

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

100

ФИНАНСОВЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ПРИ ПРАВИТЕЛЬСТВЕ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Т. Л. Мелехина

ЛЕКЦИИ ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКЕ



ИЗДАТЕЛЬСТВО
ПРОМЕТЕЙ

УДК 519.22(072)

ББК 22.172

М47

Рецензенты:

А. С. Бортакoвский, доктор физико-математических наук, профессор кафедры математической кибернетики ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)»;

С. А. Зададаев, кандидат физико-математических наук, доцент Департамента «Анализа данных, принятия решений и финансовых технологий» Финансового Университета.

Т. Л. Мелехина

Б89 Лекции по теории вероятностей и математической статистике (для слушателей Института сокращенных программ): учебное пособие для бакалавров направлений 38.03.01 «Экономика», 38.03.02 «Менеджмент», 38.03.04 «Государственное и муниципальное управление» / Финансовый университет при Правительстве РФ. — Москва: Прометей, 2018. — 130 с.

ISBN 978-5-907003-63-7

Данное руководство по теории вероятностей и математической статистике является переработанным и адаптированным для слушателей, проходящих ускоренное обучение и имеющих диплом государственного образца о высшем образовании.

Пособие написано в соответствии с программой дисциплины «Теория вероятностей и математическая статистика». Оно предназначено для подготовки бакалавров по направлениям «Экономика», «Менеджмент», «Государственное и муниципальное управление» Института сокращенных программ (второе высшее образование) Финансового университета. В пособии отражены темы: алгебра событий, случайные величины, выборочный метод, точечные и интервальные оценки, проверка статистических гипотез. Материал иллюстрируется большим количеством примеров. Пособие может быть использовано как для проведения семинарских занятий, так и для организации самостоятельной работы студентов.

© Т. Л. Мелехина, 2018

ISBN 978-5-907003-63-7

© Издательство Прометей, 2018

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	4
Глава 1. Случайные события	6
Глава 2. Классическое определение вероятности	10
Глава 3. Элементы комбинаторики	13
Глава 4. Понятие геометрической вероятности	19
Глава 5. Действия над событиями	22
Глава 6. Формула полной вероятности	31
Глава 7. Схема независимых испытаний	36
Глава 8. Дискретные случайные величины	46
Глава 9. Примеры дискретных распределений	57
Глава 10. Дискретные двумерные случайные величины	64
Глава 11. Непрерывные случайные величины	70
Глава 12. Примеры непрерывных распределений	81
Глава 13. Основы математической статистики	90
Глава 14. Статистические оценки параметров распределения	97
Глава 15. Проверка статистических гипотез	107
Приложение	126
Литература	129

Введение

*Теория вероятностей есть в сущности
не что иное, как здравый смысл,
сведенный к вычислению*

Пьер Симон Лаплас

Каждый человек в своей жизни сталкивается с понятием вероятности. Мы хотим оценить шансы выигрыша в любимой игре, пытаемся прогнозировать цены на энергоносители, говорим о вероятности дождя в ближайшие дни и так далее. Однако строгое определение и, как следствие, законы, которым подчиняется вероятность, на самом деле были выделены в раздел математики относительно недавно.

Можно говорить о возникновении теории вероятностей как науки в начале XVII века. Ученые связывают это с комбинаторными задачами азартных игр. Именно азартные игры (такие как игры в карты или кости) привели к решению задач, не укладывавшихся в рамки существовавших тогда математических моделей, и способствовали к появлению новых понятий и идей. Эти новые идеи встречаются в работах известных математиков того времени: Якоба Бернулли, Пьера Симона Лапласа, Карла Фридриха Гаусса и многих других. Как самостоятельный раздел математики дисциплина «Теория вероятностей и математическая статистика» сложилась в конце XIX — начале XX века. Связывают становление этой науки с именем известного русского математика Андрея Николаевича Колмогорова (1903–1987 гг.).

Благодаря этой науке сформировались и выросли новые разделы математики, такие как теория случайных процессов, теория массового обслуживания, математическая теория надежности и другие. Однако и сама наука «Теория вероятностей» опирается на такие математические дисциплины, как: алгебра, аналитическая геометрия, теория функций комплексного переменного, дифференциальные уравнения, функциональный анализ и другие.

Дисциплину «Теория вероятностей и математическая статистика» относят к числу прикладных математических дисциплин, поскольку они направлены на решение прикладных задач и возникли из чисто прикладных задач, но при этом используют математические методы. И, пожалуй, сейчас нет таких наук и областей знаний, которые не используют вероятностные и статистические методы.

Глава 1. Случайные события

Любой человек, в результате своей деятельности, сталкивается с событиями, которые невозможно точно предсказать. Для того чтобы характеризовать события, необходимо учесть или специально организовать определенные условия, в которых оно происходит. Выполнение таких условий или действий для выявления, интересующего нас события носит название опыта или эксперимента.

Итак, **опытом, экспериментом или испытанием**, называют всякое осуществление определенного комплекса условий или действий, при которых наблюдается соответствующее явление.

Рассмотрим, например, процесс кипения воды: чтобы наблюдать это явление, необходимо найти источник энергии, налить в сосуд воду и поставить его на этот источник. Через некоторое время, при условии постоянной подачи энергии, можно наблюдать процесс кипения.

Событие — это возможный результат опыта.

События принято обозначать заглавными буквами латинского алфавита. Например, **A** — выигрыш в лотерею, **B** — получение отличной оценки на экзамене и тому подобное.

Все наблюдаемые события можно подразделить на следующие 3 вида: достоверные, невозможные и случайные.

- **Достоверным** называют событие, которое обязательно произойдет, если будет осуществлена определенная совокупность условий.

Например, камень, брошенный кем-то, упадет на землю. Падение камня — достоверное событие в естественных природных условиях (на луне камень может и не упасть).

- **Невозможным** называют событие, которое при осуществлении совокупности условий заведомо не произойдет.

Зависание в воздухе брошенного камня является невозможным событием в естественных нормальных условиях.

- **Случайным** называют событие, которое может либо произойти, либо не произойти при осуществлении совокупности условий.

Получение отличной оценки на экзамене по теории вероятностей, выигрыш в лотерею, попадание в цель при стрельбе по мишени являются случайными событиями в естественных условиях.

На самом деле, достаточно большое число однородных случайных событий, независимо от их природы, подчиняются определенным закономерностям, а именно, вероятностным закономерностям. Установлением таких закономерностей и занимается теория вероятностей.

Предметом теории вероятностей является изучение вероятностных закономерностей массовых однородных случайных событий.

Основной задачей теории вероятностей является определение количественной меры возможности появления события. Но прежде, чем определить количественную характеристику, следует понять, какие связи существуют между событиями. Эти связи необходимо учитывать при вычислении характеристик, иначе расчёты не будут соответствовать действительности. Для исключения ошибок и непонимания, введем основные определения.

- Два события называются **совместными** в данном опыте, если появление одного из них не исключает появления другого в этом опыте.

Рассмотрим пример семьи с двумя детьми: любой ребенок имеет определенный пол. Нас интересуют разнополые дети — мальчик и девочка. Двое разнополых детей в одной семье вполне возможно. Таким образом, два события А — один из детей мальчик, В — другой ребенок девочка — это совместные события для рассматриваемого опыта.

- Два события называются *несовместными*, если они не могут произойти вместе при одном и том же испытании.

Например, рассмотрим ситуацию, когда в семье один ребёнок; мальчик это или девочка одновременно быть не может (при рождении пол не выбирают), это несовместные события.

При стрельбе из оружия: попадание и промах в цель при одном выстреле также являются несовместными событиями. А при нескольких выстрелах — совместные.

- Множество событий $A_1, A_2, \dots, A_n$ образуют *полную группу*, если они попарно несовместны и появление в испытании только одного из них является достоверным событием.

В классическом примере с игральной костью (обычный шестигранный кубик), рассмотрим события, состоящие в появлении цифр при бросании игральной кости: A_1 — появление 1, ..., A_6 — появление 6. Эти шесть событий попарно несовместны в одном опыте. И в результате подбрасывания кости обязательно выпадет ровно одна из возможных цифр. Следовательно, эти события образуют полную группу событий.

В случае, когда два охотника стреляют в медведя, возможны следующие события, образующие полную группу: H_1 — никто из охотников не попал, H_2 — попал первый охотник и не попал второй, H_3 — попал второй охотник и не попал первый, H_4 — оба охотника попали. Следует обратить внимание, что все четыре события данного примера могут иметь совершенно различные возможности для наступления.

- Два события называют *противоположными*, если появление одного из них равносильно непоявлению другого. Это два единственно возможных события, образующие полную группу.

Обозначение: $\bar{A}$ — событие, противоположное событию A (ещё говорят «не A », или отрицание события A).

Например, выпадения «орла» и выпадение «решки» при подбрасывании одной монеты являются противоположными событиями для одного опыта. Для события,

состоящего в попадании хотя бы одного из охотников в медведя, противоположным является — ни один из охотников не попал. Это важное определение помогает решать довольно сложные задачи наиболее простым способом. В частности, когда нас интересует хотя бы одно попадание по мишени при 10 выстрелах — это сложное событие включает в себя ровно одно попадание (любое из десяти), два попадания и так далее до десяти. А противоположное событие — ни одного попадания — все 10 промахи.

- События считаются *равновозможными*, если нет оснований полагать, что одно событие является более возможным, чем другие.

Например, в некоторой игре предлагают выбрать один из трех ящиков, в одном из которых находится приз. Выбор определенного ящика — равновозможные события при условии, что ящики совершенно одинаковые и не имеют никаких особенностей.

Каждое событие, которое может наступить в итоге опыта, называется элементарным исходом (элементарным событием, или шансом). Элементарные исходы, при которых данное событие наступает, называются благоприятствующими этому событию, или **благоприятными шансами**.

При наборе номера телефона из множества вариантов благоприятным является лишь один — правильный (нужный нам) номер. А если нужно загадать число от 1 до 20, и при этом нет особых предпочтений, то благоприятных шансов для того, что цифра будет кратная пяти, равно четырем из 20 возможных.

Очень важно учитывать все возможные исходы опыта с учетом различных вариантов. Это необходимо для правильного подсчета благоприятных шансов. Так, например, если для дежурства нужно выбрать двух студентов, то возможно 4 различных варианта: две девушки, два юноши, первая девушка и второй юноша, первый юноша и вторая девушка. Для выбора на дежурство двух студентов разного пола есть два благоприятных шанса (а не один, как думают некоторые).

Глава 2. Классическое определение вероятности

Числовой характеристикой события является вероятность его появления. Для определения вероятности рассмотрим конечное множество равновозможных элементарных исходов опыта, образующих полную группу событий. Пусть событие A может наступить в опыте при появлении некоторых из элементарных исходов и не наступает при появлении других. Предположим, что среди общего числа n всех равновозможных исходов m из них благоприятствует событию A .

Вероятностью события называется отношение числа элементарных исходов, благоприятствующих данному событию, к числу всех равновозможных, образующих полную группу элементарных исходов опыта, в котором могут появиться это событие.

Вероятность события A обозначают $P(A)$ (от английского слова probability — вероятность). Тогда, по определению, $P(A) = \frac{m}{n}$,

где m — число благоприятных исходов, n — число всех равновозможных элементарных исходов опыта.

Это определение вероятности называется классическим. Оно появилось на начальном этапе развития теории вероятностей. Задачи, которые решали в то время, часто связаны с развлечениями.

Задача о «русской рулетке».

В барабане револьвера 7 гнезд, из них в 5 заложены патроны. Барабан приводится во вращение, потом нажимается спусковой курок. Какова вероятность того, что, повторив такой опыт 2 раза подряд, оба раза не выстрелит?

Решение

Обозначим событие A — револьвер оба раза не выстрелил. Найти $P(A)$.

Посмотрим, сначала, сколько всего различных комбинаций в двух попытках: так как выбор гнезда

револьвера произвольный, то всего возможно 7 исходов при каждом испытании. Испытания два, поэтому: $n = 7 \cdot 7 = 49$.

Первый раз револьвер не выстрелил, то есть, выпало одно из двух гнезд, где не было патрона. Аналогично произошло и во второй раз. Таким образом, благоприятных шансов: $m = 2 \cdot 2 = 4$.

Дробь $\frac{m}{n} = \frac{4}{49} \approx 0,0816$ искомая вероятность.

Ответ: $P(A) \approx 0,0816$.

Свойства вероятности.

Из определения вероятности события следуют ее простейшие свойства:

1. Вероятность достоверного события равна единице. Действительно, для достоверного события все элементарные исходы являются благоприятными этому событию, то есть $m = n$.

2. Вероятность невозможного события равна нулю. Для невозможного события нет благоприятных исходов, то есть $m = 0$.

3. Вероятность случайного события выражается положительным числом, меньшим единицы. Так как для случайного события $0 < m < n$, то $0 < \frac{m}{n} < 1$, то есть $0 < P(A) < 1$.

Следствие. Следует всегда помнить, что вероятность любого события — есть число от нуля до единицы: $0 \leq P(A) \leq 1$.

Замечание.

Классическое определение вероятности предполагает, что все элементарные исходы равновозможные. Это предположение позволяет считать вероятность события до проведения опыта. На практике ситуация с равновозможными исходами встречается редко. В связи с этим появляется необходимость введения еще одного определения вероятности, так называемого статистического. Прежде, чем ввести статистическое определение веро-

ятности, рассмотрим понятие относительной частоты появления события в проведенном опыте.

Относительной частотой события, или частотой, называется отношение числа опытов, в которых появилось это событие, к числу всех произведенных опытов. Пусть A — случайное событие по отношению к некоторому опыту. Если опыт проведен n раз, при этом событие A наступило n_A раз, то частота события A есть число, равное $\frac{n_A}{n}$. Очевидно, что $0 \leq \frac{n_A}{n} \leq 1$.

Вероятность вычисляется до опыта, а относительная частота — после опыта. Длительные наблюдения показывают, что если в одинаковых условиях производят опыты, в каждом из которых число испытаний достаточно велико, то относительная частота обнаруживает свойство устойчивости. Это свойство состоит в том, что в различных опытах относительная частота изменяется мало, колеблясь около некоторого постоянного числа. Это постоянное число есть вероятность появления события.

То есть, $\frac{n_A}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} P(A)$ (читается: относительная частота стремится при большом числе испытаний к вероятности события). Иначе, $P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n_A}{n}$.

Такую вероятность считают статистической. На практике, в-основном, приходится иметь дело именно со статистической вероятностью. Такие понятия, как вероятность брака на предприятии, вероятность рождения близнецов, вероятность попадания в цель при стрельбе — являются статистическими. При этом возникает вопрос, на сколько много должно быть испытаний, чтобы можно было говорить о статистической вероятности? Естественный ответ: чем больше, тем лучше. Но не всегда есть возможности проводить очень много опытов. Однако, для разных задач и условий есть методы, которые позволяют найти достаточное количество испытаний. Более подробно об этом рассмотрим в разделе Математическая статистика.