В. И. Арнольд

Лекции об уравнениях с частными производными

МЦНМО

УДК 517.95
ББК 22.161.6
А84

Арнольд В. И.
Лекции об уравнениях с частными производными.
Электронное издание.
М.: МЦНМО, 2018.
181 с.
ISBN 978-5-4439-3174-6

Данный курс был разработан и прочитан выдающимся математиком В. И. Арнольдом в Независимом московском университете. Помимо традиционных вопросов курса уравнений с частными производными (метод Даламбера, метод Фурье, краевые задачи и т. д.) автор уделяет большое внимание взаимодействию с другими областями математики: геометрией и топологией многообразий, симплектической и контактной геометрией, комплексным анализом, вариационным исчислением.

Книга предназначена для студентов и аспирантов математических факультетов университетов и вузов с расширенной программой по математике.

12+

Подготовлено на основе книги:
Арнольд В. И. Лекции об уравнениях с частными производными. — М.: МЦНМО, 2017. — 182 с. ISBN 978-5-4439-1174-8.

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования
119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11
тел. (499) 241–08–04
http://www.mccme.ru

ISBN 978-5-4439-3174-6

© Арнольд Э. А. (наслед.), 2017
© МЦНМО, 2017

Оглавление

Предисловие 5

Лекция 1. Общая теория для одного уравнения первого порядка 8

Лекция 2. Общая теория для одного уравнения первого порядка (продолжение) 20

Лекция 3. Принцип Гюйгенса в теории распространения волн 32

Лекция 4. Струна (метод Даламбера) 40

1. Общее решение 40
2. Краевые задачи и задача Коши 41
3. Задача Коши для неограниченной струны. Формула Даламбера 43
4. Полуограниченная струна 44
5. Ограниченная струна (резонанс) 45
6. Метод Фурье 46

Лекция 5. Метод Фурье (для струны) 49

1. Решение задачи в пространстве тригонометрических многочленов 49
2. Отступление 50
3. Формулы для решения задачи пункта 1 50
4. Общий случай 51
5. Ряды Фурье 51
6. Сходимость рядов Фурье 52
7. Явление Гиббса 53

Лекция 6. Теория колебаний. Вариационный принцип 55

Лекция 7. Теория колебаний. Вариационный принцип (продолжение) 66

Лекция 8. Свойства гармонических функций 82

1. Следствия из теоремы о среднем 85
2. Теорема о среднем в многомерном случае 91

Лекция 9. Фундаментальное решение оператора Лапласа. Потенциалы 94
1. Примеры и свойства 95
2. Отступление. Принцип суперпозиции 97
3. Добавление. Оценка потенциала простого слоя 109
Лекция 10. Потенциал двойного слоя 113
Лекция 11. Сферические функции. Теорема Максвелла. Теорема об устранимой особенности 125
Лекция 12. Краевые задачи для уравнения Лапласа. Теория линейных уравнений и систем 142
1. Внутренняя задача Дирихле 143
2. Внешняя задача Дирихле 143
3. Внутренняя задача Неймана 144
4. Внешняя задача Неймана 146
5. Линейные уравнения с частными производными и их символы 148
Приложение 1. Топологическое содержание теоремы Максвелла о мультипольном представлении сферических функций 157
1. Основные пространства и группы 158
2. Некоторые теоремы вещественной алгебраической геометрии 160
3. От алгебраической геометрии к сферическим функциям . . . 162
4. Явные формулы 164
5. Теорема Максвелла и $\mathbb{C}\mathrm{P}^2/\mathrm{conj} \approx S^4$ 168
6. История теоремы Максвелла 170
Приложение 2. Задачи 172
1. Материалы семинаров 172
2. Задачи письменного экзамена 179
Литература 181

Лекция 1

Общая теория для одного уравнения первого порядка

В отличие от обыкновенных дифференциальных уравнений, нет единой теории уравнений с частными производными. Некоторые уравнения имеют свои теории, для других теории нет вообще. Это связано с более сложной геометрией. В случае обыкновенного уравнения на многообразии задано векторное поле, которое локально интегрируемо (имеет интегральные кривые). В случае уравнения с частными производными в каждой точке многообразия задано подпространство касательного пространства размерности больше 1. Как известно, уже поле двумерных плоскостей в трёхмерном пространстве в общем случае не интегрируемо.

Пример. В пространстве с координатами x, y, z рассмотрим поле плоскостей, заданное уравнением $dz = y\,dx$ (в каждой точке это одно линейное уравнение на координаты касательного вектора, задающее плоскость).

Задача 1. Нарисуйте это поле плоскостей и докажите, что у него нет интегральной поверхности, т. е. такой поверхности, у которой в каждой точке касательная плоскость совпадает с плоскостью поля.

Таким образом, интегрируемые поля плоскостей — исключительное явление.

Подмногообразие, касательная плоскость которого в каждой точке принадлежит подпространству поля, называется *интегральным подмногообразием* поля касательных подпространств на многообразии. Если удаётся провести интегральное подмногообразие, его размерность обычно не совпадает с размерностью плоскостей поля.

В этой лекции мы рассмотрим случай, в котором есть полная теория, а именно случай одного уравнения первого порядка. С физической точки зрения этот случай представляет собой двойственность

описания явлений при помощи волн и при помощи частиц. Поле удовлетворяет некоторому уравнению в частных производных первого порядка, эволюция частиц описывается системой ОДУ, имеется приём сведения УРЧП к системе ОДУ; тем самым можно свести изучение распространения волн к изучению эволюции частиц.

Запишем всё в локальной системе координат: $x = (x_1, \dots, x_n)$ — координаты (независимые переменные), $y = u(x)$ — неизвестная функция координат, сама буква y обозначает координату на оси значений, частные производные обозначим p,

$$p_i = \frac{\partial u}{\partial x_i} = u_{x_i}.$$

Общее уравнение с частными производными первого порядка имеет вид

$$F(x_1, \dots, x_n, y, p_1, \dots, p_n) = 0.$$

Примеры.

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = 0; \tag{1.1}$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)^2 = 1 \tag{1.2}$$

(уравнение эйконала в геометрической оптике);

$$u_t + u u_x = 0 \tag{1.3}$$

(уравнение Эйлера).

Рассмотрим выпуклую замкнутую кривую на плоскости с координатами x_1, x_2. Вне области, ограниченной кривой, рассмотрим функцию u расстояния до этой кривой. Тогда u — гладкая функция.

Теорема 1. *Функция u удовлетворяет уравнению* (1.2).

Доказательство. В уравнении (1.2) написано, что квадрат градиента функции u равен 1. Напомним геометрический смысл градиента: это вектор, в направлении которого скорость изменения функции наибольшая, а его длина равна абсолютной величине этой скорости. Теперь утверждение теоремы очевидно. □

Задача 2. а) Докажите, что любое решение уравнения (1.2) локально является суммой расстояния до некоторой кривой и константы.

б) Поймите, где тут двойственность описания при помощи волн и частиц (в случае затруднений ср. ниже с. 23, рис. 2.2).

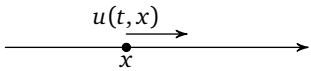

Рис. 1.1. Частица на прямой

Рассмотрим поле $u(t,x)$ скоростей свободно двигающихся по прямой частиц (см. рис. 1.1). Закон свободного движения частицы имеет вид

$$x = \varphi(t) = x_0 + vt,$$

где v — скорость частицы. Функция φ удовлетворяет уравнению Ньютона $d^2\varphi/dt^2 = 0$. Дадим теперь описание движения через поле u скоростей: по определению $d\varphi/dt = u(t,(\varphi(t))$. Дифференцируем по t и получаем уравнение Эйлера:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = u_t + u_x u = 0.$$

Обратно, из уравнения Эйлера можно вывести уравнение Ньютона, т. е. эти описания движения при помощи уравнения Эйлера для поля и при помощи уравнения Ньютона для частиц эквивалентны. Мы и в общем случае построим процедуру, позволяющую свести уравнения для волн к уравнениям эволюции частиц. Но сначала рассмотрим более простые примеры линейных уравнений.

1. Пусть $v = v(x)$ — векторное поле на многообразии или в области евклидова пространства. Рассмотрим уравнение $L_v(u) = 0$, где оператор L_v обозначает производную по направлению векторного поля (производную Ли).

В координатах это уравнение имеет вид

$$v_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + \ldots + v_n \frac{\partial u}{\partial x_n} = 0;$$

оно называется *линейным однородным уравнением в частных производных первого порядка*.

Чтобы функция u была его решением, необходимо и достаточно, чтобы она была постоянна вдоль фазовых кривых поля v. Таким образом, *решения нашего уравнения — первые интегралы поля*.

Например, рассмотрим поле

$$v = \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial}{\partial x_i},$$

см. рис. 1.2. Решим уравнение $L_v(u) = 0$ для этого поля v. Фазовые кривые — лучи $x = e^t x_0$, выходящие из начала координат. Решение

должно быть постоянно на каждом таком луче. Если наложить условие непрерывности в начале координат, то получим, что решения — константы и только они. Константы образуют одномерное линейное пространство (решения линейного уравнения должны образовывать линейное пространство).

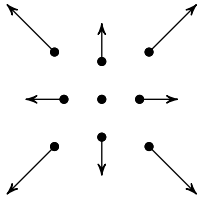

Рис. 1.2. Эйлерово поле

В отличие от этого примера, в общем случае решения линейного УРЧП образуют бесконечномерное линейное пространство. Например, для уравнения $\partial u/\partial x_1 = 0$ пространство решений совпадает с пространством функций от $n-1$ переменной: $u = \varphi(x_2, \ldots, x_n)$.

Оказывается, то же самое верно для уравнения общего положения в окрестности регулярной точки.

Задача Коши. Пусть Γ^{n-1} — гладкая гиперповерхность в x-пространстве. *Задачей Коши* называется следующая задача: *найти решение уравнения $L_v(u) = 0$, совпадающее на гиперповерхности с заданной функцией* (см. рис. 1.3).

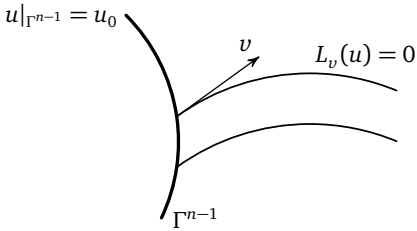

Рис. 1.3. Задача Коши

Точка гиперповерхности называется *нехарактеристической*, если поле v в ней трансверсально поверхности.

Теорема 2. *Задача Коши однозначно разрешима в окрестности каждой нехарактеристической точки.*

Доказательство. При помощи гладкой замены переменных выпрямим векторное поле, а Γ превратим в гиперплоскость $x_1 = 0$. Тогда в малой окрестности нехарактеристической точки получим задачу

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = 0, \quad u|_{0, x_2, \ldots, x_n} = u_0(x_2, \ldots, x_n),$$

которая решается однозначно. □

2. Рассмотрим задачу Коши для более общего — *линейного неоднородного* уравнения:

$$L_v(u) = f, \quad u|_{\Gamma^{n-1}} = u_0.$$

Решения такой задачи образуют *аффинное* пространство (общее решение неоднородного уравнения есть сумма общего решения однородного и частного решения неоднородного).

Гладкой заменой переменной задача приводится к виду

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = f(x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad u|_{0, x_2, \ldots, x_n} = u_0(x_2, \ldots, x_n).$$

Эта задача решается однозначно:

$$u(x_1, \ldots) = u_0(\ldots) + \int\limits_0^{x_1} f(\xi, \ldots)\, d\xi.$$

3. *Квазилинейным* называется уравнение, линейное по производным. В координатах квазилинейное уравнение первого порядка имеет вид

$$a_1(x, u)\frac{\partial u}{\partial x_1} + \ldots + a_n(x, u)\frac{\partial u}{\partial x_n} = f(x, u). \tag{1}$$

Заметим, что в первых двух случаях поле v связано с дифференциальным оператором инвариантно (независимо от координат). Как инвариантно связать геометрический объект с квазилинейным уравнением?

Рассмотрим пространство с координатами $(x_1, \ldots, x_n, y)$ — пространство 0-*струй функций* от $(x_1, \ldots, x_n)$, обозначаемое $J^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ или, короче, J^0.

Напомню, что *пространством k-струй* функций от $(x_1, \ldots, x_n)$ называется пространство многочленов Тейлора степени k.

Заметим, что аргумент $(x_1, \ldots, x_n, y, p_1, \ldots, p_n)$ в уравнении 1-го порядка является 1-струёй функции. Поэтому уравнение 1-го порядка можно понимать как гиперповерхность в пространстве 1-струй функций $J^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. Пространство 1-струй вещественнозначных функций от n переменных можно отождествить с $(2n+1)$-мерным пространством: $J^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \approx \mathbb{R}^{2n+1}$. Например, для функций на плоскости получаем пятимерное пространство 1-струй.

Решение уравнения (1) строится при помощи его характеристик (кривых специального вида в J^0). Слово «характеристический» в математике всегда означает «инвариантно связанный». Например, характеристический многочлен матрицы оператора инвариантно связан

с оператором и не зависит от базиса, при помощи которого составлена матрица. Характеристические подгруппы группы — это подгруппы, инвариантные относительно автоморфизмов группы. Характеристические классы в топологии инвариантны относительно соответствующих отображений.

Векторное поле v (в пространстве независимых переменных) называется *характеристическим полем* линейного уравнения $L_v(u) = f$.

Определение. *Характеристическим полем квазилинейного уравнения* (1) называется векторное поле A в пространстве J^0 с компонентами $(a_1, \ldots, a_n, f)$.

Утверждение. *Направление этого поля является характеристическим.*

Действительно, пусть u — решение. График его — некоторая гиперповерхность в J^0. Эта гиперповерхность касается поля A, что выражено в уравнении. Верно и обратное: если график функции всюду касается поля A, то она является решением.

Отсюда становится ясным способ решения квазилинейного уравнения. Проведём в J^0 фазовые кривые характеристического поля. Они называются характеристиками. Если характеристика имеет общую точку с графиком решения, то она вся лежит на нём, так что график составлен из характеристик.

Задача Коши для квазилинейного уравнения ставится аналогично предыдущим случаям. А именно, пусть в x-пространстве задана гладкая гиперповерхность Γ^{n-1}, а на ней — начальная функция u_0. График этой функции есть поверхность $\widehat{\Gamma}$ в J^0, которую мы рассматриваем в качестве начального подмногообразия (см. рис. 1.4).

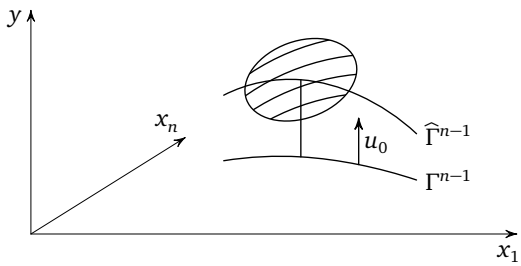

Рис. 1.4. Характеристики квазилинейного уравнения, проходящие через начальное многообразие $\widehat{\Gamma}^{n-1}$

Если характеристики не касаются начальной гиперповерхности $\widehat{\Gamma}$, то локально из них составляется график решения.

Нехарактеристичность точки в данном случае складывается из двух условий: поле A не должно касаться $\widehat{\Gamma}^{n-1}$, и, чтобы получился действительно график, вектор поля должен быть не вертикален, т. е. компонента a отлична от 0.

Точки, в которых $a = 0$, особые; в них дифференциальное уравнение исчезает, превращаясь в алгебраическое.

Пример. Для уравнения Эйлера $u_t + uu_x = 0$ уравнение характеристик эквивалентно уравнению Ньютона: $\dot{t} = 1$, $\dot{x} = u$, $\dot{u} = 0$.

Теперь перейдём к общему уравнению первого порядка.

Рассмотрим пространство 1-струй $J^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. Вместо $\mathbb{R}^n$ можно рассмотреть n-мерное многообразие B^n, тогда получим пространство $J^1(B^n, \mathbb{R})$; пусть (x, y, p) — локальные координаты в нём.

Уравнением с частными производными первого порядка будем называть гладкую гиперповерхность в J^1: $\Gamma^{2n} \subset J^1$.

Например, при $n = 1$ получим неявное (не разрешённое относительно производной) ОДУ.

Оказывается, в нашем пространстве J^1 имеется замечательная геометрическая структура — инвариантно заданное распределение $2n$-мерных гиперплоскостей. Например, при $n = 1$ получаем поле плоскостей в трёхмерном пространстве. Структура появляется только в результате того, что пространство есть пространство 1-струй. Аналогичная структура возникает и в пространствах струй более высокого порядка, там она называется распределением Картана.

Каждая функция в пространстве k-струй имеет *k-график*. В случае 0-струй это обычный график — множество 0-струй функции:

$$\Gamma_u = \{j_x^0 u \colon x \in \mathbb{R}^n\} = \{(x, y) \colon y = u(x)\}.$$

В случае 1-струй точка *1-графика* состоит из аргумента, значения функции и значений частных производных первого порядка:

$$\{j_x^1 u \colon x \in \mathbb{R}^n\} = \left\{(x, y, p) \colon y = u(x),\ p = \frac{\partial u}{\partial x}\right\},$$

см. рис. 1.5 для $n = 1$. Заметим, что 1-график является сечением расслоения над областью определения.

Замечание. Поверхность 1-графика диффеоморфна области определения функции, x — n-мерная координата на этой поверхности; глад-

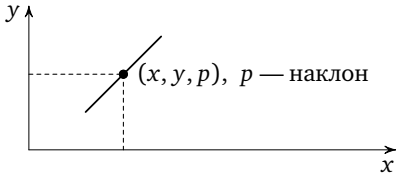

Рис. 1.5. Точка пространства 1-струй

кость поверхности меньше гладкости функции на 1, но в случае бесконечно гладкой или аналитической функции гладкость сохраняется.

Рассмотрим касательную плоскость к 1-графику. Это n-мерная плоскость в $(2n+1)$-мерном пространстве.

Теорема 3. *Все касательные плоскости всех* 1*-графиков в данной точке лежат в одной и той же гиперплоскости.*

Доказательство. Вдоль любой касательной плоскости имеем

$$dy = \sum \frac{\partial u}{\partial x_i}\, dx_i = \sum p_i\, dx_i, \quad \text{или} \quad dy = p\, dx.$$

Поскольку в данной точке пространства 1-струй p фиксировано, получаем уравнение на компоненты касательного вектора, задающее гиперплоскость. Поэтому касательная плоскость к любому 1-графику лежит в этой гиперплоскости. □

Например, при $n = 1$ уравнение $dy = p\, dx$ задаёт вертикальную плоскость в пространстве с координатами x, y, p. Касательными к 1-графикам являются все прямые, кроме вертикальной, лежащие в этой плоскости (см. рис. 1.6).

В этом случае видно, что сама гиперплоскость есть замыкание объединения касательных ко всем 1-графикам, проходящим через данную точку.

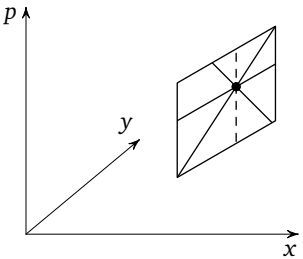

Рис. 1.6. Контактная плоскость в пространстве 1-струй

Задача 3. Докажите, что это верно для любой размерности.

Следствие. *Построенное поле гиперплоскостей $dy = p\, dx$ задано инвариантно, т. е. в других координатах оно также будет задано уравнением $d\tilde{y} = \tilde{p}\, d\tilde{x}$.*

Определение. Указанное поле гиперплоскостей в J^1 называется *распределением Картана* или *стандартной контактной структурой*.

Задача 4. Какой размерности бывают интегральные многообразия у поля контактных плоскостей? (Многообразие называется интегральным, если в каждой точке его касательная плоскость есть подпространство контактной плоскости.)

Так как 1-график всегда является интегральным многообразием, n-мерное интегральное многообразие существует. А существуют ли многообразия большей размерности?

Ответ. Интегральных подмногообразий, размерности которых больше половины размерности контактной плоскости, поле контактных плоскостей не имеет.

Определение. Интегральное подмногообразие поля контактных плоскостей, размерность которого максимальна (т. е. равна половине размерности контактной плоскости), называется *лежандровым*.

Например, 1-графики лежандровы.

Теперь вернёмся к дифференциальному уравнению.

Уравнение — это $2n$-мерное подмногообразие Γ^{2n} в J^1.

В каждой регулярной точке этой поверхности удаётся выделить характеристическое направление, определяемое поверхностью и контактной структурой. Мы построим характеристики (интегральные кривые этого поля направлений), а затем из них составим интегральные многообразия.

Рассмотрим в точке поверхности Γ^{2n} пересечение касательной и контактной плоскостей. Эти плоскости либо совпадают, либо имеют $(2n-1)$-мерное пересечение. В первом случае точка *особая*, во втором — *регулярная*.

Заметим, что для поверхности Γ общего положения особые точки изолированы. Действительно, на Γ имеется $2n$ координат. Рассмотрим нормаль к касательной и нормаль к контактной плоскости. Точка особая, если эти нормали имеют одинаковое направление. Это значит, что $2n$ функций от $2n$ переменных одновременно обращаются в 0. В общем положении это случается лишь в изолированных точках.

Итак, в регулярных точках имеются $(2n-1)$-мерные пересечения касательной и контактной плоскостей. При $n=1$ это прямые. При $n>1$ — нет. Как выделить одномерное направление?

В локальных координатах контактное поле задаётся нулями 1-формы $\alpha = dy - p\,dx$, причём эту форму можно умножать на функцию, не обращающуюся в 0, — поле (контактная структура) при этом не меняется.

2-форма $\omega^2 = d\alpha$ — внешний дифференциал формы α — уже не определяется инвариантно контактной структурой, однако верно следующее.

Предложение 1. *Форма $\omega|_{\alpha=0}$ определена инвариантно с точностью до умножения на ненулевое число в каждой точке.*

Доказательство. Пусть $\tilde{\alpha} = f\alpha$. Тогда $\tilde{\alpha} = df \wedge \alpha + f\, d\alpha$,

$$d\tilde{\alpha}|_{\alpha=0} = f\, d\alpha|_{\alpha=0},$$

т. е. $\tilde{\omega}^2$ отличается от ω^2 умножением на число в каждой точке (говорят, что *конформный тип* формы ω^2 определён инвариантно). Заметим, что где $\alpha = 0$, там и $\tilde{\alpha} = 0$. □

Предложение 2. *Форма $\omega|_{\alpha=0}$ является симплектической структурой.*

Напомню, что *симплектической структурой* называется невырожденная кососимметрическая билинейная форма в чётномерном пространстве.

Невырожденность формы ω означает, что $\forall\, \xi \neq 0\ \exists\, \eta\colon \omega(\xi, \eta) \neq 0$.

Доказательство предложения 2. В локальных координатах наша форма имеет вид

$$d\alpha = -\sum dp_i \wedge dx_i,$$

где p_i, x_i — координаты в плоскости $\alpha = 0$. □

Упражнение. Выпишите матрицу формы $\sum dp_i \wedge dx_i$ и убедитесь, что форма невырожденна.

Эта форма называется *кососкалярным произведением*. Выясним его геометрический смысл.

Пусть $n = 1$. Тогда $\omega = dx \wedge dp$. Значение этой формы на паре векторов есть ориентированная площадь параллелограмма, натянутого на эти векторы (см. рис. 1.7). В случае большей размерности $\omega(\xi, \eta)$ есть сумма ориентированных площадей проекций параллелограмма со сторонами ξ, η на плоскости с координатами (x_i, p_i).

Вспомним, что в евклидовом пространстве имеется понятие ортогонального дополнения. В n-мерном пространстве ортогональное дополнение к k-мерному подпространству является $(n-k)$-мерным подпространством. Для доказательства этого факта нужна только

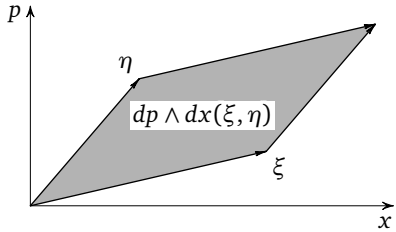

Рис. 1.7. Симплектическая структура

билинейность и невырожденность скалярного произведения, а симметричность не нужна, значит, то же самое верно и в случае кососкалярного произведения.

Итак, косоортогональным дополнением к $(2n-1)$-мерной плоскости в $2n$-мерном симплектическом пространстве является прямая. Но, в отличие от евклидова случая, она лежит в этой плоскости!

Лемма. *Косоортогональное дополнение к гиперплоскости в симплектическом пространстве есть прямая, лежащая в этой гиперплоскости.*

Доказательство. Пусть прямая натянута на вектор ξ. Косоортогональное дополнение к ней есть гиперплоскость $\{\eta\colon \omega(\xi,\eta)=0\}$. Вектор ξ лежит в этой гиперплоскости, так как

$$\omega(\xi,\xi) = -\omega(\xi,\xi) = 0. \qquad \square$$

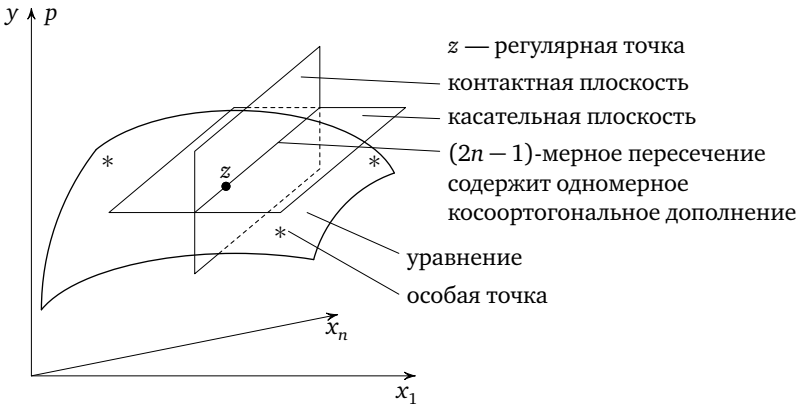

Рис. 1.8. Характеристическое направление для общего уравнения первого порядка

Определение. *Характеристическим направлением* в контактной плоскости называется косоортогональное дополнение к пересечению контактной и касательной к Г плоскостей в регулярной точке.

Это косоортогональное дополнение — прямая. Итак, имеются инвариантная контактная структура и инвариантное отношение косоортогональности в каждой контактной плоскости. Тем самым в каждой регулярной точке инвариантно выделяется характеристическое направление (см. рис. 1.8).

Характеристиками называются интегральные кривые этого поля направлений.

Задача 5. Вычислите характеристическое поле направлений в координатах x, y, p, т. е. задайте его системой дифференциальных уравнений $\dot{x} =?$, $\dot{y} =?$, $\dot{p} =?$

Литература к лекции 1: [1, гл. 2], [4, § 11].

Лекция 2

Общая теория для одного уравнения первого порядка (продолжение)

Мы рассматриваем общее дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка $F(x, y, p) = 0$, где $x = (x_1, \dots, x_n)$, $p = (p_1, \dots, p_n)$, $p_i = \partial u / \partial x_i$, $y = u(x)$ — неизвестная функция. Уравнение задаёт $2n$-мерную гиперповерхность V^{2n} в пространстве J^1 1-струй функций от $(x_1, \dots, x_n)$. Каждая функция имеет 1-график в J^1; она является решением уравнения, если её 1-график Γ^n есть подмногообразие в V^{2n}.

В каждой точке из J^1 имеется контактная плоскость K^{2n}, заданная в локальных координатах уравнением $dy = p\,dx$; геометрически она представляет собой замыкание объединения касательных плоскостей ко всем 1-графикам, проходящим через данную точку.

В точках поверхности V^{2n} касательная плоскость к V^{2n} пересекается с контактной плоскостью. Если пересечение $(2n-1)$-мерно, то точка регулярная, иначе — особая. В общем положении особые точки изолированы. В регулярных точках z получаем распределение $(2n-1)$-мерных плоскостей $(T_z V^{2n}) \cap K_z^{2n}$, которые являются подпространствами контактных плоскостей K_z^{2n}.

Каждая контактная плоскость является симплектическим пространством, структура на котором задаётся дифференциальной 2-формой $\omega^2 = d\alpha|_{K^{2n}}$, где $\alpha = dy - p\,dx$.

В координатах имеем

$$\omega^2 = dx \wedge dp := \sum_{i=1}^{n} dx_i \wedge dp_i;$$

(x, p) служат координатами в контактной плоскости.

Лемма. *Форма ω^2 невырожденна.*

Доказательство. Матрица этой формы в координатах $x_1, p_1, x_2, p_2, \ldots$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & 0 \\ -1 & 0 & & & \\ & & 0 & 1 & \\ & & -1 & 0 & \\ 0 & & & & \ddots \end{pmatrix}. \qquad \square$$

Итак, форма ω^2 задаёт в K^{2n} кососкалярное произведение, к каждому подпространству в K^{2n} определено косоортогональное дополнение, которое имеет дополнительную размерность. В частности, косоортогональное дополнение к $(2n-1)$-мерному пересечению $(T_z V^{2n}) \cap K_z^{2n}$ одномерно. Это направление называется *характеристическим для уравнения*.

Задача 1. Докажите, что характеристическая прямая лежит в

$$(T_z V^{2n}) \cap K_z^{2n}.$$

Вычислим явно в терминах уравнения компоненты характеристического вектора. Пусть (x, y, p) — координаты в $T_z J^1$. Характеристический вектор должен быть касательным к V^{2n}: дифференцируя уравнение, получаем первое условие:

$$F_x \dot{x} + F_y \dot{y} + F_p \dot{p} = 0. \tag{2.1}$$

Далее, вектор должен лежать в контактной плоскости, отсюда второе условие:

$$\dot{y} = p\dot{x}. \tag{2.2}$$

Исключив $\dot{y}$ из этих двух уравнений, получим уравнение $(2n-1)$-мерного пересечения K^{2n-1} касательной и контактной плоскостей:

$$(F_x + F_y p)\dot{x} + F_p \dot{p} = 0. \tag{2.3}$$

Это уравнение записано в координатах (x, p), которые мы можем считать координатами в контактной плоскости, поскольку она взаимно однозначно проектируется на гиперплоскость (x, p) в J^1 (см. рис. 2.1).

Нам осталось найти косоортогональное дополнение к K^{2n-1}. Задачу в принципе можно решить алгоритмически, записав соответствующую систему линейных уравнений, но мы воспользуемся одним полезным наблюдением.

Для примера рассмотрим случай $n = 1$, тогда значение кососкалярного произведения $dx \wedge dp$ на паре касательных векторов $(\dot{x}, \dot{p})$,