной на нем метрикой ρ);

$O^X(x_0, \varepsilon) = \{x \in X: \rho_X(x, x_0) < \varepsilon\}$ — открытая ε -окрестность точки x_0 в метрическом пространстве (X, ρ) ;

$B^X(x_0, \varepsilon) = \{x \in X: \rho_X(x, x_0) \leq \varepsilon\}$ — замкнутая ε -окрестность точки x_0 в метрическом пространстве (X, ρ) ;

$X \times Y$ — декартово произведение метрических пространств (X, ρ_X) и (Y, ρ_Y) , состоящее из множества упорядоченных пар (x, y) , $x \in X, y \in Y$, с метрикой $\rho((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \rho_X(x_1, x_2) + \rho_Y(y_1, y_2)$;

$h(M, N) = \inf\{r > 0: O^X(M, r) \supseteq N, O^X(N, r) \supseteq M\}$ — расстояние по Хаусдорфу между множествами M и N ;

$\text{dist}(M, N) = \inf\{\rho(x, y), x \in M, y \in N\}$ — расстояние между множествами M и N ;

$h^+(M, N) = \inf\{\varepsilon > 0: O^X(N, \varepsilon) \supset M\}$ — отклонение множества M от множества N ;

$O^X(A, \varepsilon) = \{x \in X: \text{dist}(x, A) < \varepsilon\}$ — открытая ε -окрестность множества A в метрическом пространстве (X, ρ) ;

$B^X(A, \varepsilon) = \{x \in X: \text{dist}(x, A) \leq \varepsilon\}$ — замкнутая ε -окрестность множества A в метрическом пространстве (X, ρ) ;

$\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел;

$\mathbb{R}$ — множество действительных чисел (числовая прямая);

$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ — расширенная числовая прямая;

$\mathbb{R}^n$ — n -мерное арифметическое пространство;

$C[a, b]$ — линейное пространство функций, непрерывных на отрезке $[a, b]$;

$C(T)$ — нормированное пространство непрерывных ограниченных функций $f: T \rightarrow \mathbb{R}$ с нормой $\|f\| = \sup\{|f(t)|: t \in T\}$;

l_p — нормированное пространство вещественных последовательностей $x = (x^1, x^2, \dots)$, для которых ряд $\sum_{i=1}^{\infty} |x^i|^p$ сходится,

с нормой $\|x\| = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x^i|^p\right)^{1/p}$;

l_{∞} — нормированное пространство вещественных ограниченных последовательностей $x = (x^1, x^2, \dots)$ с нормой $\|x\| = \sup_i |x^i|$;

$\text{epi} f = \{(x, \alpha) \in X \times \mathbb{R}: f(x) \leq \alpha\}$ — надграфик функции f ;

$\text{dom} f = \{x \in X: f(x) < +\infty\}$ — эффективное множество функции f ;

$\Psi: X \rightrightarrows Y$ — многозначное отображение;

$\text{graph} F = \{(x, y) \in X \times Y: y \in F(x)\}$ — график многозначного отображения F ;

$f_1 \oplus \dots \oplus f_m$ — инфимальная конволюция функций $f_1, f_2, \dots, f_m$;

$\text{cl} f$ — замыкание функции f ;

$\mathcal{L}_a f = \{x \in X: f(x) \leq a\}$ — множество Лебега функции f ;

$f|_C$ — сужение отображения $f: X \rightarrow Y$ на подмножество $C \subset X$;

f^* — сопряженная функция к функции f ;

$f^{**} = (f^*)^*$ — вторая сопряженная функция к функции f ;

$c(x^*, A) = \sup_{y \in A} \langle x^*, y \rangle$ — опорная функция множества A ;

δ_A — индикаторная функция множества A ;

$P_A(x) = \inf\{r > 0: x/r \in A\}$ — функционал Минковского множества A ;

$f'(x; y)$ — производная функции f в точке $x \in \mathbb{R}^n$ по направлению $y \in \mathbb{R}^n$;

$\partial f(x)$ — субдифференциал выпуклой функции f в точке x ;

∂f — субдифференциальное отображение;

$\langle x^*, x \rangle$ — действие линейного функционала x^* на вектор $x \in X$;

$\mathcal{H}(X)$ — множество непустых замкнутых ограниченных подмножеств метрического пространства (X, ρ) , наделенное метрикой Хаусдорфа h ;

$\mathcal{H}_c(X)$ — множество непустых компактных подмножеств метрического пространства (X, ρ) , наделенное метрикой Хаусдорфа h ;

$\mathcal{F}(G) = \{K \in \mathcal{H}_c(X): K \cap G \neq \emptyset\}$;

$\mathcal{L}(G) = \{K \in \mathcal{H}_c(X): K \subset G\}$;

$\left(\bigcup_{j \in J} F_j\right)(x) = \bigcup_{j \in J} F_j(x)$ — объединение многозначных отображений F_j ;

$\left(\bigcap_{j \in J} F_j\right)(x) = \bigcap_{j \in J} F_j(x)$ — пересечение многозначных отображений F_j ;

$F^-(A) = \{x \in X: F(x) \cap A \neq \emptyset\}$ — «полный прообраз» подмножества $A \subset Y$.

Часть 1

ВЫПУКЛЫЙ АНАЛИЗ

§ 1.1. Выпуклые множества и их свойства

Вначале для удобства читателя и полноты изложения напомним определения некоторых стандартных объектов, таких, как вещественное линейное пространство, нормированное пространство, евклидово пространство и т.п. Но предварительно сделаем важное замечание. А именно: читатель, не знакомый с нормированными и евклидовыми пространствами, может без особенного ущерба для понимания для простоты считать, что все рассматриваемые в дальнейшем пространства являются конечномерными арифметическими пространствами, т.е. что $X = \mathbb{R}^n$.

Напомним, что вещественное линейное пространство X — это абелева группа по сложению, и для каждого элемента $x \in X$ и вещественного $\alpha \in \mathbb{R}$ определено произведение $\alpha x \in X$, удовлетворяющее следующим аксиомам: для произвольных $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $x, y \in X$ выполняются

$$\begin{aligned} \alpha(x + y) &= \alpha x + \alpha y && \text{дистрибутивность} \\ &&& \text{(относительно сложения векторов),} \\ (\alpha + \beta)x &= \alpha x + \beta x && \text{дистрибутивность} \\ &&& \text{(относительно сложения скаляров),} \\ (\alpha\beta)x &= \alpha(\beta x) && \text{ассоциативность,} \\ 1 \cdot x &= x. \end{aligned}$$

Примеры вещественных линейных пространств.

1. $C[a, b]$ — пространство функций, непрерывных на отрезке $[a, b]$.

2. $\mathbb{R}^n$ — множество всевозможных упорядоченных наборов из n вещественных чисел (или n -мерное арифметическое пространство).

3. Пространство прямоугольных матриц $n \times m$.

4. $C^k[a, b]$ — пространство непрерывных на отрезке $[a, b]$ и k раз непрерывно дифференцируемых в интервале (a, b) функций.

Вещественное линейное пространство X называется нормированным, если в нем введена норма $\|\cdot\|$, удовлетворяющая обычным аксиомам:

$$\begin{aligned} \|x\| &\geq 0 \quad \forall x \in X, \quad \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0, \\ \|\alpha x\| &= |\alpha| \|x\| \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \forall x, y \in X. \end{aligned}$$

В нормированном пространстве последовательность точек $\{x_i\}$ сходится к точке x_0 , если $\|x_i - x_0\| \rightarrow 0, i \rightarrow \infty$. Нормированное пространство называется полным, если в нем любая фундаментальная последовательность сходится к некоторой точке этого пространства.

Полное нормированное пространство называется банаховым¹⁾ пространством. Вещественное линейное пространство, в котором введено скалярное произведение, называется евклидовым²⁾. В евклидовом пространстве норма определяется по формуле $\|x\| = |x|$. Здесь $|x|$ — это модуль вектора x , который определяется по формуле $|x| = \langle x, x \rangle^{1/2}$, где угловые скобки обозначают скалярное произведение. Евклидово пространство, которое является полным относительно указанной нормы, называется гильбертовым³⁾ пространством. Далее в евклидовых пространствах и, в частности, в $\mathbb{R}^n$ вместо нормы вектора будем для удобства использовать его модуль $|x|$.

Классический пример бесконечномерного гильбертова пространства дает пространство l_2 , состоящее из всех последовательностей вещественных чисел $x = (x^1, x^2, \dots)$, для которых ряд $\sum_{i=1}^{\infty} (x^i)^2$ сходится. Скалярное произведение в l_2 определяется по формуле $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} x^i y^i$, а модуль вектора x (его норма) — по формуле $|x| = (\sum_{i=1}^{\infty} (x^i)^2)^{1/2}$.

Пусть X — нормированное пространство. Для $\varepsilon > 0$ и $x_0 \in X$ через $O(x_0, \varepsilon) = \{x \in X : \|x - x_0\| < \varepsilon\}$ будем обозначать открытую ε -окрестность точки x_0 . Пусть A — подмножество X . Точка x_0 называется внутренней точкой множества A , если существует $\varepsilon > 0$ такое, что $O(x_0, \varepsilon) \subset A$ ⁴⁾. Множество всех внутренних точек множества A обозначается через $\text{int } A$. Будем также использовать обозначение $O_\varepsilon = O(0, \varepsilon)$.

¹⁾ Стефан Банах (1892–1945) — польский математик.

²⁾ Евклид (III в. до н.э.) — древнегреческий математик.

³⁾ Давид Гильберт (1862–1943) — немецкий математик.

⁴⁾ Запись $C \subset X$ обозначает нестрогое включение, т.е. случай $C = X$ допускается.

Множество $C \subset X$ называется замкнутым, если оно содержит все свои предельные точки, т.е. если последовательность $\{x_i\}$ лежит во множестве C и сходится к точке x_0 , то $x_0 \in C$. Замыканием множества A называется пересечение всех замкнутых множеств, содержащих A , и обозначается через $\text{cl } A$.

Множество $K \subset X$ называется компактом, если из любого его покрытия открытыми множествами можно выделить конечное подпокрытие. Если множество компактно, то оно замкнуто и ограничено, но вообще говоря, не наоборот. Однако если $X = \mathbb{R}^n$, то любое замкнутое ограниченное множество $A \subset X$ компактно.

Для двух заданных точек x_1, x_2 множество точек x , представимых в виде $x = \alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2$, где $\alpha \in [0, 1]$, называется отрезком, соединяющим точки x_1 и x_2 , и обозначается через $[x_1, x_2]$. Через $[x_1, x_2)$ обозначается полуинтервал, состоящий из точек x , представимых в виде $x = \alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2$, где $0 < \alpha \leq 1$. Аналогично определяются полуинтервал $(x_1, x_2]$ и интервал (x_1, x_2) . (В определении последнего участвуют только те α , для которых $0 < \alpha < 1$.)

Итак, пусть X — вещественное линейное пространство и $A \subset X$.

Определение 1.1.1. Множество A называется *выпуклым*, если для любых двух точек $x_1, x_2 \in A$ выполняется

$$[x_1, x_2] \subset A \quad (\text{т.е. } \alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2 \in A \quad \forall \alpha \in [0, 1]).$$

Пустое множество считается выпуклым по определению.

Из приведенного определения вытекает, что любое одноточечное множество $\{a\}$ выпукло.

Определение 1.1.2. Сумма $\sum_{i=1}^k \alpha_i x_i$ называется *выпуклой комбинацией* точек $x_1, \dots, x_k$, если $\alpha_i \geq 0$, $i = 1, \dots, k$, $\sum_{i=1}^k \alpha_i = 1$.

Пусть $A, B \subset X$ и $\alpha \in \mathbb{R}$. Введем в рассмотрение множества

$$A + B = \{x \in X : x = a + b, a \in A, b \in B\},$$

$$\alpha A = \{x \in X : x = \alpha a, a \in A\}.$$

Множество $A + B$ называется суммой (по Минковскому¹⁾) множеств A и B , а множество αA называется произведением числа α на множество A . Очевидно, $O(x_0, \varepsilon) = x_0 + O_\varepsilon$.

Предложение 1.1.1. *Имеют место следующие свойства.*

1. Пересечение любого числа выпуклых множеств $A_\sigma \subset X$, $\sigma \in \Sigma$ является выпуклым множеством.

2. Пусть $A_1, \dots, A_n$ — выпуклые подмножества X , $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$. Тогда множество $\sum_{i=1}^n \alpha_i A_i$ выпукло.

Доказательство. 1. Возьмем произвольные точки $x, y \in \bigcap_{\sigma \in \Sigma} A_\sigma$. Каждое из множеств A_σ является выпуклым. Поэтому $[x, y] \subset A_\sigma$ для любого $\sigma \in \Sigma$. Отсюда $[x, y] \subset \bigcap_{\sigma \in \Sigma} A_\sigma$, что по определению означает выпуклость пересечения множеств $\bigcap_{\sigma \in \Sigma} A_\sigma$.

2. Возьмем произвольные точки $x, y \in \sum_{i=1}^n \alpha_i A_i$. По определению существуют $x_1, y_1 \in A_1, \dots, x_n, y_n \in A_n$ такие, что

$$x = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i, \quad y = \sum_{i=1}^n \alpha_i y_i.$$

Из выпуклости множеств A_i следует, что для любых $\alpha, \beta \geq 0$, $\alpha + \beta = 1$, имеет место $\alpha x_i + \beta y_i \in A_i$ и, значит, $\alpha x + \beta y = \sum_{i=1}^n \alpha_i (\alpha x_i + \beta y_i) \in \sum_{i=1}^n \alpha_i A_i$, откуда вытекает выпуклость множества $\sum_{i=1}^n \alpha_i A_i$. ■

Из определения операции суммы множеств и произведения множества на число непосредственно вытекает включение

$$(\alpha + \beta)A \subset \alpha A + \beta A$$

справедливое для произвольного множества A и чисел α, β .

Предложение 1.1.2. *Пусть A — выпуклое множество. Тогда для любых $\alpha \geq 0, \beta \geq 0$ справедлива формула*

$$(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A. \quad (1.1.1)$$

¹⁾ Герман Минковский (1864–1909) — немецкий математик.

Доказательство. В силу сказанного выше достаточно доказать включение $\alpha A + \beta A \subset (\alpha + \beta)A$. Если $\alpha + \beta = 0$, то $\alpha = \beta = 0$ и, значит, это включение очевидно. Рассмотрим случай $\alpha + \beta > 0$. Пусть $\xi \in \alpha A + \beta A$. Тогда $\xi = \alpha x_1 + \beta x_2$ для некоторых $x_1, x_2 \in A$, откуда в силу выпуклости A имеем

$$\xi = (\alpha + \beta) \left(\frac{\alpha}{(\alpha + \beta)} x_1 + \frac{\beta}{(\alpha + \beta)} x_2 \right) \in (\alpha + \beta)A,$$

что завершает доказательство нужного включения. ■

Если множество A выпуклым не является, то равенство (1.1.1) может нарушаться. Действительно, пусть A — единичная окружность и $\alpha = \beta = 1$. Тогда $2A$ — это окружность радиуса 2 с центром в нуле, а $A + A$ — круг радиуса 2 с центром в нуле. Аналогично, если числа α и β имеют разные знаки, то равенство (1.1.1) также может нарушаться: например, если A — единичный круг и $\alpha = 1$, $\beta = -1$.

Предложение 1.1.3. *Выпуклое множество A содержит любую выпуклую комбинацию своих точек.*

Доказательство. Необходимо показать, что для любого $n \geq 2$ из того, что

$$x = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i, \quad x_i \in A, \quad \alpha_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^n \alpha_i = 1,$$

следует, что $x \in A$.

Доказательство проведем по индукции. При $n = 2$ искомое утверждение следует из определения выпуклого множества. Пусть искомое утверждение доказано для $n = r$. Докажем его для $n = r + 1$.

Не ограничивая общности рассуждений, будем считать, что $\sum_{i=1}^r \alpha_i > 0$. Тогда

$$\sum_{i=1}^{r+1} \alpha_i x_i = \sum_{i=1}^r \alpha_i \left(\frac{\sum_{i=1}^r \alpha_i}{\sum_{i=1}^r \alpha_i} x_i \right) + \alpha_{r+1} x_{r+1} = \widehat{\alpha} \widehat{x} + \alpha_{r+1} x_{r+1} \in A$$

в силу выпуклости множества A . Здесь $\hat{x} = \frac{\sum_{i=1}^r \alpha_i}{\sum_{i=1}^r \alpha_i} x_i \in A$

в силу выпуклости A и предположения индукции, а $\hat{\alpha} = \sum_{i=1}^r \alpha_i$, откуда $\hat{\alpha} + \alpha_{r+1} = 1$. ■

§ 1.2. Выпуклая оболочка множества. Внутренность выпуклых множеств

Выпуклая оболочка множества. Пусть по-прежнему X — вещественное линейное пространство и $A \subset X$.

Определение 1.2.1. *Выпуклой оболочкой множества A называется пересечение всех выпуклых множеств, содержащих A , и обозначается через $\text{conv } A$.*

Из определения следует, что выпуклая оболочка $\text{conv } A$ является наименьшим по включению выпуклым множеством, содержащим множество A .

Теорема 1.2.1. *Множество $\text{conv } A$ состоит из тех и только тех точек, которые являются выпуклыми комбинациями конечного числа точек из A .*

Доказательство. Обозначим через B множество всевозможных выпуклых комбинаций конечного числа точек из A . В силу предложения 1.1.3 $B \subset \text{conv } A$, поскольку множество $\text{conv } A$ выпукло и $A \subset \text{conv } A$. Докажем обратное включение.

Покажем, что множество B выпукло. Действительно, пусть $b_1, b_2 \in B$. Тогда каждая из точек b_1 и b_2 представима в виде выпуклой комбинации конечного числа точек из A , причем, увеличивая, если надо, число этих точек, можно без потери общности считать, что существуют номер m и точки $a_i \in A$, $i = \overline{1, m}$, для которых справедливы представления $b_s = \sum_{i=1}^m \alpha_{s,i} a_i$, $s = 1, 2$. Здесь $\alpha_{s,i}$, $i = \overline{1, m}$, $s = 1, 2$, — некоторые неотрицательные числа, для которых $\sum_{i=1}^m \alpha_{s,i} = 1$, $s = 1, 2$. Нам надо доказать, что $\theta b_1 + (1 - \theta) b_2 \in B \forall \theta \in [0, 1]$. Действительно,

$$\theta b_1 + (1 - \theta) b_2 = \sum_{i=1}^m \left(\theta \alpha_{1,i} + (1 - \theta) \alpha_{2,i} \right) a_i \in B,$$

поскольку $\theta\alpha_{1,i} + (1 - \theta)\alpha_{2,i} \geq 0$ для всех i и

$$\sum_{i=1}^m (\theta\alpha_{1,i} + (1 - \theta)\alpha_{2,i}) = \theta \sum_{i=1}^m \alpha_{1,i} + (1 - \theta) \sum_{i=1}^m \alpha_{2,i} = \theta + (1 - \theta) = 1.$$

Таким образом, выпуклость множества B доказана. В то же время, очевидно, $A \subset B$ и, значит, $\text{conv } A \subset B$. Итак, равенство $\text{conv } A = B$ доказано. ■

В случае, когда $X = \mathbb{R}^n$, доказанное утверждение можно существенно уточнить.

Теорема 1.2.2 (Каратеодори¹⁾). Пусть $A \subset \mathbb{R}^n$. Тогда $\text{conv } A$ состоит из всевозможных выпуклых комбинаций не более чем $(n + 1)$ точек множества A .

Доказательство. Положим

$$B = \left\{ x: x = \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i x_i, \text{ где } x_i \in A, \alpha_i \geq 0 \ \forall i = \overline{1, n+1}, \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i = 1 \right\}.$$

По теореме 1.2.1 $B \subset \text{conv } A$. Осталось доказать, что $\text{conv } A \subset B$.

Пусть $x \in \text{conv } A$. Тогда по теореме 1.2.1 для некоторого натурального r справедливо представление

$$x = \sum_{i=1}^{r+1} \alpha_i x_i, \text{ где } \alpha_i \geq 0, x_i \in A, i = \overline{1, r+1}, \sum_{i=1}^{r+1} \alpha_i = 1.$$

Если $r \leq n$, то $x \in B$. Пусть теперь $r > n$. Покажем, что в этом случае x можно представить в виде выпуклой комбинации не более чем r точек множества A . Если хотя бы одно из чисел α_i равно нулю, то это очевидно. Пусть теперь $\alpha_i > 0 \ \forall i$. Поскольку $r > n$, система векторов $x_i - x_{r+1}, i = 1, \dots, r$, линейно зависима. Поэтому найдутся такие числа $t_1, \dots, t_r$, не все равные нулю, что $\sum_{i=1}^r t_i(x_i - x_{r+1}) = 0$.

Положим $t_{r+1} = -\sum_{i=1}^r t_i$. Тогда $\sum_{i=1}^{r+1} x_i t_i = 0, \sum_{i=1}^{r+1} t_i = 0$ и, значит, для произвольного числа c :

$$x = \sum_{i=1}^{r+1} \alpha_i x_i + \sum_{i=1}^{r+1} c t_i x_i = \sum_{i=1}^{r+1} (\alpha_i + c t_i) x_i, \quad \sum_{i=1}^{r+1} (\alpha_i + c t_i) = 1. \quad (1.2.1)$$

¹⁾ Константин Каратеодори (1873–1950) — немецкий математик.

Очевидно, хотя бы одно из чисел t_i отрицательно. Кроме того, $\alpha_i > 0$ для любого i и, значит, при $c = 0$ все числа $(\alpha_i + ct_i)$ положительны. Будем увеличивать параметр c от нуля до бесконечности. Тогда, очевидно, существует наименьшее число $c > 0$ такое, что для всех номеров i выполняется $(\alpha_i + ct_i) \geq 0$, а для некоторого $i_0 \leq r + 1$ имеет место $(\alpha_{i_0} + ct_{i_0}) = 0$. Поэтому, отбрасывая в представлении (1.2.1) i_0 -е слагаемое $(\alpha_{i_0} + ct_{i_0})x_{i_0}$, получаем искомое утверждение, т. е. что x представимо в виде выпуклой линейной комбинации не более чем r точек множества A .

Повторяя указанную процедуру конечное число раз, получим, что $r \leq n$ и, значит, $x \in B$. Таким образом, доказано, что $\text{conv } A \subset B$. ■

Теорема 1.2.3. Пусть $A \subset X = \mathbb{R}^n$ является компактом. Тогда $\text{conv } A$ есть компакт. ($B \mathbb{R}^n$ выпуклая оболочка компакта — компакт.)

Доказательство. Пусть A — компакт. Докажем, что $\text{conv } A$ — компакт. Возьмем произвольную последовательность $\{x_k\} \subset \text{conv } A$. Тогда по теореме Каратеодори справедливо представление

$$x_k = \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_k^i y_k^i, \quad \text{где } \alpha_k^i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_k^i = 1, \quad y_k^i \in A \quad \forall i, k.$$

Поскольку $0 \leq \alpha_k^i \leq 1$, то для каждого $i = 1, \dots, n+1$ из последовательности $\{\alpha_k^i\}$ можно выделить подпоследовательность, которая сходится к некоторой точке отрезка $[0, 1]$. Аналогично, в силу компактности A для каждого номера i из последовательности $\{y_k^i\}$ также можно выделить подпоследовательность, которая сходится к некоторой точке множества A .

Выделяя по очереди такие подпоследовательности и вновь обозначая их через $\{\alpha_k^i\}$, $\{y_k^i\}$, получаем, что при $k \rightarrow \infty$ для каждого номера i имеет место $\alpha_k^i \rightarrow \alpha^i \in [0, 1]$, $y_k^i \rightarrow y^i \in A$. Тогда

$$x_k \rightarrow x, \quad k \rightarrow \infty, \quad \text{где } x = \sum_{i=1}^{n+1} \alpha^i y^i, \quad y^i \in A, \quad \alpha^i \geq 0, \quad \forall i, \quad \sum_{i=1}^{n+1} \alpha^i = 1.$$

Следовательно, $x \in \text{conv } A$. Таким образом, доказано, что из любой последовательности $\{x_k\}$, лежащей в $\text{conv } A$, можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к некоторой точке множества $\text{conv } A$. Значит, множество $\text{conv } A$ компактно. ■