

Гантмахер Ф.Р.

Лекции по аналитической механике



МОСКВА
ФИЗМАТЛИТ ®

УДК 531.3

ББК 22.21

Г 19

Гантмахер Ф. Р. **Лекции по аналитической механике:** Учеб. пособие для вузов / Под ред. Е.С. Пятницкого. — 3-е изд., — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. — 264 с. — ISBN 978-5-9221-0067-0.

Монография посвящена изложению общих принципов механики. Подробно освещаются вариационные принципы и интегральные инварианты механики, канонические преобразования, уравнения Гамильтона–Якоби, системы с циклическими координатами. Выясняется возможность распространения аналитических методов механики на электрические и электромеханические системы. Даны приложения аналитической механики к теории устойчивости Ляпунова и теории колебаний.

Книга предназначена для студентов и аспирантов механико-математических, физических и инженерно-физических факультетов университетов, а также для инженеров-исследователей и других специалистов, желающих расширить и углубить свои знания в области механики.

ISBN 978-5-9221-0067-0

© ФИЗМАТЛИТ, 2001

© Ф. Р. Гантмахер, 2001

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие к третьему изданию	6
Предисловие ко второму изданию	6
Предисловие автора к первому изданию	7
 Глава I. Дифференциальные уравнения движения произвольной системы материальных точек	 11
§ 1. Свободные и несвободные системы. Связи и их классификация	11
§ 2. Возможные и виртуальные перемещения. Идеальные связи	15
§ 3. Общее уравнение динамики. Уравнения Лагранжа первого рода	23
§ 4. Принцип виртуальных перемещений. Принцип Даламбера	28
§ 5. Голономные системы. Независимые координаты. Обобщенные силы	37
§ 6. Уравнения Лагранжа второго рода в независимых координатах	44
§ 7. Исследование уравнений Лагранжа	48
§ 8. Теорема об изменении полной энергии. Потенциальные, гироскопические и диссипативные силы	52
§ 9. Электромеханические аналогии	58
§ 10. Уравнения Аппеля для неголономных систем. Псевдокоординаты	60
 Глава II. Уравнения движения в потенциальном поле	 69
§ 11. Уравнения Лагранжа в случае потенциальных сил. Обобщенный потенциал. Ненатуральные системы	69
§ 12. Канонические уравнения Гамильтона	74
§ 13. Уравнения Рауса	81
§ 14. Циклические координаты	83
§ 15. Скобки Пуассона	86
 Глава III. Вариационные принципы и интегральные инварианты	 91
§ 16. Принцип Гамильтона	91
§ 17. Вторая форма принципа Гамильтона	98
§ 18. Основной интегральный инвариант механики (интегральный инвариант Пуанкаре–Картана)	99

§ 19. Гидродинамическая интерпретация основного интегрального инварианта. Теоремы Томсона и Гельмгольца о циркуляции и вихрях	107
§ 20. Обобщенные консервативные системы. Уравнения Уиттекера. Уравнения Якоби. Принцип наименьшего действия Мопертюи–Лагранжа	112
§ 21. Движения по инерции. Связь с геодезическими линиями при произвольном движении консервативной системы	117
§ 22. Универсальный интегральный инвариант Пуанкаре. Теорема Ли Хуа-чжуна	119
§ 23. Инвариантность объема в фазовом пространстве. Теорема Лиувилля	125
Глава IV. Канонические преобразования и уравнение Гамильтона–Якоби	128
§ 24. Канонические преобразования	128
§ 25. Свободные канонические преобразования	132
§ 26. Уравнение Гамильтона–Якоби	135
§ 27. Метод разделения переменных. Примеры	142
§ 28. Применение канонических преобразования в теории возмущений	151
§ 29. Структура произвольного канонического преобразования	152
§ 30. Критерий каноничности преобразования. Скобки Лагранжа	158
§ 31. Симплектичность якобиевой матрицы канонического преобразования	160
§ 32. Инвариантность скобок Пуассона при каноническом преобразовании	162
Глава V. Устойчивость равновесия и движения системы	165
§ 33. Теорема Лагранжа об устойчивости положения равновесия	165
§ 34. Признаки неустойчивости положения равновесия. Теоремы Ляпунова и Четаева	171
§ 35. Асимптотическая устойчивость положения равновесия. Диссипативные системы	174
§ 36. Условная устойчивость. Общая постановка вопроса. Устойчивость движения или произвольного процесса. Теорема Ляпунова	179
§ 37. Устойчивость линейных систем	186
§ 38. Устойчивость по линейному приближению	190
§ 39. Критерии асимптотической устойчивости линейных систем	195
Глава VI. Малые колебания	200
§ 40. Малые колебания консервативной системы	200
§ 41. Нормальные координаты	210
§ 42. Влияние периодических внешних сил на колебания консервативной системы	212

§ 43. Экстремальные свойства частот консервативной системы. Теорема Релея об изменении частот с изменением инерции и жесткости системы. Наложение связей	215
§ 44. Малые колебания упругих систем	220
§ 45. Малые колебания склерономной системы под действием сил, не зависящих явно от времени	226
§ 46. Диссипативная функция Релея. Влияние малых диссипативных сил на колебания консервативной системы	229
§ 47. Влияние внешней силы, зависящей от времени, на малые колебания склерономной системы. Амплитудно-фазовая характеристика	233
Глава VII. Системы с циклическими координатами	239
§ 48. Приведенная система. Потенциал Рауса. Скрытые движения. Концепция Герца о кинетическом происхождении потенциальной энергии	239
§ 49. Устойчивость стационарных движений	249
Список литературы	257
Именной указатель	259
Предметный указатель	260

ПРЕДИСЛОВИЕ К ТРЕТЬЕМУ ИЗДАНИЮ

Монография Ф.Р. Гантмахера по аналитической механике получила широкую известность в мировой литературе по механике. После выхода первого издания она была переведена на несколько иностранных языков. За время, прошедшее после второго издания (1966 г.), книга практически стала библиографической редкостью. В настоящем издании сделаны отдельные исправления. Работа по подготовке этого издания выполнена сотрудниками кафедры механики Московского физико-технического института. По предложению Издательства книга выпускается вместе с третьим изданием «Сборника задач по аналитической механике», составленного Е.С. Пятницким, Н.М. Трухан, Ю.И. Ханукаевым и Г.Н. Яковенко на основе курса лекций Ф.Р. Гантмахера.

Ноябрь 2000 г.

Е.С. Пятницкий

ПРЕДИСЛОВИЕ КО ВТОРОМУ ИЗДАНИЮ

Второе издание книги подготовлено к печати уже после смерти ее автора. Работа по подготовке этого издания была выполнена кафедрой механики Московского физико-технического института, которой в течение многих лет руководил Ф.Р. Гантмахер. Большая часть исправлений и дополнений, сделанных в процессе этой работы, отражает пожелания и замечания, высказанные автором сотрудникам кафедры. Некоторые исправления обусловлены стремлением сделать текст более доступным для студентов. Внося эти уточнения, кафедра стремилась полностью сохранить специфические особенности книги, в которой строгость выводов основных положений аналитической механики и лаконичность текста удивительным образом сочетаются с предельной ясностью изложения.

Август 1965 г.

М.А. Айзерман

ПРЕДИСЛОВИЕ АВТОРА К ПЕРВОМУ ИЗДАНИЮ

В литературе по механике нет единого общепринятого толкования термина «аналитическая механика». Некоторые авторы отождествляют аналитическую механику с теоретической¹⁾. Другие считают, что определяющим признаком аналитической механики является изложение в обобщенных координатах. Третья точка зрения, из которой исходил автор этой книги, назвав ее «Лекциями по аналитической механике», состоит в том, что аналитическая механика характеризуется как системой изложения, так и определенным кругом вопросов, в ней рассматриваемых.

Характерным для системы изложения аналитической механики является то, что в ее основу кладутся общие принципы (дифференциальные или интегральные) и уже из этих принципов аналитическим путем получаются основные дифференциальные уравнения движения. Изложение общих принципов механики, вывод из них основных дифференциальных уравнений движения, исследование самих уравнений и методов их интегрирования — все это составляет основное содержание аналитической механики.

Аналитическая механика входит как часть курса теоретической механики в программы механико-математических, физических и инженерно-физических факультетов университетов и педагогических институтов. В то же время общая программа по теоретической механике во втузах либо совсем не содержит аналитической механики, либо содержит только ее элементы. Между тем современная техника выдвигает задачи, для решения которых недостаточно основ курса теоретической механики, излагаемых в его традиционных разделах «статика», «кинематика» и «динамика точки и системы». Инженеры-исследователи, работающие в разнообразных областях современной техники, должны владеть и общими методами аналитической механики, которые дают универсальный аналитический аппарат для исследования сложных задач, относящихся не только к чисто механическим, но и к электрическим и электромеханическим явлениям.

Настоящая книга не претендует на полноту охвата материала по аналитической механике. Книга возникла из курса лекций, читавшихся автором на протяжении последних шести лет на 4-м семестре Мо-

¹⁾ Так, например, известные курсы теоретической механики Г.К. Суслова и Ш.Ж. Валле Пуссена были названы авторами курсами аналитической механики.

сковского физико-технического института. Это обстоятельство определило отбор материала и характер его изложения.

Курс аналитической механики является фундаментом, на который опирается изучение таких разделов теоретической физики, как квантовая механика, специальная и общая теория относительности и др. Поэтому в книге подробно освещаются вариационные принципы и интегральные инварианты механики, канонические преобразования, уравнение Гамильтона–Якоби, системы с циклическими координатами (главы II, III, IV и VП). Следуя идеям А. Пуанкаре и Э. Картана, автор кладет в основу изложения материала интегральные инварианты механики, которые здесь являются не декоративным украшением теории, а ее рабочим аппаратом.

Технические приложения связаны с рассмотрением несвободных систем. Эти системы подробно изучаются в главе I. В специальном параграфе этой главы, посвященном электромеханическим аналогиям, выясняется возможность распространения аналитических методов механики на электрические и электромеханические системы. В главах V и VI даны приложения аналитической механики к теории устойчивости Ляпунова и теории колебаний. Наряду с классическими вопросами теории линейных колебаний, излагаются и элементы современных частотных методов. Задачи из динамики твердого тела разбираются в отдельных примерах.

Книга предполагает у читателя знакомство с общими основами теоретической механики и высшей математики. Книга предназначена для студентов и аспирантов механико-математических, физических и инженерно-физических факультетов университетов, а также для инженеров-исследователей и других специалистов, желающих расширить и углубить свои знания в области механики.

*Светлой памяти своего учителя
профессора механики
ГАВРИИЛА КОНСТАНТИНОВИЧА
СУСЛОВА
автор посвящает эту книгу*

ГЛАВА I

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ПРОИЗВОЛЬНОЙ СИСТЕМЫ МАТЕРИАЛЬНЫХ ТОЧЕК

§ 1. Свободные и несвободные системы. Связи и их классификация

Изучается движение системы материальных точек

$$P_\nu \quad (\nu = 1, \dots, N)$$

относительно некоторой инерциальной (галилеевой) системы координат. На положения и скорости точек системы наложены ограничения геометрического или кинематического характера, называемые *связями*. Системы с такого рода связями называются *несвободными* в отличие от *свободных* систем, у которых подобные связи отсутствуют.

Аналитически связь выражается уравнением¹⁾

$$f(t, \mathbf{r}_\nu, \dot{\mathbf{r}}_\nu) = 0, \quad (1)$$

где в левую часть входят время t , радиусы-векторы $\mathbf{r}_\nu$ и скорости $\mathbf{v}_\nu = \dot{\mathbf{r}}_\nu$ всех точек P_ν системы ($\nu = 1, \dots, N$). В частном случае, когда скорости $\dot{\mathbf{r}}_\nu$ не входят в уравнение связи (1), связь называется *конечной* или *геометрической*. Ее аналитическая запись выглядит так:

$$f(t, \mathbf{r}_\nu) = 0. \quad (2)$$

¹⁾ Точка, поставленная над буквой, обозначает дифференцирование соответствующей величины по времени. Все радиусы-векторы строятся из одного и того же полюса, неподвижного в данной системе координат. Далее, $f(t, \mathbf{r}_\nu, \dot{\mathbf{r}}_\nu) = 0$ представляет собой сокращенное обозначение для функции $f(t, \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, \dot{\mathbf{r}}_1, \dots, \dot{\mathbf{r}}_N)$. Подобного рода сокращенные обозначения будут употребляться на протяжении всей книги. Если x_ν, y_ν, z_ν — декартовы координаты точки P_ν в рассматриваемой системе координат ($\nu = 1, \dots, N$), то функцию f можно считать функцией от $6N + 1$ скалярных аргументов $t, x_\nu, y_\nu, z_\nu, \dot{x}_\nu, \dot{y}_\nu, \dot{z}_\nu$ ($\nu = 1, \dots, N$). Относительно функции f , как и относительно всех функций, встречающихся в дальнейшем тексте, предполагается (при отсутствии соответствующих оговорок), что эти функции непрерывны вместе с теми своими производными, которые фигурируют в соответствующих местах текста.

В общем же случае связь (1) называется *дифференциальной* или *кинематической*. В дальнейшем мы ограничимся рассмотрением только таких дифференциальных связей, в уравнения которых скорости точек входят линейно:

$$\sum_{\nu=1}^N \mathbf{l}_{\nu} \dot{\mathbf{r}}_{\nu} + D = 0. \quad (3)$$

Здесь $\mathbf{l}_{\nu} \dot{\mathbf{r}}_{\nu}$ — скалярное произведение векторов $\mathbf{l}_{\nu}$ и $\dot{\mathbf{r}}_{\nu}$, а векторы $\mathbf{l}_{\nu}$ и скаляр D представляют собой заданные функции от t и всех $\mathbf{r}_{\mu}$ ($\mu, \nu = 1, \dots, N$). При этом предполагается, что векторы $\mathbf{l}_{\nu}$ не могут все одновременно обращаться в нуль.

При наличии конечной связи вида (2) система не может в каждый данный момент времени занимать произвольное положение в пространстве. Конечная связь накладывает ограничения на возможные положения системы в момент времени t . При наличии же только дифференциальной связи система в любой момент времени t может иметь произвольное положение в пространстве. Однако в этом положении скорости точек системы уже не могут быть произвольными. Дифференциальная связь накладывает ограничения на эти скорости.

Каждая конечная связь вида (2) влечет за собой как следствие дифференциальную связь, уравнение которой получается почленным дифференцированием равенства (2):

$$\sum_{\nu=1}^N \frac{\partial f}{\partial r_{\nu}} \dot{\mathbf{r}}_{\nu} + \frac{\partial f}{\partial t} = 0, \quad (4)$$

где¹⁾ $\partial f / \partial r_{\nu} = \text{grad}_{\nu} f$ ($\nu = 1, \dots, N$). Но такая дифференциальная связь не эквивалентна конечной связи (2). Она эквивалентна конечной связи

$$f(t, \mathbf{r}_{\nu}) = c, \quad (5)$$

где c — произвольная постоянная. Поэтому конечная связь (4) называется *интегрируемой*.

Заметим, что в прямоугольных декартовых координатах уравнения связей (1)–(4) записываются так:

$$f(t, x_{\nu}, y_{\nu}, z_{\nu}, \dot{x}_{\nu}, \dot{y}_{\nu}, \dot{z}_{\nu}) = 0, \quad (1')$$

$$f(t, x_{\nu}, y_{\nu}, z_{\nu}) = 0, \quad (2')$$

¹⁾ Если $\mathbf{r}_{\nu} = x_{\nu} \mathbf{i} + y_{\nu} \mathbf{j} + z_{\nu} \mathbf{k}$, где $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ — взаимно-ортогональные орты координатных осей, то

$$\frac{\partial f}{\partial r_{\nu}} = \frac{\partial f}{\partial x_{\nu}} \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y_{\nu}} \mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z_{\nu}} \mathbf{k} \quad (\nu = 1, \dots, N).$$

$$\sum_{\nu=1}^N (A_{\nu} \dot{x}_{\nu} + B_{\nu} \dot{y}_{\nu} + C_{\nu} \dot{z}_{\nu}) + D = 0^1), \quad (3')$$

$$\sum_{\nu=1}^N \left(\frac{\partial f}{\partial x_{\nu}} \dot{x}_{\nu} + \frac{\partial f}{\partial y_{\nu}} \dot{y}_{\nu} + \frac{\partial f}{\partial z_{\nu}} \dot{z}_{\nu} \right) + \frac{\partial f}{\partial t} = 0. \quad (4')$$

Конечная связь (2) или (2') называется *стационарной*, если t не входит явно в уравнение связи, т. е. если $\partial f / \partial t = 0$. В этом случае левая часть уравнения дифференциальной связи (4) линейна и однородна относительно скоростей. По аналогии с этим дифференциальная связь (3) или (3') называется *стационарной*, если $D = 0$ и векторы $\mathbf{l}_{\nu}$ в уравнении (3) [соответственно коэффициенты A_{ν} , B_{ν} , C_{ν} в уравнении (3')] не зависят явно от t .

Система материальных точек называется *голономной*, если на точки этой системы не наложены дифференциальные неинтегрируемые связи. Таким образом, голономной является всякая свободная система материальных точек, а также несвободная система с конечными или дифференциальными, но интегрируемыми связями. У голономной системы все связи могут быть записаны в конечном виде.

При наличии дифференциальных неинтегрируемых связей система называется *неголономной*²⁾.

Система называется *склерономной*, если на нее наложены только стационарные связи. В противном случае система называется *реономной*.

Примеры. 1. Материальная точка может двигаться только по поверхности. Пусть уравнение этой поверхности задано в виде

$$f(\mathbf{r}) = 0 \quad (6)$$

или

$$f(x, y, z) = 0. \quad (6')$$

Это конечная стационарная связь.

Если поверхность подвижная или деформирующаяся, то в уравнение поверхности явно войдет время t :

$$f(t, \mathbf{r}) = 0 \quad (7)$$

или

$$f(t, x, y, z) = 0. \quad (7')$$

В этом случае связь конечная, но нестационарная.

¹⁾ A_{ν} , B_{ν} , C_{ν} ($\nu = 1, \dots, N$) — скалярные функции от t , x_1 , y_1 , z_1 , $\dots$, x_N , y_N , z_N .

²⁾ Часто и сами дифференциальные неинтегрируемые связи называются неголономными. Иногда дифференциальные интегрируемые связи называются *полуголономными*.

2. Две материальные точки соединены стержнем постоянной длины l . В этом случае уравнение связи имеет вид

$$(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)^2 - l^2 = 0 \quad (8)$$

или

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 - l^2 = 0. \quad (8')$$

Это голономная склерономная система.

Заметим, что твердое тело можно рассматривать как систему материальных точек, находящихся на неизменном расстоянии друг от друга, т. е. подчиненных связям вида (8). С этой точки зрения свободное твердое тело является частным случаем несвободной голономной склерономной системы материальных точек.

3. Две материальные точки соединены стержнем переменной длины $l = f(t)$. Уравнение связи записывается так:

$$(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)^2 - f^2(t) = 0 \quad (9)$$

или

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 - f^2(t) = 0. \quad (9')$$

Это голономная реономная система.

4. Две материальные точки в плоскости соединены стержнем постоянной длины l и могут двигаться только так, чтобы скорость середины стержня была направлена вдоль стержня (движение конька по плоскости). Уравнения связей записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} z_1 &= 0, \quad z_2 = 0, \\ (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 - l^2 &= 0, \\ \frac{\dot{x}_1 + \dot{x}_2}{x_1 - x_2} &= \frac{\dot{y}_1 + \dot{y}_2}{y_1 - y_2}. \end{aligned} \quad (10)$$

Эта система неголономная, так как последнее из уравнений (10) определяет дифференциальную неинтегрируемую связь.

Наряду со связями вида (1), которые называются *удерживающими*, в механике рассматриваются также *неудерживающие* связи, которые записываются в виде неравенства

$$f(t, \mathbf{r}_\nu, \dot{\mathbf{r}}_\nu) \geq 0. \quad (11)$$

В качестве примера можно рассмотреть две материальные точки, соединенные нитью длиной l . Эта связь выражается неравенством

$$l^2 - (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)^2 \geq 0. \quad (12)$$

Если в условии (11) имеет место знак равенства, то говорят, что *связь напряжена*.

Движение системы, на которую наложена неудерживающая связь, можно разбить на участки таким образом, чтобы на одних участках связь была напряжена и движение проходило так, как если бы связь была удерживающей, а на других участках связь была не напряжена и движение проходило так, как если бы этой связи не было. Таким образом, на отдельных участках неудерживающая связь либо заменяется удерживающей, либо совсем отбрасывается. Исходя из этого, мы в дальнейшем будем рассматривать исключительно удерживающие связи.

§ 2. Возможные и виртуальные перемещения. Идеальные связи

Пусть на материальную систему наложены d конечных связей

$$f_{\alpha}(t, \mathbf{r}_{\nu}) = 0 \quad (\alpha = 1, \dots, d) \quad (1)$$

и g дифференциальных¹⁾

$$\sum_{\nu=1}^N l_{\beta\nu} \mathbf{v}_{\nu} + D_{\beta} = 0 \quad (\beta = 1, \dots, g). \quad (2)$$

Заменим конечные связи вытекающими из них дифференциальными:

$$\sum_{\nu=1}^N \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial r_{\nu}} \mathbf{v}_{\nu} + \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial t} = 0 \quad (\alpha = 1, \dots, d). \quad (3)$$

Систему векторов $\mathbf{v}_{\nu}$ будем называть *возможными скоростями* для некоторого момента времени t и для некоторого возможного в этот момент положения системы, если векторы $\mathbf{v}_{\nu}$ удовлетворяют $d + g$ линейным уравнениям (2) и (3).

Таким образом, *возможные скорости* — это скорости, допускаемые связями. Для каждого возможного положения системы в момент времени t существует бесчисленное множество систем возможных скоростей. При действительном движении системы в момент t реализуется одна из этих систем скоростей.

Систему бесконечно малых перемещений

$$d\mathbf{r}_{\nu} = \mathbf{v}_{\nu} dt \quad (\nu = 1, \dots, N), \quad (4)$$

где $\mathbf{v}_{\nu}$ ($\nu = 1, \dots, N$) — возможные скорости, будем называть *возможными бесконечно малыми перемещениями* или, для сокращения,

¹⁾ В уравнениях дифференциальных связей мы вместо $\dot{\mathbf{r}}_{\nu}$ пишем $\mathbf{v}_{\nu}$.

просто возможными перемещениями. Умножив уравнения (2) и (3) почленно на dt , получим уравнения, определяющие возможные перемещения:

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=1}^N \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial r_{\nu}} d\mathbf{r}_{\nu} + \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial t} dt &= 0 \quad (\alpha = 1, \dots, d), \\ \sum_{\nu=1}^N l_{\beta\nu} d\mathbf{r}_{\nu} + D_{\beta} dt &= 0 \quad (\beta = 1, \dots, g). \end{aligned} \quad (5)$$

Возьмем две системы возможных перемещений для одного и того же момента времени и для одного и того же положения системы:

$$d\mathbf{r}_{\nu} = \mathbf{v}_{\nu} dt \quad \text{и} \quad d'\mathbf{r}_{\nu} = \mathbf{v}'_{\nu} dt \quad (\nu = 1, \dots, N).$$

Как $d\mathbf{r}_{\nu}$, так и $d'\mathbf{r}_{\nu}$ удовлетворяют уравнениям (5), а разности

$$\delta\mathbf{r}_{\nu} = d'\mathbf{r}_{\nu} - d\mathbf{r}_{\nu} \quad (\nu = 1, \dots, N) \quad (6)$$

удовлетворяют однородным соотношениям:

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=1}^N \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial r_{\nu}} \delta\mathbf{r}_{\nu} &= 0 \quad (\alpha = 1, \dots, d), \\ \sum_{\nu=1}^N l_{\beta\nu} \delta\mathbf{r}_{\nu} &= 0 \quad (\beta = 1, \dots, g). \end{aligned} \quad (7)$$

Разности $\delta\mathbf{r}_{\nu} = d'\mathbf{r}_{\nu} - d\mathbf{r}_{\nu}$ будем называть *виртуальными перемещениями*. Всякая система векторов $\delta\mathbf{r}_{\nu}$, удовлетворяющая уравнениям (7), представляет собой систему виртуальных перемещений. Уравнения (7) для виртуальных перемещений отличаются от уравнений (5), определяющих возможные перемещения, отсутствием членов $(\partial f_{\alpha}/\partial t) dt$ и $D_{\beta} dt$. Поэтому говорят, что *виртуальные перемещения совпадают с возможными перемещениями при «замороженных» связях*.

Действительно, при «замораживании» время t , входящее в уравнения конечных связей, фиксируется, т. е. связь как бы застывает в той конфигурации, которую она имела в момент t . Тогда при дифференцировании функций f_{α} члены $(\partial f_{\alpha}/\partial t) dt$ не появляются и первые d уравнений (5) совпадают с соответствующими уравнениями (7). Для дифференциальной связи «замораживание» означает придание ей стационарного характера, т. е. отбрасывание D_{β} в левой части уравнений связи и фиксирование t , явно входящего в коэффициенты $l_{\beta\nu}$. После этого и последние g уравнений (5) совпадают с соответствующими уравнениями (7).

Можно еще сказать, что виртуальные перемещения представляют собой перемещения точек системы из одного возможного положения системы в момент t в другое бесконечно близкое, возможное для того же самого момента времени t положение системы.

При стационарных связях виртуальные перемещения совпадают с возможными.

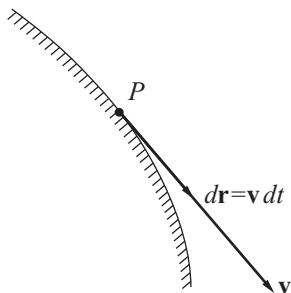


Рис. 1

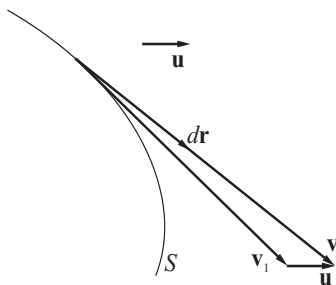


Рис. 2

Примеры. 1. Точка движется по неподвижной поверхности (рис. 1). В этом случае любой вектор $\mathbf{v}$, построенный из точки P и касательный к поверхности в этой точке, будет представлять собой возможную скорость. Соответствующее возможное перемещение $d\mathbf{r} = \mathbf{v} dt$ также лежит в плоскости, касательной к поверхности в точке P . Разность $\delta\mathbf{r} = d'\mathbf{r} - d\mathbf{r}$ двух касательных векторов в свою очередь представляет собой вектор, касающийся поверхности в той же точке. Таким образом, любой вектор, построенный из точки P и лежащий в касательной плоскости, можно рассматривать как некоторое $d\mathbf{r}$ и как некоторое $\delta\mathbf{r}$. В данном примере связь стационарна и виртуальные перемещения совпадают с возможными.

2. Связь представляется поверхностью S , которая сама движется (как твердое тело) с некоторой скоростью $\mathbf{u}$ относительно исходной системы координат (рис. 2).

В этом случае возможная скорость $\mathbf{v}$ получается из произвольного вектора $\mathbf{v}_1$, касательного к поверхности, прибавлением к нему скорости $\mathbf{u}$:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{u}.$$

Поэтому

$$d\mathbf{r} = \mathbf{v} dt = \mathbf{v}_1 dt + \mathbf{u} dt.$$

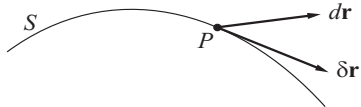
Аналогично для другого возможного перемещения

$$d'\mathbf{r} = \mathbf{v}'_1 dt + \mathbf{u} dt$$

и виртуальное перемещение

$$\delta\mathbf{r} = d'\mathbf{r} - d\mathbf{r} = (\mathbf{v}'_1 - \mathbf{v}_1) dt$$

представляет собой, в отличие от $d\mathbf{r}$, вектор, лежащий в плоскости, касательной к поверхности в точке P (рис. 3).



Вектор $\delta\mathbf{r}$ представляет собой возможное перемещение для «остановленной» поверхности S .

В декартовых координатах вектор $\delta\mathbf{r}_\nu$ характеризуется тремя проекциями на оси δx_ν , δy_ν , δz_ν ($\nu = 1, \dots, N$), и уравнения (7), определяющие виртуальные перемещения, могут быть записаны в следующем виде:

$$\sum_{\nu=1}^N \left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial x_\nu} \delta x_\nu + \frac{\partial f_\alpha}{\partial y_\nu} \delta y_\nu + \frac{\partial f_\alpha}{\partial z_\nu} \delta z_\nu \right) = 0 \quad (\alpha = 1, \dots, d),$$

$$\sum_{\nu=1}^N (A_{\beta\nu} \delta x_\nu + B_{\beta\nu} \delta y_\nu + C_{\beta\nu} \delta z_\nu) = 0 \quad (\beta = 1, \dots, g).$$

Если эти $d + g$ уравнений независимы, то среди $3N$ виртуальных приращений координат δx_ν , δy_ν , δz_ν будет $n = 3N - d - g$ независимых. Число n называется *числом степеней свободы* данной системы материальных точек.

Пусть в точках P_ν системы приложены соответственно силы $\mathbf{F}_\nu$ ($\nu = 1, \dots, N$)¹). Если бы связи отсутствовали, то, согласно второму закону Ньютона, между массами m_ν , ускорениями $\mathbf{w}_\nu$ и силами $\mathbf{F}_\nu$ имели бы место соотношения $m_\nu \mathbf{w}_\nu = \mathbf{F}_\nu$ ($\nu = 1, \dots, N$). При наличии связей ускорения $\mathbf{w}_\nu = (1/m_\nu) \mathbf{F}_\nu$ могут оказаться (в данный момент времени t , в данном положении точек системы $\mathbf{r}_\nu$ и при заданных скоростях $\mathbf{v}_\nu$) несовместимыми со связями. Действительно, продифференцировав почленно равенства (3) и (2) по времени, мы получим аналитическое выражение для ограничений, накладываемых связями на ускорения $\mathbf{w}_\nu$ точек системы²):

$$\sum_{\nu=1}^N \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{r}_\nu} \mathbf{w}_\nu + \sum_{\nu=1}^N \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{r}_\nu} \right) \mathbf{v}_\nu + \frac{d}{dt} \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} = 0 \quad (\alpha = 1, \dots, d),$$

$$\sum_{\nu=1}^N l_{\beta\nu} \mathbf{w}_\nu + \sum_{\nu=1}^N \frac{dl_{\beta\nu}}{dt} \mathbf{v}_\nu + \frac{dD_\beta}{dt} = 0 \quad (\beta = 1, \dots, g).$$

¹) Под $\mathbf{F}_\nu$ мы понимаем равнодействующую всех сил, приложенных непосредственно к материальной точке P_ν ($\nu = 1, \dots, N$).

²) Левые части в соотношениях (8) линейно зависят от ускорений $\mathbf{w}_\nu$. Эти левые части, как легко усмотреть после выполнения дифференцирования, зависят еще и от t , $\mathbf{r}_\nu$, $\mathbf{v}_\nu$ ($\nu = 1, \dots, N$).

Ускорения $\mathbf{w}_\nu = (1/m_\nu)\mathbf{F}_\nu$ могут не удовлетворять этим соотношениям. Тогда материально осуществленные связи действуют на материальные точки системы P_ν с некоторыми дополнительными силами $\mathbf{R}_\nu$ ($\nu = 1, \dots, N$); эти силы воздействия связей $\mathbf{R}_\nu$ носят название *реакций связей*¹⁾. Возникающие реакции таковы, что ускорения, определяемые из уравнений

$$m_\nu \mathbf{w}_\nu = \mathbf{F}_\nu + \mathbf{R}_\nu \quad (\nu = 1, \dots, N), \quad (9)$$

уже допускаются связями.

В отличие от реакций $\mathbf{R}_\nu$ ($\nu = 1, \dots, N$) заранее заданные силы $\mathbf{F}_\nu$ ($\nu = 1, \dots, N$) называются *активными силами*. Активные силы обычно задаются как известные функции от времени, положения и скоростей точек системы²⁾:

$$\mathbf{F}_\nu = \mathbf{F}_\nu(t, \mathbf{r}_\mu, \mathbf{v}_\mu) \quad (\nu = 1, \dots, N). \quad (10)$$

Основная задача динамики несвободной системы состоит в следующем.

Заданы активные силы $\mathbf{F}_\nu = \mathbf{F}_\nu(t, \mathbf{r}_\mu, \mathbf{v}_\mu)$, и даны совместимые со связями начальные положения $\mathbf{r}_\nu^0$ и начальные скорости $\mathbf{v}_\nu^0$ точек системы ($\nu = 1, \dots, N$). Требуется определить движение системы и реакции связей $\mathbf{R}_\nu$ ($\nu = 1, \dots, N$)³⁾.

Если относительно характера связей ничего не известно, кроме определяющих уравнений (1) и (2), и, следовательно, ничего не известно относительно вызываемых этими связями реакций $\mathbf{R}_\nu$, то сформулированная выше задача является неопределенной, так как число подлежащих определению скалярных величин $x_\nu, y_\nu, z_\nu, R_{\nu x}, R_{\nu y}, R_{\nu z}$ больше числа имеющихся скалярных соотношений — уравнений $m_\nu \ddot{x}_\nu = F_{\nu x} + R_{\nu x}, m_\nu \ddot{y}_\nu = F_{\nu y} + R_{\nu y}, m_\nu \ddot{z}_\nu = F_{\nu z} + R_{\nu z}$ и уравнений связей (1) и (2) [$6N > 3N + d + g$].

Для того чтобы основная задача динамики стала определенной, необходимо иметь какие-то дополнительные $6N - (3N + d + g) = 3N - d - g = n$ независимых соотношений между искомыми величинами. Эти соотношения мы получим, если ограничимся важным классом *идеальных связей*.

Связи называются *идеальными*, если сумма работ реакций этих связей на любых виртуальных перемещениях всегда равна нулю, т. е. если

$$\sum_{\nu=1}^N \mathbf{R}_\nu \delta \mathbf{r}_\nu = 0. \quad (11)$$

¹⁾ При наличии нескольких связей ($d + g > 1$) $\mathbf{R}_\nu$ есть равнодействующая всех реакций связей для точки P_ν ($\nu = 1, \dots, N$).

²⁾ В общем случае правые части в равенствах (10) зависят помимо t от всех $\mathbf{r}_\mu$ и $\mathbf{v}_\mu$ ($\nu = 1, \dots, N$).

³⁾ В случае свободной системы задача определения реакций отпадает и остается только задача определения движения системы.

Это равенство можно переписать и в развернутом виде:

$$\sum_{\nu=1}^N (R_{\nu x} \delta x_{\nu} + R_{\nu y} \delta y_{\nu} + R_{\nu z} \delta z_{\nu}) = 0. \quad (11')$$

Среди $3N$ величин δx_{ν} , δy_{ν} , δz_{ν} имеется n независимых ($n = 3N - n - g$ — число степеней свободы данной системы). Поэтому в равенстве (11') можно выразить $3N - n$ зависимых приращений δx_{ν} , δy_{ν} , δz_{ν} через n независимых приращений и приравнять нулю коэффициенты при этих независимых приращениях. Тогда мы получим недостающие n соотношений, благодаря которым основная задача динамики несвободной системы становится определенной.

Естественность и практическая важность выделенного нами класса связей станут ясными после рассмотрения следующих примеров идеальных связей.

Примеры. 1. Материальная точка вынуждена двигаться по *неподвижной гладкой поверхности* (рис. 4).

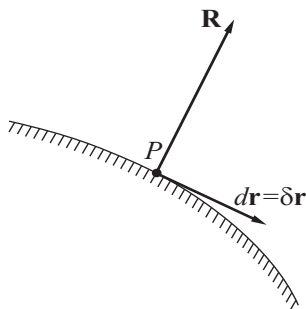


Рис. 4

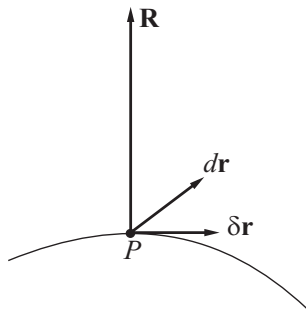


Рис. 5

В этом случае любое возможное перемещение $d\mathbf{r}$, как и любое виртуальное перемещение $\delta\mathbf{r}$, лежит в плоскости, касательной к поверхности в точке P , а реакция гладкой поверхности направлена по нормали к поверхности в этой точке; поэтому всегда

$$\mathbf{R} d\mathbf{r} = 0 \quad \text{или} \quad \mathbf{R} \delta\mathbf{r} = 0.$$

2. Материальная точка вынуждена двигаться по *подвижной или деформирующейся гладкой поверхности* (рис. 5).

В этом случае возможная скорость материальной точки и, следовательно, бесконечно малое перемещение $d\mathbf{r} = \mathbf{v} dt$ уже не лежит в касательной плоскости (см. пример 2 на с. 17). Виртуальное же перемещение $\delta\mathbf{r}$, которое представляет собой бесконечно малое возможное перемещение для «оста-

новленной», или «замороженной» поверхности, лежит в касательной плоскости. Поскольку реакция и в случае подвижной или деформирующейся гладкой поверхности направлена по нормали к поверхности, то $\mathbf{R} \delta \mathbf{r} = 0$ (в то время как $\mathbf{R} d\mathbf{r} \neq 0$).

Таким образом, *гладкая поверхность, как неподвижная, так и подвижная или деформирующаяся представляет собой идеальную связь*.

Пример 2 наглядно поясняет, почему при определении нестационарных идеальных связей необходимо приравнивать нулю работу сил реакций на произвольных виртуальных, а не возможных перемещениях.

В дальнейших примерах мы встретимся уже только со стационарными связями¹⁾.

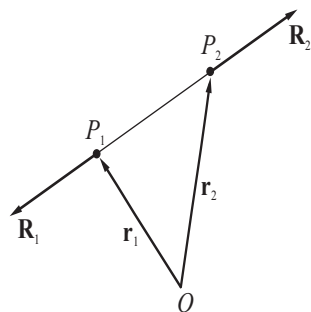


Рис. 6

3. Две материальные точки соединены стержнем неизменной длины с пренебрежимо малой массой (рис. 6).

Обозначим через $\mathbf{R}_1$ и $\mathbf{R}_2$ реакции связи, приложенные к материальным точкам P_1 и P_2 . Тогда согласно третьему закону Ньютона на стержень действуют силы $\mathbf{N}_1 = -\mathbf{R}_1$ и $\mathbf{N}_2 = -\mathbf{R}_2$. Обозначая через m и $\mathbf{w}$ массу стержня и ускорение его центра инерции, а через I и ε — центральный момент инерции и угловое ускорение, будем иметь:

$$m\mathbf{w} = \mathbf{N}_1 + \mathbf{N}_2, \quad I\varepsilon = L,$$

где L — суммарный момент сил $\mathbf{N}_1$ и $\mathbf{N}_2$ относительно центра инерции. Но, по условию, $m = 0$ и $I = 0$. Следовательно, $\mathbf{N}_1 + \mathbf{N}_2 = 0$ и $L = 0$ при конечных w и ε ²⁾. Из этих равенств следует, что силы $\mathbf{N}_1$ и $\mathbf{N}_2$, а значит, и $\mathbf{R}_1$ и $\mathbf{R}_2$ прямо противоположны, т. е. направлены вдоль стержня.

Далее,

$$\mathbf{R}_1 \delta \mathbf{r}_1 + \mathbf{R}_2 \delta \mathbf{r}_2 = -\mathbf{R}_2 d\mathbf{r}_1 + \mathbf{R}_2 d\mathbf{r}_2 = \mathbf{R}_2 (d\mathbf{r}_2 - d\mathbf{r}_1) = \mathbf{R}_2 d(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1).$$

Пусть $\mathbf{R}_2 = c(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)$. Тогда

$$\mathbf{R}_1 \delta \mathbf{r}_1 + \mathbf{R}_2 \delta \mathbf{r}_2 = c(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) d(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) = \frac{c}{2} d(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)^2 = 0,$$

поскольку $(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)^2 = \text{const.}$

¹⁾ Из определения идеальных связей вытекает, что нестационарная связь является идеальной, если идеальными являются все ее конфигурации в различные моменты времени, рассматриваемые как стационарные связи.

²⁾ Если движение стержня не плоскопараллельное, то скалярное равенство $I\varepsilon = L$ заменяется векторным $(d/dt)(\hat{\mathbf{I}}\boldsymbol{\omega}) = \mathbf{L}$, где $\hat{\mathbf{I}}$ — тензор инерции, а $\boldsymbol{\omega}$ — угловая скорость. Из равенства $\hat{\mathbf{I}} = 0$ снова следует $\alpha = 0$.

Абсолютно твердое тело является системой материальных точек, в которой на любые две точки наложена связь рассматриваемого типа. Поэтому твердое тело можно считать системой материальных точек, подчиненных идеальным связям. При отсутствии других связей, кроме связей, осуществляющих жесткое соединение точек тела между собой, твердое тело называется *свободным*.

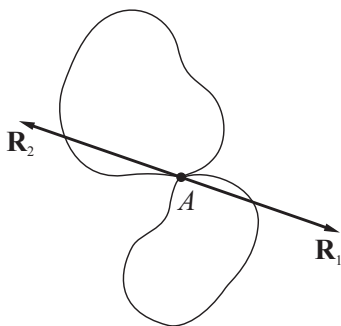


Рис. 7

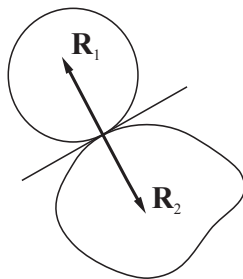


Рис. 8

4. Два твердых тела *шарнирно соединены* в точке A (рис. 7). Пренебрегая массой и размерами шарнира, можно утверждать (как и в предыдущем примере), что $\mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_2 = 0$. Но тогда

$$\mathbf{R}_1 \delta \mathbf{r} + \mathbf{R}_2 \delta \mathbf{r} = (\mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_2) \delta \mathbf{r} = 0.$$

5. Два твердых тела при движении *соприкасаются идеально гладкими поверхностями*. (Трением пренебрегаем!) (рис. 8). В этом случае снова $\mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_2 = 0$. При этом $\mathbf{R}_1$ и $\mathbf{R}_2$ направлены по общей нормали к поверхностям. С другой стороны, относительная скорость этих тел в месте соприкосновения $\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1$, а значит, и разность возможных перемещений $d\mathbf{r}_2 - d\mathbf{r}_1 = (\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1) dt$ лежат в общей касательной плоскости. Поэтому

$$\mathbf{R}_1 \delta \mathbf{r}_1 + \mathbf{R}_2 \delta \mathbf{r}_2 = \mathbf{R}_2 d\mathbf{r}_1 + \mathbf{R}_2 d\mathbf{r}_2 = \mathbf{R}_2 (d\mathbf{r}_2 - d\mathbf{r}_1) = 0.$$

6. Два твердых тела при движении *соприкасаются идеально шероховатыми поверхностями* («зубчатое зацепление»). В этом случае относительная скорость скольжения равна $\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1 = 0$. Следовательно, и $d\mathbf{r}_2 - d\mathbf{r}_1 = (\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1) dt = 0$. Поэтому и здесь

$$\mathbf{R}_1 \delta \mathbf{r}_1 + \mathbf{R}_2 \delta \mathbf{r}_2 = \mathbf{R}_2 (d\mathbf{r}_2 - d\mathbf{r}_1) = 0.$$

Сложный механизм можно рассматривать как систему твердых тел, которые попарно либо соединены между собой жестко или шарнирно, либо соприкасаются своими поверхностями. Если считать все

жесткие соединения абсолютно жесткими, все шарниры — идеальными, все соприкасающиеся плоскости — идеально гладкими или идеально шероховатыми, то *любой сложный механизм можно трактовать как систему материальных точек, подчиненную идеальным связям.*

Заметим, что во многих случаях подобная идеализация не является допустимой. Так, например, пренебрежение силами трения может иногда существенным образом исказить физическую картину явления. В этом случае условие идеальности связей следует отбросить и вместо него взять другие условия, вытекающие из характера связей и законов трения.

Однако можно поступить иначе. Можно и в этих случаях считать связи идеальными, учитывая при этом только нормальные составляющие реакций негладких поверхностей и рассматривая силы трения как неизвестные активные силы. Появление новых неизвестных компенсируется дополнительными соотношениями, получаемыми из экспериментальных законов трения.

При такой трактовке понятия идеальных связей применимость этого понятия становится практически универсальной.

В дальнейшем всегда предполагается, что все связи, наложенные на систему, являются идеальными.

§ 3. Общее уравнение динамики. Уравнения Лагранжа первого рода

Для материальных точек несвободной системы имеют место уравнения

$$m_\nu \mathbf{w}_\nu = \mathbf{F}_\nu + \mathbf{R}_\nu \quad (\nu = 1, \dots, N), \quad (1)$$

где m_ν — масса ν -й точки, $\mathbf{w}_\nu$ — ее ускорение, а $\mathbf{F}_\nu$ и $\mathbf{R}_\nu$ — соответственно равнодействующая активных сил и равнодействующая сил реакций, действующих на эту точку ($\nu = 1, \dots, N$). Поскольку связи идеальны, то в любом положении системы при любых виртуальных перемещениях

$$\sum_{\nu=1}^N \mathbf{R}_\nu \delta \mathbf{r}_\nu = 0. \quad (2)$$

Подставляя сюда вместо реакций $\mathbf{R}_\nu$ их выражения из уравнений (1) и умножая обе части полученного равенства на -1 , получаем

$$\sum_{\nu=1}^N (\mathbf{F}_\nu - m_\nu \mathbf{w}_\nu) \delta \mathbf{r}_\nu = 0. \quad (3)$$

Равенство (3) называется *общим уравнением динамики*. Это равенство утверждает, что при движении системы в любой момент времени *сумма работ активных сил и сил инерции на любых виртуальных перемещениях равна нулю*.

Таким образом, общее уравнение динамики всегда выполняется для любого совместимого со связями движения, соответствующего заданным активным силам $\mathbf{F}_\nu$ ($\nu = 1, \dots, N$).

Пусть теперь, наоборот, дано некоторое совместимое со связями движение системы, для которого выполняется общее уравнение динамики (3). Тогда, полагая

$$\mathbf{R}_\nu = m_\nu \mathbf{w}_\nu - \mathbf{F}_\nu \quad (\nu = 1, \dots, N),$$

будем иметь равенства (1) и (2). Таким образом, в любой момент времени можно подобрать такие реакции $\mathbf{R}_\nu$, которые в силу равенства (2) были бы допустимыми для данных связей и при которых имеют место полученные из второго закона Ньютона уравнения (1). Мы считаем, что эти реакции $\mathbf{R}_\nu$ в действительности реализуются («гипотеза о реализации допустимых реакций») и что, следовательно, рассматриваемое движение соответствует данным активным силам $\mathbf{F}_\nu(t, \mathbf{r}_\mu, \mathbf{v}_\mu)$ ($\nu = 1, \dots, N$). Таким образом, *общее уравнение динамики выражает необходимое и достаточное условие для того, чтобы движение, совместимое со связями, соответствовало заданной системе активных сил $\mathbf{F}_\nu$ ($\nu = 1, \dots, N$)*¹⁾.

Найдем выражения для реакций $\mathbf{R}_\nu$ с помощью так называемых неопределенных множителей Лагранжа. Выпишем соотношения, определяющие виртуальные перемещения точек системы (см. § 2):

$$\sum_{\nu=1}^N \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{r}_\nu} \delta \mathbf{r}_\nu = 0 \quad (\alpha = 1, \dots, d), \quad (4)$$

$$\sum_{\nu=1}^N l_{\beta\nu} \delta \mathbf{r}_\nu = 0 \quad (\beta = 1, \dots, g). \quad (5)$$

Умножая почленно равенства (4) и (5) на произвольные скалярные множители $-\lambda_\alpha$ и $-\mu_\beta$ и складывая почленно полученные равенства с равенством (2), получаем:

$$\sum_{\nu=1}^N \left(\mathbf{R}_\nu - \sum_{\alpha=1}^d \lambda_\alpha \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{r}_\nu} - \sum_{\beta=1}^g \mu_\beta l_{\beta\nu} \right) \delta \mathbf{r}_\nu = 0. \quad (6)$$

¹⁾ При этом не следует забывать, что общее уравнение динамики (3) представляет собой, по существу, не одно уравнение, а систему уравнений, поскольку для любого момента времени t в уравнение (3) вместо $\delta \mathbf{r}_\nu$ ($\nu = 1, \dots, N$) можно подставить произвольные виртуальные перемещения.

В развернутом виде это соотношение запишется так:

$$\sum_{\nu=1}^N \left(R_{\nu x} - \sum_{\alpha=1}^d \lambda_{\alpha} \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial x_{\nu}} - \sum_{\beta=1}^g \mu_{\beta} A_{\beta \nu} \right) \delta x_{\nu} + \{y\}_{\nu} \delta y_{\nu} + \{z\}_{\nu} \delta z_{\nu} = 0. \quad (6')$$

Здесь мы через $\{y\}_{\nu}$ и $\{z\}_{\nu}$ сокращенно обозначили выражения, которые отличаются от выписанного в формуле (6') коэффициента при δx_{ν} заменой букв x, A на y, B или на z, C соответственно.

Соотношения (7') § 2 позволяют выразить $d+g$ из $3N$ виртуальных приращений $\delta x_{\nu}, \delta y_{\nu}, \delta z_{\nu}$ через остальные $n = 3N - d - g$ приращений. При этом определитель J , составленный из коэффициентов при «зависимых» приращениях в уравнениях (7') § 2 отличен от нуля.

Подберем $d+g$ множителей λ_{α} и μ_{β} так, чтобы в равенстве (6') коэффициенты при «зависимых» приращениях обратились в нуль. Это можно сделать, и притом единственным образом, ибо определитель J из коэффициентов при определяемых величинах $\lambda_{\alpha}, \mu_{\beta}$ не равен нулю. После этого в равенстве (6') остаются только слагаемые с независимыми приращениями $\delta x_{\nu}, \delta y_{\nu}, \delta z_{\nu}$. Но тогда и коэффициенты при этих независимых приращениях также должны быть равны нулю.

Иначе говоря, неопределенные множители λ_{α} и μ_{β} могут быть подобраны так, чтобы все скалярные коэффициенты в равенстве (6') и, следовательно, все векторные коэффициенты в равенстве (6) обращались в нуль. Но тогда

$$\mathbf{R}_{\nu} = \sum_{\alpha=1}^d \lambda_{\alpha} \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial \mathbf{r}_{\nu}} + \sum_{\beta=1}^g \mu_{\beta} \mathbf{l}_{\beta \nu} \quad (\nu = 1, \dots, N). \quad (7)$$

Мы получили общее выражение для реакций идеальных связей через неопределенные множители Лагранжа $\lambda_{\alpha}, \mu_{\beta}$ ($\alpha = 1, \dots, d; \beta = 1, \dots, g$).

Подставляя выражения (7) для $\mathbf{R}_{\nu}$ в уравнение (1), мы получим так называемые *уравнения Лагранжа первого рода*¹⁾:

$$m_{\nu} \mathbf{w}_{\nu} = \mathbf{F}_{\nu} + \sum_{\alpha=1}^d \lambda_{\alpha} \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial \mathbf{r}_{\nu}} + \sum_{\beta=1}^g \mu_{\beta} \mathbf{l}_{\beta \nu} \quad (\nu = 1, \dots, N). \quad (8)$$

К этим уравнениям следует еще прибавить уравнения связей:

$$f_{\alpha}(\mathbf{r}_{\nu}) = 0, \quad \sum_{\nu=1}^N \mathbf{l}_{\beta \nu} \dot{\mathbf{r}}_{\nu} + D_{\beta} = 0 \quad (\alpha = 1, \dots, d; \beta = 1, \dots, g). \quad (9)$$

¹⁾ Эти уравнения были получены французским математиком и механиком Ж.Лагранжем в его знаменитом трактате «Аналитическая механика», опубликованном в 1788 г. (русский перевод т. I вышел в 1938 г, т. II — в 1950 г). В этом трактате впервые были изложены основы аналитической механики.

Заменяя каждое векторное уравнение тремя скалярными, мы можем считать, что уравнения (8) и (9) составляют систему из $3N + d + g$ скалярных уравнений с $3N + d + g$ неизвестными скалярными величинами $x_\nu, y_\nu, z_\nu, \lambda_\alpha, \mu_\beta$. Интегрируя эту систему, мы получаем конечные уравнения движения и одновременно из равенств (7) — величины реакций связей. Однако интегрирование такой системы обычно весьма затруднено из-за большого числа уравнений. Поэтому уравнения Лагранжа первого рода практически мало применяются.

В § 6 и § 10 мы получим уравнения Лагранжа второго рода для голономной системы и уравнения Аппеля для неголономной системы; в этих уравнениях число неизвестных скалярных величин (и, следовательно, число уравнений) равно $3N - d$, т. е. на $2d + g$ единиц меньше, чем в системе уравнений (8) и (9).

Пример. Две весомые материальные точки M_1 и M_2 с одинаковой массой $m = 1$ соединены стержнем неизменной длины l с пренебрежимо малой массой. Система может двигаться только в вертикальной плоскости и только так, что скорость середины стержня направлена вдоль стержня. Определить движение точек M_1 и M_2 .

Пусть x_1, y_1 и x_2, y_2 — координаты точек M_1 и M_2 . Запишем уравнения связей:

$$\frac{1}{2} [(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 - l^2] = 0, \quad (10)$$

$$(x_2 - x_1)(\dot{y}_2 + \dot{y}_1) - (\dot{x}_2 + \dot{x}_1)(y_2 - y_1) = 0.$$

Уравнения Лагранжа с неопределенными множителями λ и μ имеют вид

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 &= -\lambda(x_2 - x_1) - \mu(y_2 - y_1), \\ \ddot{y}_1 &= -g - \lambda(y_2 - y_1) + \mu(x_2 - x_1) \end{aligned} \quad (11)$$

и

$$\begin{aligned} \ddot{x}_2 &= \lambda(x_2 - x_1) - \mu(y_2 - y_1), \\ \ddot{y}_2 &= -g + \lambda(y_2 - y_1) + \mu(x_2 - x_1). \end{aligned} \quad (12)$$

Из уравнений (11) с учетом первого уравнения (10) определим λ и μ :

$$\begin{aligned} \lambda &= -\frac{g}{l^2} (y_2 - y_1) - \frac{1}{l^2} [(x_2 - x_1)\ddot{x}_1 + (y_2 - y_1)\ddot{y}_1], \\ \mu &= \frac{g}{l^2} (x_2 - x_1) - \frac{1}{l^2} [(y_2 - y_1)\ddot{x}_1 - (x_2 - x_1)\ddot{y}_1]. \end{aligned} \quad (13)$$