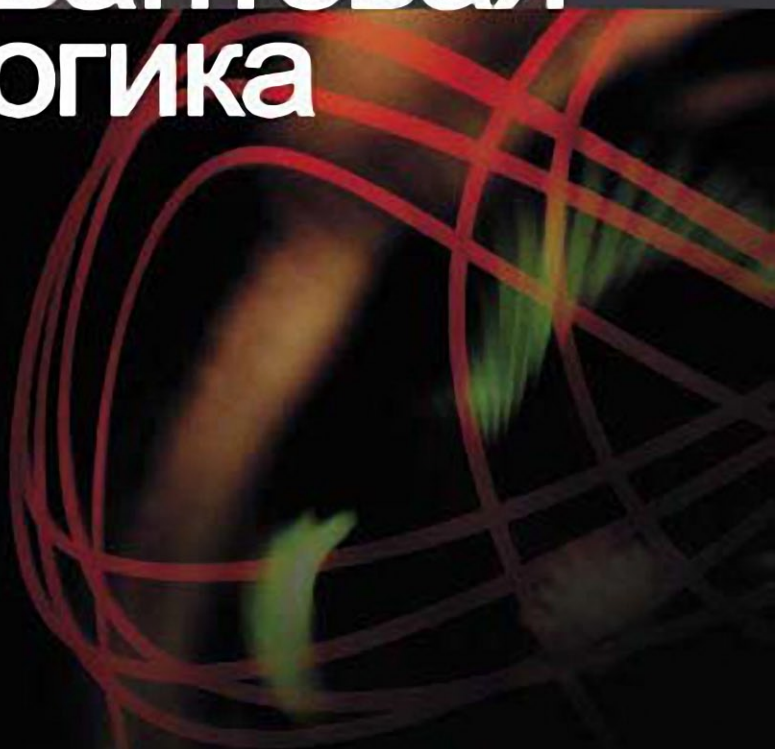


В.Л. Васюков

Квантовая логика



УДК 510
ББК 22.12

**Издание осуществлено при финансовой поддержке
Российского Гуманитарного Научного Фонда (РГНФ)
Проект № 04-06-16107д**

Васюков В.Л.

**В 19 Квантовая логика. — М.: ПЕР СЭ, 2005. — 192 с.
ISBN 5-9292-0142-0**

Книга посвящена квантовой логике — интердисциплинарной области науки, интересующей физиков, математиков, логиков и философов. Квантовая логика рассматривается автором монографии, прежде всего, с точки зрения логических исчислений и логической техники. Главное внимание уделяется синтаксической реконструкции систем квантовой логики и построению различного рода абстрактных семантик для полученных систем. Философские вопросы, возникающие в процессе построения систем квантовой логики, например, природы времени в квантовом мире, рассматриваются и решаются сквозь призму неклассических методов современной логики. Вместе с тем в книге кратко описывается история квантовой логики и дается обзор современных направлений исследований в этой области. Особый интерес представляют последние три главы книги, посвященные построенной автором так называемой квантовой логике наблюдаемых, призванной преодолеть разрыв между используемыми в большинстве квантовологических исследований формализмами и математическим аппаратом современной квантовой теории.

© В.Л. Васюков, 2005

© ООО «ПЕР СЭ», оригинал-макет,
оформление, 2005

ISBN 5-9292-0142-0

Содержание

Предисловие	5
Введение	7
Глава первая. Квантовая логика: история и современность	10
1.1. О предмете и задачах квантовой логики	10
1.2. Краткая история квантовой логики	15
1.3. Проблемы современного этапа развития квантовой логики	22
Глава вторая. Квантовая логика в топосах	37
2.1. Ортомодулярность в топосах	37
2.2. Общезначимость в Set^E : системы Гольдблатта, Нишимуры и Катленда—Гиббинса	43
2.3. Общезначимость в Set^E : стрелка Сасаки как импликация в квантовой логике (система Г. Хардегри)	50
2.4. Общезначимость в Set^E : система Г. Кальмбаха	53
Глава третья. Квантовая логика как расширение логических систем	57
3.1. Квантовая логика как модальное расширение бесконечнозначной логики Лукасевича	57
3.2. Релевантная логика и недистрибутивность	67
3.3. Квантовая логика как модальное расширение классической логики	71
3.4. Логика Хао Вана и квантовая импликация	73
Глава четвертая. Квантовая динамика и квантовая логика времени	75
4.1. Квантовая ортологика времени	75
4.2. Бесконечнозначная логика направленного времени	86
4.3. Квантовая логика времени как бимодальное расширение бесконечнозначной логики Лукасевича	96
Глава пятая. От семантики к синтаксису: квантовая логика наблюдаемых	100
5.1. Квантовая логика наблюдаемых как обратная задача семантики	100
5.2. QLO: синтаксис	109
5.3. QLO: семантика	115

Глава шестая. Расширения квантовой логики наблюдаемых	122
6.1. Нормированная квантовая логика наблюдаемых	122
6.2. Временная квантовая логика наблюдаемых	126
6.3. Временная нормированная квантовая логика наблюдаемых	130
6.4. Эффекты в квантовой логике наблюдаемых	131
6.5. Бимодальная квантовая логика эффектов	139
6.6. Стрела времени в квантовой логике наблюдаемых	149
Глава седьмая. Комплекснозначная квантовая логика наблюдаемых	158
7.1. Логические основания комплекснозначности	158
7.2. Комплекснозначное расширение пропозиционального исчисления и формализация отрицания в естественном языке	162
7.3. Комплекснозначное расширение бесконечнозначной логики Лукасевича	166
7.4. Комплекснозначное расширение логики Чэна с положительными и отрицательными значениями истинности	168
7.5. Модальность и комплекснозначная система <i>МСС</i>	172
7.6. Комплекснозначная квантовая логика наблюдаемых ...	174
Заключение	184
Литература	186

Глава вторая

Квантовая логика в топосах

2.1. Ортомодулярность в топосах

Теоретико-множественное моделирование интуиционистской логики, предложенное С. Крипке, позволило обнаружить топосы, в которых логические построения, обобщающие соответствующие конструкции в категориях множеств, оказываются переформулировкой семантических построений Крипке. К настоящему времени имеется уже довольно много теоретико-множественных моделей для квантовой логики (см., например, [Stout 1979]), в том числе и моделей крипкевского типа. Если учесть, вдобавок, что для квантовой логики имеются и иные интерпретации, то закономерным представляется вопрос: могут ли квантовые логики быть стандартным образом интерпретируемы в топосах и какова конструкция подобных топосов в случае положительного ответа?

Исходным пунктом для интерпретации квантовой логики в топосах, предлагаемой автором, послужил тот факт, что для произвольной малой категории $\mathcal{C}$ категория функторов $\mathbf{Set}^{\mathcal{C}}$ является топосом [Гольдблатт 1983, с.219]. Анализ конструкции интерпретации интуиционистской логики в $\mathbf{Set}^P$, где P — алгебра Гейтинга, наводит на мысль о том, что можно вместо алгебры Гейтинга использовать ортомодулярную решетку, которая определяет алгебраическую структуру подавляющего числа квантовых логик.

Если взять ортомодулярную решетку E , то, как и всякая решетка, она будет представлять собой конечно кополную категорию порядка. Таким образом, при построении категории

Set^c можно попытаться взять в качестве **C** ортомодулярную решетку, т.е. построить категорию **Set^E**.

Однако в этом случае неясно как категорно интерпретировать ортодополнение, которое выражает свойства отрицания в квантовой логике. В случае алгебры Гейтинга такой проблемы не возникает, ввиду того, что в алгебре Гейтинга отрицание не является примитивной связкой, но вводится по определению с использованием константы $\perp$ (ложь) и импликации.

Чтобы обойти эту трудность, снабдим нашу категорию предпорядка функтором, передающим свойства ортодополнения. Сама идея подобного подхода восходит к предложению А. Рискоса и Л. М. Лайты функторно моделировать классическое отрицание в категориях предпорядка (см. [Riscos Laita 1987]). Выбор категорий предпорядка выгоден здесь именно тем, что в силу единственности стрелок мы сразу можем говорить и о дедуктивных исчислениях и о категориях, поскольку мы не будем нуждаться в тождествах на стрелках: все стрелки единственны.

Определение. *Ортомодулярная категория **E*** представляет собой категорию предпорядка, снабженную контравариантным функтором $\perp: \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{E}$, такую, что:

- (i) **E** имеет инициальный объект 0 и терминальный объект 1;
- (ii) **E** имеет конечные копроизведения $[-, -]$ и конечные произведения $\langle -, - \rangle$;
- (iii) функтор $\perp^2$ естественно эквивалентен единице в **E**, т. е. $\perp^2 a \cong a$ для любого объекта a из **E**,
- (iv) $\langle a, \perp a \rangle \cong 0$, $[a, \perp a] \cong 1$ для всех объектов a из **E**,
- (v) $\perp[a, b] \cong \langle \perp a, \perp b \rangle$, $\perp\langle a, b \rangle \cong [\perp a, \perp b]$ для любых двух объектов a, b из **E**

Ортомодулярная категория **E** является ортомодулярной категорией, когда дополнительно выполняется следующее условие:

- (vi) если $a \rightarrow b$ есть стрелка в **E**, то $[a, \langle \perp a, b \rangle] \cong b$ для любых двух объектов a, b из **E**.

Нетрудно видеть, что все пункты данного определения представляют собой теоретико-категорную запись алгебраических свойств ортомодулярной решетки. По сути дела, они не влекут за собой каких-либо категорных «осложнений», по-

этому в дальнейшем, если это не будет специально оговорено, будем понимать, когда это следует из контекста, под ортомодулярной решеткой ортомодулярную категорию предпорядка, записывая функтор $\perp$ как алгебраическую операцию (т.е. не слева, а справа от символа).

Рассмотрим наследственные множества в ортомодулярной решетке E . Для любого элемента p наследственное множество $[p]$ определяется равенством:

$$[p] = \{q: p \leq q\}$$

Ортодополнение $\perp$ в E представляет собой инволютивную перестановку, причем $b^\perp \leq a^\perp$ всякий раз, когда $a \leq b$ ($a, b \in E$). Как известно [Биркгоф 1964, с.76], в ортомодулярной решетке каждый интервал $[a, b]$ является ортомодулярной решеткой, замкнутой относительно $\wedge, \vee$ и операции взятия относительного дополнения $c' = (a \vee c^\perp) \wedge b = a \vee (c^\perp \wedge b)$. В наследственных множествах верхняя граница интервала равна 1, поэтому $c' = (p \vee c^\perp) \wedge 1 = p \vee c^\perp$. Следовательно, множество E^+ наследственных множеств будет представлять собой множество ортомодулярных решеток.

Рассмотрим теперь решетку $E^+ = (E^+, \subseteq)$ наследственных множеств. Чтобы превратить ее в ортомодулярную решетку необходимо определить ортодополнение. В этом случае требуется, чтобы подобная процедура определяла инволютивную операцию на E^+ . Из определения ортодополнения следует, что если $c' = p \vee c^\perp$, то $c' \in [p]$. Естественно определять тогда $[p]'$ как множество таких c , что $c' \in [p]^\perp$. В этом случае $p \leq c^\perp$, а это не что иное, как определение отношения ортогональности, поскольку оно задается требованием $a \perp b \Rightarrow a \leq b^\perp$. Как известно, отношение ортогональности представляет собой симметричное и иррефлексивное отношение.

Определим теперь $x \perp Y$ тогда и только тогда, когда для любого $y \in Y$, $x \perp y$ и введем операцию $*$ с помощью определения:

$$(i) [p]^* = \{x: x \perp [p]\}$$

Множество X называется замкнутым относительно $*$, если $(X^*)^* = X$.

Однако из определения (i) следует, что $[p]^* = \emptyset$, поскольку $1 \in [p]$, а $x \perp 1$ если $x \leq 0$, т.е. $x = 0$. Чтобы избежать этого, модифицируем определение наследственного множества:

$$[p] = \{q: p \leq q \text{ \& } q \neq 1\}$$

Подобные множества называются обычно *квази-наследственными* множествами, однако чтобы не перегружать терминологию, сохраним за ними первоначальное имя наследственных множеств. Нетрудно переформулировать все предыдущие определения с учетом принятого ограничения.

2.1.1. Лемма. *Решетка $E^+ = (E^+, \subseteq, *)$ замкнутых относительно операции $*$ наследственных множеств является ортомодулярной решеткой.*

Доказательство. Частично упорядоченное множество наследственных множеств, упорядоченных по включению, является ограниченной дистрибутивной решеткой, пересечения и объединения которой задаются соответствующими теоретико-множественными операциями $\cap$ и $\cup$ [Гольдблатт 1983, с.203]. Следовательно $(E^+, \subseteq)$ будет решеткой относительно $\cap$ и $\cup$. Тогда в силу замкнутости по $*$, симметричности и иррефлексивности отношения ортогональности $\perp$ соответственно $[p] \rightarrow [p]^*$ будет инволюцией, а $(E^+, \subseteq, *)$ — орторешеткой [Биркгоф 1964, с.164]. Поскольку всякая дистрибутивная решетка модулярна, а всякая модулярная орторешетка является ортомодулярной, то $(E^+, \subseteq, *)$ будет ортомодулярной решеткой.

Заметим, что полученная подобным образом орторешетка будет на самом деле представлять собой булеву алгебру [Биркгоф 1964, с.76]. Но можно определить E^+ и как недистрибутивную ортомодулярную решетку. Для этого воспользуемся следующим определением:

$$X \sqcup Y = (X^* \cap Y^*)^*.$$

Как известно, в общем случае $(X^* \cap Y^*)^* > X \cup Y$ [Биркгоф 1964, с.167]. Нетрудно убедиться, что $(E^+, \subseteq, \sqcup, \cap, *)$ представляет собой орторешетку. Необходимое и достаточное условие для ортомодулярности E^+ имеет вид: если $[x] \subseteq [y]$ и $[x]^* \cap [y] = \emptyset$, то $[x] = [y]$ [Биркгоф 1964, с.77]. Доказательство выполнимости дуального этому условия в E^+ можно найти в [Beran 1984, с.171]. Фактически мы получили конструкцию, двойственную вложению Яновица (см. [Beran 1984, с.173]). ■

Здесь и в дальнейшем ■ означает конец доказательства. Заметим, что в доказательстве леммы 2.1.1 фактически фигурируют две решетки E^+_1 и E^+_2 , первая из которых дистрибутивна, а вторая — недистрибутивна. В последующем изложении под E^+ подразумевается вторая из них.

2.1.2. Лемма. Решетка $[p]^+$, образованная всеми наследственными в $[p]$ множествами, замкнутыми относительно $*$, является ортомодулярной решеткой.

Доказательство. Достаточно определить $[c]^*_p = [c]^* \cap [p]$. Тогда относительно этой операции интервал $[\emptyset, [p]]$ будет представлять собой ортомодулярную решетку [Биркгоф 1964, с. 76]. ■

При построении категории $\mathbf{Set}^E$ функтор $\Omega: \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{Set}$ определяет множество $\Omega(p) = \Omega_p$ как множество p —корешет, представляющих собой некоторое подмножество S множества $E_p = \{f: \text{для некоторого } q \text{ стрелка } f: p \rightarrow q \text{ принадлежит } \mathbf{E}\}$, замкнутое относительно левого умножения, т.е. если $f \in S$, а $g: q \rightarrow r$ — произвольная $\mathbf{E}$ —стрелка, то $g \circ f \in S$. Отождествляя $f: p \rightarrow q$ с ее концом q , получаем E_p как множество $\{q: p \leq q\} = [p]$ и $\Omega_p = [p]^+$.

Пусть F_p обозначает значения $F(p)$ функтора $F: \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{Set}$ на объекте p . Для любых p и q , таких, что $p \leq q$, функтор F определяет функцию из F_p в F_q , обозначаемую через F_{pq} . Тогда для p и q , таких, что $p \leq q$, функция $\Omega_p: \Omega_p \rightarrow \Omega_q$ сопоставляет каждому $S \in [p]^+$ множество $S_q = S \cap [q] \in [q]^+$, т.е. $\Omega_{pq}(S) = S_q$.

Конечным объектом категории $\mathbf{Set}^E$ служит постоянный функтор $\mathbf{1}: \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{Set}$, определяемый условием $\mathbf{1}_p = \{0\}$ для $p \in \mathbf{E}$ и $\mathbf{1}_{pq} = id_{\{0\}}$ при $p \leq q$. Классификатором подобъектов $true: \mathbf{1} \rightarrow \Omega$ является естественное преобразование, p -я компонента которого $true_p: \{0\} \rightarrow \Omega_p$ определяется равенством $true_p(0) = [p]$, т.е. функция $true$ выбирает наибольший элемент из каждой ортомодулярной решетки вида $[p]^+$.

Если $\tau: F \rightarrow G$ — произвольный подобъект $\mathbf{Set}^E$ —объекта G , тогда каждая компонента τ_p инъективна и можно считать ее функцией включения $F_p \hookrightarrow G_p$. p -я компонента $(\chi_\tau)_p: G_p \rightarrow [p]^+$ характеристической стрелки $\chi_\tau: G \rightarrow \Omega$ определяется равенством

$$(\chi_\tau)_p(x) = \{q: p \leq q \text{ \& } \mathbf{G}_{pq}(x) \in \mathbf{F}_q\}$$

для каждого $x \in \mathbf{G}_p$. Выполнимость Ω —аксиомы получаем так же, как и в случае алгебры Гейтинга [Гольдблатт 1983, с.231–232], так как при этом используются лишь решеточные свойства наследственных множеств.

Начальный объект $\mathbf{0}: \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{Set}^{\mathbf{F}}$ в категории $\mathbf{Set}^{\mathbf{F}}$ будет представлять собой функтор, такой, что $\mathbf{0}_p = \emptyset$ и $\mathbf{0}_{pq} = id_\emptyset$ для $p \leq q$. Компонентами естественного преобразования $\mathbf{0} \rightarrow \mathbf{1}$ являются включения $\emptyset \rightarrow \{0\}$. Стрелка *false* по определению является характеристической стрелкой подобъекта $\mathbf{1}: \mathbf{0} \rightarrow \mathbf{1}$. Для ее компоненты $false_p: \{0\} \rightarrow \Omega_p$ имеем

$$false_p(0) = \{q: p \leq q \text{ \& } \mathbf{1}_{pq}(0) \in \mathbf{0}_q\} = \{q: p \leq q \text{ \& } 0 \in \emptyset\} = \emptyset.$$

Следовательно, естественное преобразование *false* выбирает нулевой элемент из каждой ортомодулярной решетки $[p]^+$. Стрелка *false* мономорфна.

Отрицание можно определить теперь как стрелку $\neg: \Omega \rightarrow \Omega$, являющуюся характеристической стрелкой подобъекта *false*. Если отождествить $false_p$ с включением $\{0\} \subseteq \Omega_p$, то p —я компонента $\neg_p: \Omega_p \rightarrow \Omega_p$ отрицания удовлетворяет равенствам

$$\neg_p(S) = \{q: p \leq q \text{ \& } \Omega_{pq}(S) \in \{\emptyset\}\} = \{q: p \leq q \text{ \& } S \cap [q] = \emptyset\} = [p] \cap S^* = S_p^*.$$

Таким образом ортодополнение в $[p]^+$ совпадает с p —й компонентой истинностной стрелки отрицания в $\mathbf{Set}^{\mathbf{F}}$.

Конъюнкция и дизъюнкция определяются как и в случае алгебры Гейтинга [Гольдблатт 1983, с.235]. Для p —й компоненты $\langle true, true \rangle_p: \{0\} \rightarrow \Omega_p \times \Omega_p$ $\mathbf{Set}^{\mathbf{F}}$ —стрелки $\langle true, true \rangle: \mathbf{1} \rightarrow \Omega \times \Omega$ справедливо равенство $\langle true, true \rangle_p(0) = \langle [p], [p] \rangle$. Конъюнкция $\cap: \Omega \times \Omega \rightarrow \Omega$ является характеристической стрелкой для $\langle true, true \rangle$. Ее p —я компонента $\cap_p: \Omega_p \times \Omega_p \rightarrow \Omega_p$ удовлетворяет равенству

$$\cap_p(\langle S, T \rangle) = \{q: p \leq q \text{ \& } \langle \Omega_{pq}(S), \Omega_{pq}(T) \rangle \in \langle [q], [q] \rangle\} = \langle [q], [q] \rangle = S \cap T.$$

В рассматриваемых в дальнейшем системах квантовой логики дизъюнкция не относится к числу примитивных связей, поэтому ее определение можно опустить.

2.2. Общезначимость в Set^E : системы Гольдблатта, Нишимуры и Катленда–Гиббинса

Р. Гольдблатт в своей работе «Семантический анализ ортологии» [Goldblatt 1974] рассматривает логику не как множество правильно построенных формул, но как собрание их упорядоченных пар, удовлетворяющих определенному условию замыкания. Логики такого типа он называет бинарными. Они характеризуются классом орто-, ортомодулярных решеток в том смысле, что $A \vdash B$, если и только если $v(A) \leq v(B)$, где v есть функция из множества правильно построенных формул в орторешетку, для которой связки $\neg$ и $\wedge$ интерпретируются как ортодополнение и решеточное пересечение соответственно. Построенная им система ортологии O , характеризуемой классом орторешеток, определяется следующей аксиоматикой:

Аксиомы.

- (1) $\alpha \vdash \alpha$
- (2) $\alpha \wedge \beta \vdash \alpha$
- (3) $\alpha \wedge \beta \vdash \beta$
- (4) $\alpha \vdash \neg \neg \alpha$
- (5) $\neg \neg \alpha \vdash \alpha$
- (6) $\alpha \wedge \neg \alpha \vdash \beta$

Правила вывода.

- (7)
$$\frac{\alpha \vdash \beta \quad \beta \vdash \gamma}{\alpha \vdash \gamma}$$
- (8)
$$\frac{\alpha \vdash \beta \quad \alpha \vdash \gamma}{\alpha \vdash \beta \wedge \gamma}$$
- (9)
$$\frac{\alpha \vdash \beta}{\neg \beta \vdash \neg \alpha}$$

В приведенной формулировке $\alpha \vdash \beta$ означает, что β выводима из α . Это обозначение можно расширить до $\Gamma \vdash \alpha$, где Γ является множеством правильно построенных формул, полагая, что $\Gamma \vdash \alpha$ тогда и только тогда, когда для некоторых $\beta_1, \dots, \beta_n \in \Gamma$ имеем $\beta_1 \wedge \dots \wedge \beta_n \vdash \alpha$.

Если использовать определение $\alpha \vee \beta =_{def} \neg(\neg \alpha \wedge \neg \beta)$, то от

ортологик $\mathbf{O}$ можно перейти к квантовой логике $\mathbf{OM}$, характеризуемой классом ортомодулярных решеток, присоединяя к $\mathbf{O}$ дополнительную аксиому

$$(10) \alpha \wedge (\neg \alpha \vee (\alpha \wedge \beta)) \vdash \beta$$

Х Нишимура [Nishimura 1980], расценивая бинарное отношение выводимости Гольдблатта как аналог натурального вывода Генцена, развил аналогичные генценовским секвенциальные системы $\mathbf{GO}$ для ортологик и $\mathbf{GOM}$ для квантовой логики со связками $\wedge$ и $\neg$. Его формулировка системы $\mathbf{GOM}$ имеет следующий вид:

Аксиомы. $\alpha \vdash \alpha$

Правила вывода.

$$\frac{\Gamma \rightarrow \Delta}{\Pi, \Gamma \rightarrow \Delta, E} \text{ (ослабление)}$$

$$\frac{\Gamma_1 \rightarrow \Delta_1, \alpha \quad \alpha, \Gamma_2 \rightarrow \Delta_2}{\Gamma_1 \Gamma_2 \rightarrow \Delta_1, \Delta_2} \text{ (сечение)}$$

$$\frac{\alpha, \Gamma \rightarrow \Delta}{\alpha \wedge \beta, \Gamma \rightarrow \Delta} (\wedge \rightarrow) \quad \frac{\beta, \Gamma \rightarrow \Delta}{\alpha \wedge \beta, \Gamma \rightarrow \Delta} (\wedge \rightarrow)$$

$$\frac{\Gamma \rightarrow \Delta, \alpha \quad \Gamma \rightarrow \Delta, \beta}{\Gamma \rightarrow \Delta, \alpha \wedge \beta} (\rightarrow \wedge)$$

$$\frac{\Gamma \rightarrow \Delta, \alpha}{\neg \alpha, \Gamma \rightarrow \Delta} (\neg \rightarrow)$$

$$\frac{\Gamma \rightarrow \Delta}{\neg \Delta \rightarrow \neg \Gamma} (\rightarrow \neg)$$

$$\frac{\alpha, \Gamma \rightarrow \Delta}{\neg \neg \alpha, \Gamma \rightarrow \Delta} (\neg \neg \rightarrow)$$

$$\frac{\Gamma \rightarrow \Delta, \alpha}{\Gamma \rightarrow \Delta, \neg \neg \alpha} (\rightarrow \neg \neg)$$

Секвенциальная система $\mathbf{GOM}$ получается из $\mathbf{GO}$ в результате добавления следующего правила

$$\frac{\neg \beta \rightarrow \neg \alpha \quad \neg \alpha, \beta \rightarrow}{\neg \alpha \rightarrow \neg \beta} \text{ (OM)}$$

В $\mathbf{GO}$ и $\mathbf{GOM}$ не устранимо сечение, однако справедливо утверждение: если выводима секвенция $\Gamma \rightarrow \Delta$, то выводима

некоторая секвенция $\Gamma \rightarrow \alpha$, где $\alpha \in \Delta$. Это утверждение приводит, в частности, к теореме о нормализуемости, доказуемой для обеих систем.

Однако секвенциальное исчисление Нишимуры имеет два недостатка:

- 1) в квантовой логике связки $\wedge$ и $\vee$ обычно двойственны, а в исчислении Нишимуры — нет (секвенциальное исчисление является двойственным тогда и только тогда, когда для всех конечных Γ и Δ мы имеем $\vdash \Gamma \rightarrow \Delta$ тогда и только тогда, когда справедливо $\vdash \Delta^* \rightarrow \Gamma^*$, где для формулы α мы получаем α^* путем замены вхождения $\wedge$ на $\vee$ и наоборот; для множества формул Γ получаем двойственное множество в виде $\Gamma^* = \{\gamma^*: \gamma \in \Gamma\}$ и следует учесть, что такая замена в случае квантовых логик предполагает выбор одной из связок $\wedge, \vee$ в качестве примитивной);
- 2) это исчисление нерегулярно в том смысле, что не выполняется условий $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n \rightarrow \Delta_1, \dots, \Delta_m$ тогда и только тогда, когда $\Gamma_1 \wedge \dots \wedge \Gamma_n \rightarrow \Delta_1 \vee \dots \vee \Delta_m$.

Н. Дж. Катленд и П. Ф. Гиббинс [Cutland Gibbins 1982] предложили в 1982 году регулярное секвенциальное исчисление для квантовой логики, свободное от указанных недостатков, в котором, в отличие от исчисления Нишимуры, не допустимо обычное правило вывода.

Аксиоматика системы $\mathbf{GO}^+$, представляющей собой расширение системы $\mathbf{GO}$ Нишимуры, выглядит следующим образом:

Аксиомы. $\alpha \vdash \alpha$

Правила вывода.

$$\frac{\Gamma \rightarrow \Delta}{\Theta, \Gamma \rightarrow \Delta, \Sigma} \text{ (ослабление)}$$

$$\frac{\Gamma \rightarrow \alpha, \Delta_1 \quad \alpha \rightarrow \Delta_2}{\Gamma \rightarrow \Delta_1, \Delta_2} \text{ (сечение 1)}$$

$$\frac{\Gamma_1 \rightarrow \alpha \quad \Gamma_2, \alpha \rightarrow \Delta}{\Gamma_1, \Gamma_2 \rightarrow \Delta} \text{ (сечение 2)}$$

$$\frac{\alpha, \Gamma \rightarrow \Delta}{\alpha \wedge \beta, \Gamma \rightarrow \Delta} (\wedge \rightarrow) \quad \frac{\beta, \Gamma \rightarrow \Delta}{\alpha \wedge \beta, \Gamma \rightarrow \Delta} (\wedge \rightarrow)$$

$$\begin{array}{c}
\frac{\Gamma \rightarrow \alpha \quad \Gamma \rightarrow \beta}{\Gamma \rightarrow \alpha \wedge \beta} (\rightarrow \wedge)^\dagger \\
\frac{\alpha \rightarrow \Delta \quad \beta \rightarrow \Delta}{\alpha \vee \beta \rightarrow \Delta} (\vee \rightarrow)^\dagger \\
\frac{\Gamma \rightarrow \Delta, \alpha}{\Gamma \rightarrow \Delta, \alpha \vee \beta} (\rightarrow \vee)^\dagger \quad \frac{\Gamma \rightarrow \Delta, \beta}{\Gamma \rightarrow \Delta, \alpha \vee \beta} (\rightarrow \vee)^\dagger \\
\frac{\Gamma \rightarrow \alpha}{\Gamma, \neg \alpha \rightarrow} (\neg \rightarrow)^\dagger \\
\frac{\Gamma \rightarrow \Delta}{\neg \Delta \rightarrow \neg \Gamma} (\rightarrow \neg) \\
\frac{\alpha, \Gamma \rightarrow \Delta}{\neg \neg \alpha, \Gamma \rightarrow \Delta} (\neg \neg \rightarrow) \\
\frac{\Gamma \rightarrow \Delta, \alpha}{\Gamma \rightarrow \Delta, \neg \neg \alpha} (\rightarrow \neg \neg)
\end{array}$$

Знаком $\dagger$ здесь отмечены специфические для $\mathbf{GO}^\dagger$ правила. Система $\mathbf{GO}^\dagger \mathbf{M}$ квантовой логики получается путем добавления правила ортомодулярности Нишимуры, т.е. представляет собой систему $\mathbf{GO}^\dagger \mathbf{M} = \mathbf{GO}^\dagger + (\text{ОМ})$

Семантика всех рассмотренных исчислений описывается с помощью понятий орто-, квантовых фреймов и моделей.

2.2.1. Определение. Ортофрейм представляет собой пару $\langle X, \perp \rangle$, где

- (1) X является непустым множеством;
- (2) $\perp$ есть отношение ортогональности на X , т.е. $\perp \subseteq X \times X$ симметрично и иррефлексивно.

2.2.1. Определение. Ортомодель есть тройка $\langle X, \perp, \nu \rangle$, где

- (1) $\langle X, \perp \rangle$ есть ортофрейм;
- (2) ν есть функция, ставящая в соответствие каждой позициональной переменной α *-замкнутое подмножество $\nu(\alpha) \subseteq X$.

2.2.3. Определение. Квантовый фрейм представляет собой тройку $\langle X, \perp, \psi \rangle$, где

(1) $\langle X, \perp \rangle$ есть ортофрейм;

(2) ψ есть непустое множество $*$ -замкнутых подмножеств X , таких, что

(а) ψ замкнуто относительно теоретико-множественного пересечения и операции $*$;

(б) для любых $Y, Z \in \psi$, $Y \subseteq Z$ и $Y^* \cap Z = \emptyset$ влечет $Y = Z$.

2.2.4. Определение. Квантовая модель представляет собой четверку $\langle X, \perp, \psi, \nu \rangle$, где

(1) $\langle X, \perp, \psi \rangle$ есть квантовый фрейм;

(2) ν есть функция, ставящая в соответствие каждой пропозициональной переменной α $*$ -замкнутое подмножество $\nu(\alpha)$ из ψ .

Нетрудно видеть, что в роли семейства ψ ортогонально замкнутых подмножеств X можно брать ортомодулярную решетку E^+ , тем более, что условие (б) из определения 2.2.3 выполнимо в E^+ (это следует из того факта, что в орторешетках условие $a \leq b$ & $a^\perp \wedge b = 0 \Rightarrow a = b$ является необходимым и достаточным условием ортомодулярности [Биркгоф 1964, с.77]).

Определим теперь квантовую модель $M = \langle E^+, \nu \rangle$ с квантовым фреймом E^+ (здесь E^+ заменяет запись $\langle E, \perp, E^+ \rangle$), где $\nu: F \rightarrow E^+$ — некоторая E -оценка, а F — множество пропозициональных формул. Используя ν , определяем теперь **Set^E**—оценку $\nu': F \rightarrow \mathbf{Set}^E(\mathbf{1}, \Omega)$. Функция ν' сопоставляет каждой пропозициональной букве π истинностное значение $\nu'(\pi): \mathbf{1} \rightarrow \Omega$ в **Set^E**. Компонента $\nu'(\pi)_p: \{0\} \rightarrow \Omega_p$ этого истинностного значения определяется равенством:

$$(*) \quad \nu'(\pi)_p(0) = \nu(\pi) \cap [p] = \nu(\pi)_p.$$

Фактически $\nu'(\pi)_p$ собирает все точки из $[p]$, в которых π истинна в M .

Если $p \leq q$, то $\nu(\pi) \cap [p] \cap [q] = \nu(\pi) \cap [q]$. Это дает нам коммутативность диаграммы

$$\begin{array}{ccc} \{0\} & \xrightarrow{\nu'(\pi)_p} & [p]^+ \\ \downarrow & & \downarrow \\ \{0\} & \xrightarrow{\nu'(\pi)_q} & [q]^+ \end{array}$$

откуда явствует, что $v'(\pi)$ будет естественным преобразованием.

Пусть теперь $v(\alpha)_p = v(\alpha) \cap [p]$.

2.2.5. Лемма. Для произвольной формулы $\alpha \in Fp$ — компонента $v'(\alpha) : \{0\} \rightarrow [p]^+$ естественного преобразования $v'(\alpha)$ удовлетворяет равенству $v'(\alpha)_p(0) = v(\alpha)_p$.

Доказательство. Ведется индукцией по длине формулы α . Пусть $\alpha = \neg\beta$ и для β лемма справедлива.

Тогда $v'(\neg\beta)_p = (\neg \circ v'(\beta))_p = \neg_p \circ v'(\beta)_p$.

Следовательно $v'(\alpha)_p(0) = \neg_p(v'(\beta)_p(0))$

$= \neg_p(v(\beta)_p)$ (по индуктивному предположению)

$= (v(\beta))_p^*$ (по определению стрелки отрицания)

$= v(\neg\beta)_p$ (по определению оценки в квантовом фрейме)

$= v(\alpha)_p$.

Что касается $\wedge$, то здесь доказательство ничем не отличается от случая алгебры Гейтинга [Гольдблатт, 1983, с.238], а $\vee$ не относится к числу основных связок, ибо вводится по определению (см. доказательство леммы 2.2.1). Остается лишь случай секвенции, т.е. $\alpha = \Gamma \rightarrow \Delta$ для систем Нишимуры и Катленда-Гиббинса (для системы Гольдблатта доказуемо, что если $\vdash \Gamma \rightarrow \alpha$ в **GOM**, **GO[†]M**, то $\Gamma \vdash \alpha$ в **OM**). В этих системах для секвенции требуется, чтобы

$$v(\Gamma \rightarrow \Delta) = \bigcap_{\alpha \in \Gamma} v(\alpha)$$

Тогда $v'(\Gamma \rightarrow \Delta)$ будет определяться как

$$v'(\wedge \Gamma) = v'(\bigwedge_{\alpha \in \Gamma} \alpha)$$

Поскольку множество наследственных множеств замкнуто относительно пересечения, получаем существование подобной оценки и на E^+ . ■

2.2.6. Следствие. Если **Set^E** $\models \alpha$, то $E^+ \models \alpha$.

Доказательство. Так как **Set^E** $\models \alpha$, то $v'(\alpha) = \text{true}$. Следовательно, для любого p имеет место $v'(\alpha)_p = \text{true}_p(0) = [p]$. Так как $p \in [p]$, то лемма 2.2.5 дает $p \in v(\alpha)_p \subseteq v(\alpha)$. Ввиду произвольности p получаем $v(\alpha) = E$. Поскольку E выбрана произвольно, то α тождественно истинна на E . ■

Определим теперь E -оценку $v: F \rightarrow E^+$, отталкиваясь от $\mathbf{Set}^E$ —оценки $v': F \rightarrow \mathbf{Set}^E(1, \Omega)$. Стрелка $v'(\pi): 1 \rightarrow \Omega$ выбирает для каждого $q \in E$ наследственное подмножество $v'(\pi)_q(0)$ множества $[q]$. Определим $v(\pi)$ как объединение всех этих подмножеств:

$$v(\pi) = \cup \{v'(\pi)_q(0) : q \in E\}.$$

иначе

(**) $r \in v(\pi)$ тогда и только тогда, когда (для некоторого q) $r \in v'(\pi)_q(0)$.

2.2.7. Лемма. Для произвольного $p \in E$ имеем $v(\pi) \cap [p] = v'(\pi)_p(0)$, где $v(\pi)$ определяется условием (**).

Доказательство. То же, что и в [Гольдблатт, 1983, с.239]. ■

Пусть v — произвольная E -оценка и v' — оценка, определяемая равенством (*), т.е. $v'(\pi)_p(0) = v(\pi)_p$. Тогда в силу полноты решетки E^+ имеет место равенство

$$\bigcup \{v'(\pi)_p(0) : p \in E\} = \bigcup \{v(\pi)_p : p \in E\} = v(\pi).$$

Следовательно, применение (**) к v' приводит опять к v . Этот факт вместе с леммой 2.2.7 показывает, что определения (*) и (**) взаимно обратны и устанавливают биекцию между E^+ -оценками и $\mathbf{Set}^E$ —оценками. Можно считать, что оценка v в лемме 2.2.5 получается из оценки v' , фигурирующей в этой же лемме, по определению (**).

2.2.8. Следствие. Если $E^+ \models \alpha$, то $\mathbf{Set}^E \models \alpha$.

Доказательство. Так как $E^+ \models \alpha$, то $v(\alpha) = E$, и, следовательно, для произвольного p , $v(\alpha)_p = v(\alpha) \cap [p] = [p] = \text{true}_p(0)$. По лемме 2.2.5 $v'(\alpha)_p(0) = \text{true}_p(0)$, следовательно, $v'(\alpha) = \text{true}$ в силу произвольного выбора p . ■

2.2.9. Теорема. Для произвольной ортомодулярной решетки E и пропозициональной формулы α имеет место $\mathbf{Set}^E \models \alpha$ тогда и только тогда, когда $E^+ \models \alpha$.

Доказательство. Следует из 2.2.6 и 2.2.8. ■

2.2.10. Теорема. Если произвольная пропозициональная формула (секвенция) $\mathbf{Set}^E$ —общезначима, то она выводима в ис-

числениях квантовой ортологик Гольдблатта, Нишимуры и Катленда-Гиббинса.

Доказательство. Отождествляя соответствующий канонический фрейм, упорядоченный по включению с E^+ , получаем $\vdash \alpha$ тогда и только тогда, когда $E^+ \models \alpha$. Отсюда по теореме 2.2.9 получаем, что $\vdash \alpha$ тогда и только тогда, когда $\mathbf{Set}^E \models \alpha$. ■

2.3. Общезначимость в $\mathbf{Set}^E$: стрелка Сасаки как импликация в квантовой логике (система Г. Хардегри)

В ортомодулярной решетке введение импликации как полинома решетки неудовлетворительно по многим причинам. Во всяком случае, классическое определение импликации $a \rightarrow b = a^\perp \vee b$ здесь тоже не годится, что заставляет либо вообще отказаться от полиномиального определения (как в системах предыдущего параграфа), либо использовать модификацию классического определения. Одной из наиболее популярных модификаций является введение так называемой «стрелки Сасаки» (иначе «квазиимпликации»), вводимой следующим определением:

$$(SH) \ a \rightarrow b = a^\perp \vee (a \wedge b)$$

Стрелка Сасаки обладает следующими интересными свойствами [Hardegree 1981, p.4]:

$$(c1) \text{ если } a \leq b, \text{ то } a \rightarrow b = 1$$

$$(c2) \ a \wedge (a \rightarrow b) \leq b$$

$$(c3) \ b^\perp \wedge (a \rightarrow b) \leq a^\perp$$

$$(c4) \ a \wedge b^\perp \leq (a \rightarrow b)^\perp$$

(c5) существует бинарная операция $+$, такая, что для любых a, b, c , $a + b \leq c$ тогда и только тогда, когда $a \leq b \rightarrow c$.

Операция $+$ может быть определена в ортомодулярной решетке следующим равенством:

$$(S) \ a + b = (a \vee b^\perp) \wedge b$$

В булевой алгебре и алгебре Гейтинга подобная операция обычно совпадает с $\wedge$ и в этом случае (c5) позволяет определить экспоненцирование в них, когда они рассматриваются как ко-

нечно кополные категории порядка. В этом случае категорно алгебра Гейтинга и булева алгебра превращаются в декартово замкнутые конечно кополные категории порядка.

Однако нетрудно видеть, что и в ортомодулярной решетке можно определить экспоненцирование для стрелки Сасаки.

2.3.1. Лемма. *Категорно ортомодулярная решетка является декартово замкнутой конечно кополной категорией порядка.*

Доказательство. В качестве экспоненциала берем стрелку Сасаки из определения (SH). Стрелка значения $ev: b^a \times a \rightarrow b$ определяется по (с2). Из (с5) получаем, что для любой стрелки $g: c+a \rightarrow b$ существует стрелка $\hat{g}: c \rightarrow b^a$ (здесь $+$ — операция из (S)). Но $c \leq a \rightarrow b$ влечет $c \wedge a \leq a \wedge (a \rightarrow b)$ (изотонность отношения $\leq$), следовательно, существование $\hat{g}$ влечет существование стрелки $c \times a \rightarrow b^a \times a$. По свойству $\vee$ имеем $c \leq c \vee a^\perp$, тогда в силу изотонности отношения $\leq$ имеем $c \wedge a \leq (c \vee a^\perp) \wedge a$ но категорно это определяет стрелку $c \times a \rightarrow c+a$.

Фактически получена диаграмма

$$\begin{array}{ccc} b^a \times a & \xrightarrow{ev} & b \\ \uparrow & & \uparrow \\ c \times a & \xrightarrow{\quad} & c+a \end{array}$$

В силу транзитивности отношения $\leq$ из $c \times a \leq c+a$, $c+a \leq b$ получаем $c \times a \leq b$, т.е. замыкаем диаграмму до требуемой диаграммы экспоненцирования. Следовательно, ортомодулярная решетка категорно декартово замкнута. ■

Г. Хардегри [Hardegree 1981] предложил систему ортомодулярной квантовой логики **ОМС**, примитивными связками которой являются кондиционал (которому на ортомодулярной решетке соответствует стрелка Сасаки) $\rightarrow$ и константа «ложь» f . Эта логика представляет собой наименьшее подмножество формул, удовлетворяющих следующим аксиомам:

$$(A1) \vdash x \rightarrow [(x \rightarrow y) \rightarrow x]$$

$$(A2) \vdash [(x \rightarrow y) \rightarrow x] \rightarrow x$$

$$(A3) \vdash [(x \rightarrow y) \rightarrow (x \rightarrow z)] \rightarrow [(y \rightarrow x) \rightarrow (y \rightarrow z)]$$