В. И. Смирнов

# Курс высшей математики

том II

bhv

**В. И. Смирнов**

# Курс высшей математики

## том II

Допущено Научно-методическим советом по математике
Министерства образования и науки Российской Федерации
в качестве учебника для студентов механико-математических
и физико-математических факультетов университетов
и технических высших учебных заведений

Санкт-Петербург
«БХВ-Петербург»
2008

УДК 510(075.8)
ББК 22.1я73
С50

**Смирнов В. И.**

С50 Курс высшей математики. Том II / Пред. Л. Д. Фаддеева, пред. и прим. Е. А. Грининой: 24-е изд. — СПб.: БХВ-Петербург, 2008. — 848 с.: ил. — (Учебная литература для вузов)

ISBN 978-5-94157-910-5

Фундаментальный учебник по высшей математике, переведенный на множество языков мира, отличается, с одной стороны, систематичностью и строгостью изложения, а с другой — простым языком, подробными пояснениями и многочисленными примерами.

Во втором томе рассматриваются обыкновенные дифференциальные уравнения, линейные дифференциальные уравнения и дополнительные сведения по теории дифференциальных уравнений; кратные и криволинейные интегралы, несобственные интегралы и интегралы, зависящие от параметра; векторный анализ и теория поля; основы дифференциальной геометрии; ряды Фурье; уравнения с частными производными математической физики.

В настоящем, 24-м, издании отмечена устаревшая терминология, сделаны некоторые замечания, связанные с методикой изложения материала, отличающейся от современной, исправлены опечатки.

*Для студентов университетов и технических вузов*

УДК 510(075.8)
ББК 22.1я73

Предисловие академика РАН Л. Д. Фаддеева

Рецензент: Л. Д. Кудрявцев, член-корреспондент РАН, академик Европейской академии наук, президент Центра современного образования, профессор

Редактор: Е. А. Гринина, канд. физ.-мат. наук

Оригинал-макет подготовлен издательством Санкт-Петербургского государственного университета

ISBN 978-5-94157-910-5

## ОГЛАВЛЕНИЕ

## ГЛАВА V

## ОСНОВЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ



## ГЛАВА VI

## РЯДЫ ФУРЬЕ

## ГЛАВА VII

## УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

## ПРЕДИСЛОВИЕ
### к I тому 24-го издания

В чем притягательная сила этого энциклопедического учебника, который выдерживает испытание временем уже более семидесяти лет, переведен на множество языков мира, ссылки на который имеются в научных публикациях самого последнего времени?

Прежде всего это основополагающая идея, выдвинутая выдающимися учеными, академиками В. А. Фоком и В. И. Смирновым, работавшими на физическом факультете Ленинградского университета. Она состояла в том, что для студентов физиков и, даже шире, для естествоиспытателей и инженеров, требуется совсем иное содержание и стиль изложения математики, чем для студентов математиков. Формализованный стиль, основанный на чередовании определений, лемм и теорем, и доведение условий до предельно общих за счет громоздкости доказательства представляется ненужным мышлению физика, использующего эмпирический подход чаще, чем дедуктивный.

Второй составляющей успеха представляемой книги был непревзойденный педагогический дар Владимира Ивановича. До преклонных лет он был одним из любимейших лекторов на физическом факультете. Книги, написанные им, читаются просто и увлекательно, даже те страницы, где проводятся громоздкие вычисления. И все это с сохранением достаточной строгости изложения.

Третьим важным моментом является энциклопедический охват материала. Курс включает как общие разделы математики, читаемые для физиков, химиков, инженеров и т. д., так и более специализированные разделы, например, теорию групп или теорию специальных функций.

При написании раздела по теории групп значительную помощь ему оказал мой отец член-корреспондент Д. К. Фаддеев. В последнем томе курса впервые в советской математике было дано изложение функционального анализа. Часть разделов, связанных с функциональным анализом, была доработана после смерти В. И. Смирнова академиком О. А. Ладыженской.

Несколько слов надо сказать о личности Владимира Ивановича. Он был очень скромным, открытым человеком, никогда не требовавшим от университетского начальства ни отдельного кабинета, ни личной секретарши. Однако он был тверд и решителен, когда выступал в защиту гонимых по тем или иным причинам математиков, когда отстаивал научные принципы университетского образования. Ту же О. А. Ладыженскую он неоднократно спасал от административного произвола, сохранив для математики выдающегося ученого. Авторитет Владимира Ивановича как в Ленинградском математическом сообществе, так и в мировой науке был чрезвычайно высок.

До сих пор курс В. И. Смирнова используется как основное учебное пособие на физическом факультете Санкт-Петербургского государственного университета. На младших курсах одним из лекторов по высшей математике была Е. А. Гринина, которая и подготовила данное переиздание к печати.

академик РАН *Л. Д. Фаддеев*

Общая цель сделанных комментариев состоит в том, чтобы упростить современному студенту использование данной книги и как единого учебного пособия, и как справочного материала при работе с другими изданиями. Мною отмечена устаревшая терминология, даны замечания по поводу опущенных вычислений. Также сделаны некоторые замечания, связанные с методикой изложения материала, отличающейся от принятой в большинстве современных лекционных курсов. В ходе работы были исправлены опечатки, допущенные в предыдущем издании.

канд. физ.-мат. наук *Е. А. Гринина*

# ГЛАВА I.

# ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

## § 1. УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

**1. Общие понятия.** *Дифференциальным уравнением* называется уравнение, которое, кроме независимых переменных и неизвестных функций этих переменных, содержит еще и производные неизвестных функций или их дифференциалы [I, 51]. Если функции, входящие в дифференциальное уравнение, зависят от одной независимой переменной, то уравнение называется *обыкновенным дифференциальным* уравнением. Если же в уравнение входят частные производные неизвестных функций по нескольким независимым переменным, то уравнение называют *дифференциальным уравнением с частными производными.* В настоящей главе мы будем рассматривать лишь обыкновенные дифференциальные уравнения, и большая часть главы будет посвящена тому случаю, когда задано одно уравнение, содержащее одну неизвестную функцию.

Пусть $x$ — независимая переменная и $y$ — искомая функция этой переменной. Общий вид дифференциального уравнения будет

$$\Phi(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0.$$

Наивысший порядок $n$ производных неизвестной функции, входящих в уравнение, называется порядком дифференциального уравнения. В настоящем параграфе мы будем рассматривать одно обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка. Общий вид такого уравнения будет

$$\Phi(x, y, y') = 0 \tag{1}$$

или, в решенной относительно $y'$ форме,

$$y' = f(x, y). \tag{2}$$

Пользуясь другим обозначением производной, можем записать это уравнение в виде

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y). \tag{3}$$

Если некоторая функция

$$y = \varphi(x) \tag{4}$$

удовлетворяет дифференциальному уравнению (1) или (2), т. е. если это уравнение обращается в тождество относительно $x$ при замене $y$ и $y'$ на $\varphi(x)$ и $\varphi'(x)$, то функция (4) называется *решением* этого *дифференциального уравнения.* Сама задача нахождения решений дифференциального уравнения называется обычно задачей *интегрирования дифференциального уравнения.*

В простейшем случае, когда правая часть уравнения (2) не содержит $y$, получается дифференциальное уравнение вида

$$y' = f(x). \tag{5}$$

Нахождение его решений есть основная задача интегрального исчисления [I, 86], и все множество этих решений дается формулой

$$y = \int f(x)dx + C, \tag{6}$$

где $C$ — произвольная постоянная. Таким образом, в этом простейшем случае имеется семейство решений дифференциального уравнения, содержащее произвольную постоянную. Как мы увидим, и в общем случае дифференциального уравнения первого порядка мы будем иметь семейство решений, содержащее произвольную постоянную:

$$y = \varphi(x, C). \tag{7}$$

Такое семейство решений называется *общим интегралом** уравнения. Общий интеграл может выражаться в неявной форме или в форме, решенной относительно $C$:

$$\psi(x, y, C) = 0 \quad \text{или} \quad \omega(x, y) = C. \tag{$7_1$}$$

Придавая произвольной постоянной $C$ различные численные значения, будем получать различные решения уравнения — так называемые *частные решения* уравнения.

Укажем геометрическую интерпретацию дифференциального уравнения и его решений. Если рассматривать $x$ и $y$ как координаты точек плоскости, то дифференциальное уравнение (2) определяет в каждой точке $(x, y)$, где определена функция $f(x, y)$, угловой коэффициент касательной $y'$ к некоторой линии. Искомое решение (4) уравнения (2) есть такая кривая (в частном случае — прямая), которая в каждой своей точке имеет угловой коэффициент касательной $y'$, определяемой равенством (2). Такая кривая называется *интегральной кривой* дифференциального уравнения. Иначе говоря, понятие решения уравнения (2) совпадает с понятием интегральной кривой (в частном случае — прямой) этого уравнения на плоскости $XOY$. Общий интеграл (7) дает бесчисленное множество интегральных кривых или, точнее говоря, семейство кривых, зависящее от одной произвольной постоянной.

Положим, что функция $f(x, y)$ однозначна и непрерывна в некоторой области $B$ плоскости $XOY$. Пусть линия $l$, соответствующая решению (7), принадлежит к этой области, и функция $\varphi(x)$ определена на некотором промежутке $I$ изменения $x$. Говоря о решении (4), мы, согласно сказанному выше, считаем, что $\varphi(x)$ непрерывна и имеет производную для $x$, принадлежащих $I$. Если к промежутку $I$ принадлежит его левый конец, то производная $\varphi'(x)$ есть производная справа, а на правом конце — производная слева. Из уравнения (3) и непрерывности $f(x, y)$ непосредственно следует, что и производная $\varphi'(x)$ решения непрерывна на $I$.

* Такое семейство решений также называют общим решением.

Во всем предыдущем мы считаем, естественно, что все функции однозначны. Из однозначности $\varphi(x)$ следует, что прямые, параллельные оси $OY$, могут пересекать интегральную кривую не более чем в одной точке. Если мы перепишем уравнение (2), или (3), в виде

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(x,y)}, \tag{$3_1$}$$

т. е. будем считать не $y$ функцией от $x$, а $x$ функцией от $y$, то прямые, параллельные оси $OX$, могут пересекать интегральные кривые не более чем в одной точке. Пусть интегральная кривая $l$ уравнения (2) такова, что не только прямые, параллельные оси $OY$, но и прямые, параллельные оси $OX$, пересекают ее не более чем в одной точке, т. е. в уравнении $y = \varphi(x)$ функция $\varphi(x)$ имеет однозначную обратную функцию $x = \psi(y)$. При этом $l$ является и интегральной кривой дифференциального уравнения ($3_1$). В дальнейшем мы будем иметь дело главным образом с уравнением вида (2).

**2. Определение решения по начальному условию. Теорема существования и единственности.** Простейшее уравнение (5) имеет бесчисленное множество решений, поскольку в формулу (6) входит произвольная постоянная. Но нетрудно показать, что мы получим вполне определенное решение уравнения (5), если поставим так называемое *начальное условие*, а именно потребуем, чтобы искомая функция $y$ принимала заданное значение $y_0$ при заданном значении $x = x_0$. Это начальное условие запишем в виде

$$y|_{x=x_0} = y_0. \tag{8}$$

Действительно, пусть $f(x)$ — непрерывная на некотором промежутке $I$ функция и точка $x = x_0$ принадлежит $I$. Заменяя в формуле (6) неопределенный интеграл определенным с переменным верхним пределом $x$ и нижним пределом $x_0$, вместо (6) получим

$$y = \int_{x_0}^{x} f(t)dt + C.$$

Первое слагаемое обращается в нуль при $x = x_0$, и чтобы удовлетворить условию (8), надо положить $C = y_0$. Таким образом, уравнение

(5) при начальном условии (8) имеет единственное решение

$$y = \int_{x_0}^{x} f(t)dt + y_0.$$

Отметим, что это решение имеет место на всем промежутке $I$.

Аналогично, если мы имеем общий интеграл (7) какого-либо уравнения (2), то для удовлетворения начальному условию (8) надо определить произвольную постоянную $C$ из равенства

$$y_0 = \varphi(x_0, C). \tag{9}$$

Обратимся теперь к геометрической интерпретации. Положим, что функция $f(x, y)$ определена в некоторой области $B$ плоскости $XOY$ и в этой области однозначна и непрерывна. В каждой точке $(x, y)$, принадлежащей $B$, из уравнения (2) определяется, как мы уже упоминали, угловой коэффициент $y'$ касательной к искомой интегральной кривой. Через точку $(x, y)$ проведем небольшой отрезок прямой, образующий с осью $OX$ такой угол $\alpha$, что $\mathrm{tg}\alpha = y'$, и придадим этому отрезку какое-либо направление (переход к противоположному направлению не изменит $\mathrm{tg}\alpha$). Мы видим, что уравнение (2) равносильно определению в области $B$ *поля направлений*, т. е. в каждой точке области $B$ уравнение (2) определяет некоторое направление. Интегральные кривые уравнения (2) суть кривые $l$, лежащие в области $B$ и обладающие следующим свойством: в каждой точке $(x, y)$ касательная к $l$ имеет направление, определяемое указанным выше полем направлений. Начальное условие (8) сводится к требованию, чтобы интегральная кривая проходила через заданную точку $(x_0, y_0)$, находящуюся в $B$. Приведем теперь геометрические соображения, из которых наглядно, но не строго логически, следует, что через заданную точку $M_0(x_0, y_0)$ проходит одна и только одна интегральная кривая.

Разобьем плоскость $XOY$ прямыми (рис. 1), параллельным осям, на малые квадраты так, чтобы точка $M_0$ лежала в вершине одного их этих квадратов (это — несущественно). Из точки $M_0$ проводим в направлении возрастания $x$ отрезок прямой $M_0M_1$, с угловым коэффициентом $y_0' = f(x_0, y_0)$ до ближайшего пересечения с

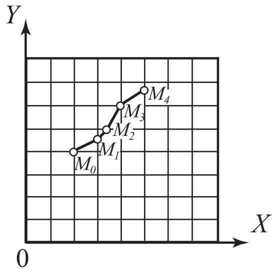


Рис. 1.

одной из прямых сетки квадратов. Пусть $(x_1, y_1)$ — координаты точки $M_1$. Из $M_1$ проводим в направлении возрастания $x$ отрезок прямой $M_1M_2$ с угловым коэффициентом $y_1' = f(x_1, y_1)$ до ближайшего пересечения с одной из прямых сетки квадратов и т. д. Это построение можно выполнить и в направлении убывания $x$. Построенная таким образом ломаная линия и представляет приближенно для $x$, близких к $x_0$, искомую интегральную кривую уравнения (2), проходящую через точку $M_0$. Это построение делает весьма вероятным тот факт, что через всякую точку $M_0$ из $B$ проходит одна и только одна интегральная кривая. Это утверждение справедливо и будет дальше доказано, если $f(x, y)$ обладает кроме непрерывности еще некоторым свойством.

Положим для определенности, что $B$ — открытая область, т. е. область, к которой мы не причисляем ее границы ($B$ может быть и всей плоскостью). Имеет место следующая теорема.

Теорема А. *Если $f(x, y)$ непрерывна и имеет непрерывную частную производную по $y$ в $B$, то через каждую точку, принадлежащую $B$, проходит одна и только одна интегральная кривая уравнения* (2).

Теорема эта, которую мы пока примем без доказательства, называется обычно *теоремой существования и единственности решения дифференциального уравнения* (2) *при заданном начальном условии.*

В дальнейшем, для краткости, сформулированную теорему мы будем называть теоремой А. В конце следующей главы мы приведем доказательство этой теоремы и ряд дополнений к ней. Укажем, как надо понимать утверждение единственности решения при заданном начальном условии. Пусть $y = \varphi_1(x)$ и $y = \varphi_2(x)$ суть два решения уравнения (2), удовлетворяющие условию (8), причем первое определено на некотором промежутке $I_1$, а второе на промежутке $I_2$ изменения $x$, а точка $x_0$ принадлежит этим промежуткам. При этом на общей части промежутков $I_1$ и $I_2$ должно иметь место тождество $\varphi_1(x) \equiv \varphi_2(x)$. Предполагается, конечно, что интегральные кривые $y = \varphi_1(x)$ и $y = \varphi_2(x)$ не выходят из области $B$, где $f(x, y)$ определена и удовлетворяет указанным в теореме условиям.

В следующих разделах мы укажем некоторые частные типы дифференциальных уравнений, интегрирование которых приводится к вычислению неопределенных интегралов или, как говорят, *их интегрирование приводится к квадратурам.* Отметим, что вычисление интеграла связано с вычислением площади, откуда и происходит термин «квадратура». При рассмотрении упомянутых частных типов мы приведем ряд примеров, на которых мы проиллюстрируем указанные выше соображения, связанные с теоремой А.

**3. Уравнения с отделяющимися переменными.** Наряду с простейшим уравнением (5) рассмотрим уравнение

$$y' = f(y) \quad \text{или} \quad \frac{dy}{dx} = f(y).$$

Перепишем его в виде

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(y)}$$

и для общего интеграла получим формулу

$$x = \int \frac{dy}{f(y)} + C^{*}.$$

Положим теперь, что правая часть уравнения (3) есть произведение функции только от $x$ на функцию только $y$:

$$\frac{dy}{dx} = g(x)h(y). \tag{10}$$

Это уравнение можно переписать в виде

$$\frac{dy}{h(y)} = g(x)dx. \tag{$10_1$}$$

Пусть $y(x)$ — некоторое решение уравнения (10) или, что то же, уравнения ($10_1$). Последнее равенство есть равенство двух дифференциалов, из которых левый выражается через посредство $y$ (вид

* Это выражение представляет $x$ как функцию $y$. Обычно требуется найти $y$ как функцию $x$, для этого в исходном уравнении выражают $dy$ и интегрируют.

дифференциала первого порядка не зависит от выбора переменной [I, 50]). Из равенства дифференциалов следует, что их неопределенные интегралы отличаются лишь произвольным постоянным слагаемым, т. е.

$$\int \frac{dy}{h(y)} = \int g(x)dx + C.$$

Выполняя квадратуры и решая относительно $y$, получим общий интеграл уравнения (10). Переход от (10) к ($10_1$) называется обычно *отделением (разделением) переменных.*

В связи с вышесказанным приведем некоторые общие соображения. Всякое дифференциальное уравнение первого порядка, решенное относительно производной, можно записать в виде

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0. \tag{11}$$

Уравнение, записанное в таком виде, не связывает нас выбором неизвестной функции. За таковую мы можем принять как $y$, так и $x$. Пусть $M(x, y)$ и $N(x, y)$ суть произведения функции только от $x$ на функции только от $y$, т. е.

$$M_1(x)M_2(y)dx + N_1(x)N_2(y)dy = 0.$$

Такое уравнение называется *уравнением с отделяющимися переменными* [I, 93]. Деля обе части на $N_1(x)M_2(y)$, «отделим переменные»:

$$\frac{M_1(x)}{N_1(x)}dx + \frac{N_2(y)}{M_2(y)}dy = 0$$

и получим общий интеграл уравнения в виде

$$\int \frac{M_1(x)}{N_1(x)}dx + \int \frac{N_2(y)}{M_2(y)}dy = C.$$

В дальнейшем мы займемся и общим уравнением (11).

Выше мы не уточнили условий, которые надо наложить на функции $g(x)$, $h(x)$ и т. д., а также не обсуждали вопроса о преобразованиях, которые мы выполняли — например, деление обеих частей уравнения (10) на $h(y)$. Более подробно это выяснится на примерах.

**4. Примеры. 1.** Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\frac{dy}{dx} = a\frac{y}{x}, \tag{12}$$

где $a$ — постоянная, отличная от нуля. Переменные разделяются:

$$\frac{dy}{y} = a\frac{dx}{x},$$

откуда

$$\lg|y| = a\lg|x| + \lg|C|^*, \quad \text{или} \quad |y| = |C||x|^a. \tag{13}$$

Интегрируя, мы пишем под знаком логарифма абсолютную величину, принимая во внимание возможность отрицательных величин, и произвольную постоянную обозначаем через $\lg|C|$. Уравнение (12) определяет поле направлений на всей плоскости, кроме прямой $x = 0$. Если мы перепишем его в виде

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{a}\frac{x}{y}, \tag{$12_1$}$$

то увидим, что поле направлений определено на прямой $x = 0$ при $y \neq 0$; в этих точках направление касательной параллельно оси $OY$. В точке $(0, 0)$ правая часть (12) и ($12_1$) не имеют смысла. Для уравнения (12) имеются две области $B$ теоремы А: левая полуплоскость $x < 0$ и правая $x > 0$, а для уравнения ($12_1$) — верхняя полуплоскость $y > 0$ и нижняя $y < 0$.

Разберем теперь случаи: $a = 2$, $a = 1$ и $a = -1$. При $a = 2$ из (13) следует: $y = Cx^2$, т. е. мы получаем семейство парабол с вершиной в $(0, 0)$, касающихся оси $OX$, и прямую $y = 0$ (при $C = 0$), а для уравнения ($12_1$) и прямая $x = 0$ будет интегральной линией. Через каждую точку плоскости, кроме $(0, 0)$, проходит одна и только одна линия семейства, состоящего из упомянутых парабол и осей координат. В точке $(0, 0)$, где дифференциальное уравнение не определено, все линии упомянутого семейства встречаются (*узловая точка* всех интегральных линий).

Если бы мы рассматривали только уравнение (12), то из семейства интегральных линий исключилась бы ось $OY (x = 0)$. Везде

* Обозначение lg здесь и далее применяется для натурального логарифма.

вдоль этой оси, кроме начала, правая часть (12) обращается в бесконечность (теряет непрерывность). Отметим, что все интегральные линии уравнения (12) касаются оси $OX$. При $a = 1$ из (13) следует $y = Cx$ т. е. семейство интегральных линий есть семейство всех прямых, проходящих через начало. Это семейство включает, как и при $a = 2$, оси координат. Отметим, что в этом случае интегральные линии уравнения (12) (прямые) приходят в начало с различными угловыми коэффициентами. При $a = -1$ из (13) получаем $y = \frac{C}{x}$, т. е. семейство интегральных линий уравнений (12) и ($12_1$) содержит все равнобочные гиперболы, имеющие асимптотами оси координат, и сами эти оси. Последнее надо понимать так: в начале координат встречаются положительные и отрицательные части осей координат.

**2.** Рассмотрим уравнение

$$\frac{dy}{dx} = a\frac{x}{y}. \tag{14}$$

Переменные разделяются

$$ydy = axdx$$

и, интегрируя, получаем

$$y^2 = ax^2 + 2C^*. \tag{15}$$

Для уравнения (14), как и в примере 1, имеются две области $B$ теоремы A: верхняя полуплоскость $y > 0$ и нижняя $y < 0$. При $a = -1$ получаем $x^2 + y^2 = 2C$, т. е. семейство интегральных линий есть семейство всех окружностей с центром в $(0, 0)$. Через всякую точку плоскости, кроме $(0, 0)$, проходит одна и только одна такая окружность и нет ни одной интегральной линии, которая бы беспредельно близко подходила к началу.

Если рассматривать только уравнение (14), то $y$ надо считать однозначной функцией от $x$, и всякая окружность будет состоять из двух интегральных линий: верхней части окружности (при $y > 0$)

* Множитель у произвольной постоянной $C$ никакой роли не играет в силу ее произвольности.

и нижней (при $y < 0$). На оси $OX$ (при $y = 0$ и $x \neq 0$) правая часть (14) обращается в бесконечность. В этих точках касательные к окружностям параллельны оси $OY$. Если переписать (14) при $a = -1$ в виде

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{y}{x}, \tag{$14_1$}$$

то указанная особенность при $y = 0$ исчезает, но появляется особенность при $x = 0$, и надо рассматривать правые части окружности (при $x > 0$) и левые (при $x < 0$), на которых $x$ — однозначная функция $y$, что требуется уравнением ($14_1$). Область $B$ теоремы A для уравнения ($14_1$) будет отлична от той же области для уравнения (14) при $a = -1$, и при применении теоремы A мы должны иметь в виду какую-либо определенную запись дифференциального уравнения. Этого мы и будет придерживаться в дальнейшем, если нет специальных оговорок о другой точке зрения.

Можно рассматривать совместно (14) и ($14_1$), как мы делали в примере 1. Эта точка зрения проведена в книге И. Г. Петровского «Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений» (Москва, 1964). Указанные неудобства при рассмотрении интегральных кривых связаны с тем, что мы рассматриваем их уравнения в явной форме: $y = \varphi(x)$ или $x = \psi(y)$. Если перейти к параметрической форме уравнений интегральных кривых, т. е. рассматривать $x$ и $y$ как функции вспомогательного параметра $t$, то уравнение (14) заменится системой двух уравнений для двух функций $x$ и $y$ независимого переменного $t$:

$$\frac{dx}{dt} = -y, \quad \frac{dy}{dt} = x.$$

Интегрированием систем мы займемся в дальнейшем.

Рассмотрим еще уравнение (14) при $a = 1$. Из (15) получаем $y^2 - x^2 = 2C$. Семейство интегральных кривых содержит все равнобочные гиперболы и их асимптоты $y = \pm x$.

**3.** Рассмотрим уравнение

$$\frac{dy}{dx} = y^2. \tag{16}$$

Здесь поле направлений определено на всей плоскости, правая часть непрерывна и имеет непрерывную производную по $y$ на всей плоскости и область $B$ теоремы A есть вся плоскость. Через всякую точку плоскости проходит единственная интегральная кривая, которая на всем своем протяжении не имеет общих точек с другими интегральными кривыми.

Переменные в уравнении (16) разделяются, и общий интеграл имеет вид

$$y = -\frac{1}{x+C}, \quad \text{или} \quad (x+C)y = -1. \tag{17}$$

Это — семейство равнобочных гипербол, имеющих центр в точках $(-C, 0)$ и асимптоты $y = 0$ и $x = -C$. Кроме того, уравнение (16) имеет очевидное решение $y = 0$. Уравнение (17) дает две интегральные кривые (две ветви гиперболы):

$$y = -\frac{1}{x+C} \quad \text{при} \quad -\infty < x < -C$$

и

$$y = -\frac{1}{x+C} \quad \text{при} \quad -C < x < +\infty.$$

Первые из них при всевозможных $C$ заполняют без пересечений верхнюю полуплоскость $(y > 0)$, а вторые — нижнюю $(y < 0)$.

Решение $y = 0$ может быть формально получено из (17) следующим образом: во второй из формул (17) заменим $C$ на $1/C$ и помножим обе части на $C$, что приведет к формуле $(Cx+1)y = -C$, откуда при $C = 0$ и получаем $y = 0$. Эта прямая вместе с упомянутыми гиперболами заполняет без пересечений всю плоскость.

**4.** Уравнение

$$\frac{dy}{dx} = 3y^{2/3} \tag{18}$$

определяет поле направлений, как в примере 3, на всей плоскости. Переменные разделяются, и общий интеграл выражается формулой

$$y = (x+C)^3. \tag{19}$$

Это есть семейство кубических парабол, которое получается из параболы $y = x^3$ параллельным переносом вдоль оси $OX$ (рис. 2). Уравнение (18) имеет также решение $y = 0$ (ось $OX$), которое не получается из формулы (19) ни при каком численном значении

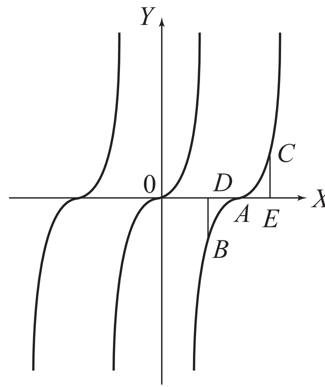


Рис. 2.

$C^*$. Легко показать, что никаких других решений уравнение (18) и уравнение $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{3}y^{-2/3}$ не имеют. Уравнение (18), как мы уже упоминали, определяет поле направлений на всей плоскости $XOY$. Но производная от правой части по $y$, равная $2y^{-1/3}$, не существует (обращается в бесконечность) при $y = 0$. Теорема А имеет место в двух раздельных областях: в верхней полуплоскости ($y > 0$) и в нижней ($y < 0$). Эти области заполнены параболами (19) Через каждую точку $(x_0, y_0)$ проходит только одна парабола. При этом постоянная $C$ определяется из уравнения

$$y_0 = (x_0 + C)^3, \quad \text{т. е.} \quad C = y_0^{1/3} - x_0.$$

Через точку $A(x_0, 0)$, кроме параболы, проходит еще решение $y = 0$ и единственности решения при начальном условии $(x_0, 0)$ нет. Если мы выделим (рис. 2) сколь угодно малый промежуток $x_0 - \delta \leqslant x \leqslant x_0 + \delta$, то в этом промежутке определены четыре решения уравнения (18): отрезок параболы $BAC$; 2) отрезок $DAE$ оси $OX$; 3) линия $DAC$, состоящая из отрезка $DA$ оси $OX$ и отрезка $AC$ параболы; 4) линия $BAE$, состоящая из отрезка $BA$ параболы и отрезка $AE$ оси $OX$. Все эти линии имеют уравнение вида $y = \varphi(x)$, где $\varphi(x)$ и $\varphi'(x)$ — непрерывны (вдоль этих линий угол, образованный касательной с осью $OX$, меняется непрерывно). Эти четыре интегральные линии и только они существуют на промежутке $x_0 - \delta \leqslant x \leqslant x_0 + \delta$ при любом сколь угодно малом фиксированном $\delta > 0$. Кратко говорят, что через точку $(x_0, 0)$ «в малом» проходит четыре интегральные кривые.

Если мы возьмем какую-либо точку $(x_0, y_0)$ в верхней полуплоскости ($y_0 > 0$), то через эту точку проходит единственная парабола (19) и она не пересекается с остальными параболами (19), так что

---

* Такие решения называются особыми

на всем своем протяжении в верхней полуплоскости она не имеет общих точек с другими интегральными линиями уравнения (18) (единственность в верхней полуплоскости). Но если, спускаясь по указанной параболе, дойдем до оси $OX$, то там нам представляется бесчисленное множество возможностей продолжать эту интегральную линию: можно спускаться по той же параболе или идти направо по оси $OX$, а затем подниматься по другой параболе (или идти по оси $OX$, не поднимаясь по параболе), т. е. через каждую точку плоскости не «в малом», а «в целом» проходит бесчисленное множество интегральных кривых.

**5. Однородное уравнение.** Однородной функцией $\varphi(x, y)$ нулевого измерения, или просто *однородной функцией*, называется функция только от отношения $y/x$, т. е. $\varphi(x, y) = f\left(\frac{y}{x}\right)$. Характерным является также условие $\varphi(tx, ty) = \varphi(x, y)$ [I, 154]. *Однородным дифференциальным уравнением* называется уравнение вида

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right). \tag{20}$$

Сохраняя прежнюю независимую переменную $x$, введем вместо $y$ новую искомую функцию $u = \frac{y}{x}$, откуда $y' = u + xu'$. Преобразуя уравнение (20), придем к уравнению

$$x\frac{du}{dx} = f(u) - u.$$

Случай $f(u) \equiv u$ был рассмотрен в [4]. Положим $f(u) \not\equiv u$. Переменные разделяются, и, интегрируя, получаем

$$x = C\psi(u), \quad \text{где} \quad \psi(u) = e^{-\int \frac{du}{u - f(u)}}.$$

Возвращаясь к прежней переменной, можем написать уравнение семейства интегральных кривых в виде

$$x = C\psi\left(\frac{y}{x}\right). \tag{21}$$

Рассмотрим преобразование подобия плоскости $XOY$ с центром подобия в начале координат. Преобразование это сводится к тому, что точка $(x, y)$ переходит в новое положение

$$x_1 = kx, \quad y_1 = ky \quad (k > 0), \tag{22}$$

или, что то же, оно сводится к умножению длины радиуса-вектора всякой точки плоскости на $k$ с сохранением его направления. Если $M$ есть первоначальное положение точки, а $M_1$ — положение той же точки после преобразования (рис. 3), то

$$\overline{OM}_1 : \overline{OM} = x_1 : x = y_1 : y = k.$$

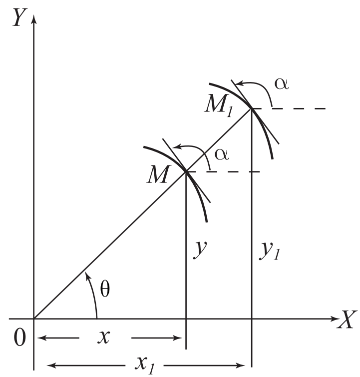

Рис. 3.

Применяя преобразование (22) к уравнению (21), получим уравнение

$$x_1 = kC\psi\left(\frac{y_1}{x_1}\right),$$

которое ввиду произвольности постоянной $C$ не отличается от уравнения (21), т. е. преобразование (22) не меняет всей совокупности кривых (21), но лишь переводит одну из кривых семейства (21) в другую кривую того же семейства. Всякая кривая семейства (21) может быть, очевидно, получена из одной определенной кривой этого семейства при помощи преобразования (22), если соответствующим образом выбрать постоянную $k$. Полученный результат можно формулировать так: *все интегральные кривые однородного уравнения могут быть получены из одной интегральной кривой при помощи преобразования подобия с центром подобия в начале координат.*

Уравнение (20) можно переписать так:

$$\operatorname{tg}\alpha = f(\operatorname{tg}\theta),$$

где $\operatorname{tg}\alpha$ — угловой коэффициент касательной, а $\theta$ — угол, образованный радиусом-вектором из начала координат с положительным направлением оси $OX$. Таким образом уравнение (20) устанавливает

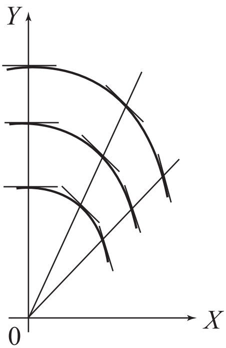


Рис. 4.

связь между углами $\alpha$ и $\theta$, так что *вдоль всякой прямой, проходящей через начало координат, касательные к интегральным кривым однородного уравнения должны быть параллельны между собой* (рис. 3).

Из этого свойства касательных становится очевидным то обстоятельство, что преобразование подобия с центром подобия в начале координат преобразует интегральную кривую в интегральную же кривую, ибо, при удлинении радиусов-векторов точек кривой в одном и том же отношении, направления касательных на каждом радиусе-векторе не меняются (рис. 4).

Если мы применим указанное выше преобразование подобия к интегральной кривой, которая представляет собою прямую, проходящую через начало координат, то после преобразования мы получим ту же прямую, так что *в этом случае упомянутый выше прием получения интегральных кривых из одной из них неприменим.*

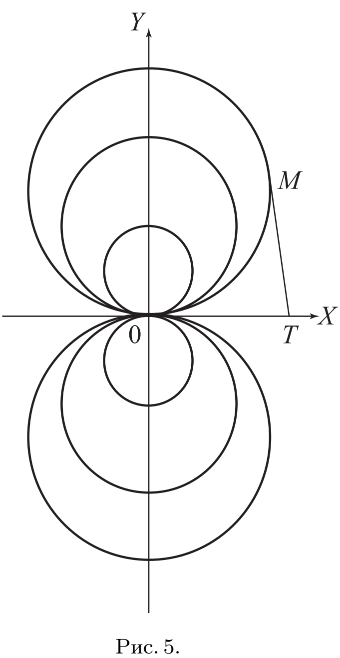


Рис. 5.

Пример. Определить кривые, у которых отрезок касательной от точки касания $M$ до пересечения с осью $OX$ равен отрезку $OT$ оси $OX$ (рис. 5).

Уравнение касательной имеет вид

$$Y - y = y'(X - x),$$

где $(X, Y)$ — текущие координаты касательной. Подставляя $Y = 0$ , определим след касательной на оси $OX$:

$$\overline{OT} = x - \frac{y}{y'},$$

и условие $\overline{MT^2} = \overline{OT^2}$ даст нам [I, 77]

$$\frac{y^2}{y'^2} + y^2 = \left(x - \frac{y}{y'}\right)^2,$$

откуда получаем дифференциальное уравнение

$$y' = \frac{2xy}{x^2 - y^2}, \tag{23}$$

которое, очевидно, принадлежит к типу однородных. Вводим вместо $y$ новую функцию $u$ по формуле

$$y = xu, \quad y' = xu' + u.$$

Подставив в уравнение (23), имеем

$$xu' + u = \frac{2u}{1 - u^2} \quad \text{или} \quad x\frac{du}{dx} - \frac{u + u^3}{1 - u^2} = 0,$$

и переменные разделяются

$$\frac{dx}{x} - \frac{1 - u^2}{u + u^3} du = 0.$$

Интегрируя, получаем

$$\frac{x(u^2 + 1)}{u} = C$$

или, возвращаясь к $y$,

$$x^2 + y^2 - Cy = 0. \tag{24}$$

Это — окружности, проходящие через начало координат и касающиеся в этой точке оси $OX$ (рис. 5). Уравнение (23) имеет еще очевидное решение $y = 0$. Оно может быть формально получено из (24) тем же приемом, который мы применили в примере 3 из [4]. Заменяем в (24) $C$ на $1/C$, после этого обе части (24) умножаем на $C$ и затем полагаем $C = 0$. Числитель и знаменатель правой части уравнения (23) одновременно обращаются в нуль только в точке $(0, 0)$. Через эту точку проходят все окружности и прямая $y = 0$, и в этой точке поле направлений не определено. Если рассматривать только уравнение (23), то на плоскости имеются четыре области $B$ теоремы А. Они получаются, если на плоскости провести прямые $y = \pm x$. В точках этих прямых знаменатель правой части уравнения (23) обращается в нуль. Во всех этих четырех областях на интегральных кривых $y$ есть однозначная функция $x$.

Дифференциальное уравнение

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{ax + by + c}{a_1 x + b_1 y + c_1}\right), \tag{25}$$

как мы сейчас покажем, приводится к однородному или к уравнению с отделяющимися переменными. Введем вместо $x$ и $y$ новые переменные $\xi$ и $\eta$:

$$x = \xi + \alpha, \quad y = \eta + \beta, \tag{26}$$

где $\alpha$ и $\beta$ — постоянные, которые мы сейчас определим.

Уравнение (25) в новых переменных будет

$$\frac{d\eta}{d\xi} = f\left(\frac{a\xi + b\eta + a\alpha + b\beta + c}{a_1\xi + b_1\eta + a_1\alpha + b_1\beta + c_1}\right).$$

Определим $\alpha$ и $\beta$ из условия

$$a\alpha + b\beta + c = 0, \quad a_1\alpha + b_1\beta + c_1 = 0.$$

При этом уравнение приведется к однородному

$$\frac{d\eta}{d\xi} = f\left(\frac{a + b\frac{\eta}{\xi}}{a_1 + b_1\frac{\eta}{\xi}}\right).$$

Преобразованию (26) соответствует параллельное перенесение координатных осей, причем начало координат переходит в точку пересечения прямых

$$ax + by + c = 0, \quad a_1x + b_1y + c_1 = 0. \tag{27}$$

Полученные в предыдущем результаты будут, таким образом, применимы к уравнению (25), с той лишь разницей, что роль начала координат будет играть точка $(\alpha, \beta)$.

Если прямые (27) параллельны, то указанное выше преобразование не может быть выполнено. Но в этом случае, как известно из аналитической геометрии, коэффициенты в уравнениях (27) должны быть пропорциональны

$$\frac{a_1}{a} = \frac{b_1}{b} = \lambda \quad \text{и} \quad a_1x + b_1y = \lambda(ax + by);$$

вводя вместо $y$ новую переменную $u$:

$$u = ax + by,$$

получим, как нетрудно видеть, уравнение с отделяющимися переменными.

Ниже мы познакомимся с весьма важным приложением однородного уравнения.

**6. Линейные уравнения и уравнение Бернулли.** *Линейным уравнением первого порядка* называется уравнение вида

$$y' + P(x)y + Q(x) = 0. \tag{28}$$

Рассмотрим сначала соответствующее уравнение без свободного члена $Q(x)$:

$$z' + P(x)z = 0.$$

Переменные здесь отделяются

$$\frac{dz}{z} + P(x)dx = 0,$$

и мы получим

$$z = Ce^{-\int P(x)dx}. \tag{29}$$

Заменяем неопределенный интеграл определенным с переменным верхним пределом:

$$z = Ce^{-\int\limits_{x_0}^{x} P(t)dt}.$$

Если имеется начальное условие

$$y|_{x=x_0} = y_0, \tag{30}$$

то $C = y_0$. Для интегрирования уравнения (25) воспользуемся так называемым *способом изменения произвольной постоянной Лагранжа*, а именно — будем искать решение этого уравнения в виде (29):

$$y = ue^{-\int P(x)dx},$$

считая только $u$ не постоянной а искомой функцией от $x$. Дифференцируя, находим

$$y' = u'e^{-\int P(x)dx} - uP(x)e^{-\int P(x)dx}.$$