В. И. Смирнов

Курс высшей математики

том I

В. И. Смирнов

Курс высшей математики

том I

Допущено Научно-методическим советом по математике
Министерства образования и науки Российской Федерации
в качестве учебника для студентов механико-математических
и физико-математических факультетов университетов
и технических высших учебных заведений

Санкт-Петербург
«БХВ-Петербург»
2008

УДК 510(075.8)
ББК 22.1я73
С50

Смирнов В. И.

С50 Курс высшей математики. Том I / Пред. Л. Д. Фаддеева, пред. и прим. Е. А. Грининой: 24-е изд. — СПб.: БХВ-Петербург, 2008. — 624 с.: ил. — (Учебная литература для вузов)

ISBN 978-5-94157-909-9

Фундаментальный учебник по высшей математике, переведенный на множество языков мира, отличается, с одной стороны, систематичностью и строгостью изложения, а с другой — простым языком, подробными пояснениями и многочисленными примерами.

В первом томе изложены функциональная зависимость и теория пределов, понятие о производной и интеграле, ряды и их приложения к приближенным вычислениям, функции нескольких переменных, комплексные числа, начала высшей алгебры и интегрирование функции.

В настоящем, 24-м, издании отмечена устаревшая терминология, сделаны некоторые замечания, связанные с методикой изложения материала, отличающейся от современной, исправлены опечатки.

Для студентов университетов и технических вузов

УДК 510(075.8)
ББК 22.1я73

Предисловие академика РАН Л. Д. Фаддеева

Рецензент: Л. Д. Кудрявцев, член-корреспондент РАН, академик Европейской академии наук, президент Центра современного образования, профессор

Редактор: Е. А. Гринина, канд. физ.-мат. наук

Оригинал-макет подготовлен издательством
Санкт-Петербургского государственного университета

ISBN 978-5-94157-909-9

ОГЛАВЛЕНИЕ

ГЛАВА II

ПОНЯТИЕ О ПРОИЗВОДНОЙ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ

ГЛАВА III

ПОНЯТИЕ ОБ ИНТЕГРАЛЕ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ

ГЛАВА IV

РЯДЫ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ К ПРИБЛИЖЕННЫМ ВЫЧИСЛЕНИЯМ

ГЛАВА V

ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

ГЛАВА VI

КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА, НАЧАЛА ВЫСШЕЙ АЛГЕБРЫ И ИНТЕГРИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ

ПРЕДИСЛОВИЕ
к 24-му изданию

Читателю предлагается переиздание первой книги многотомного труда Владимира Ивановича Смирнова «Курс высшей математики».

В чем притягательная сила этого энциклопедического учебника, который выдерживает испытание временем уже более семидесяти лет, переведен на множество языков мира, ссылки на который имеются в научных публикациях самого последнего времени?

Прежде всего это основополагающая идея, выдвинутая выдающимися учеными, академиками В. А. Фоком и В. И. Смирновым, работавшими на физическом факультете Ленинградского университета. Она состояла в том, что для студентов физиков и, даже шире, для естествоиспытателей и инженеров, требуется совсем иное содержание и стиль изложения математики, чем для студентов математиков. Формализованный стиль, основанный на чередовании определений, лемм и теорем, и доведение условий до предельно общих за счет громоздкости доказательства представляется ненужным мышлению физика, использующего эмпирический подход чаще, чем дедуктивный.

Второй составляющей успеха представляемой книги был непревзойденный педагогический дар Владимира Ивановича. До преклонных лет он был одним из любимейших лекторов на физическом факультете. Книги, написанные им, читаются просто и увлекательно, даже те страницы, где проводятся громоздкие вычисления. И все это с сохранением достаточной строгости изложения.

Третьим важным моментом является энциклопедический охват материала. Курс включает как общие разделы математики, читаемые для физиков, химиков, инженеров и т. д., так и более специализированные разделы, например, теорию групп или теорию специальных функций.

При написании раздела по теории групп значительную помощь ему оказал мой отец член-корреспондент Д. К. Фаддеев. В последнем томе курса впервые в советской математике было дано изложение функционального анализа. Часть разделов, связанных с функциональным анализом, была доработана после смерти В. И. Смирнова академиком О. А. Ладыженской.

Несколько слов надо сказать о личности Владимира Ивановича. Он был очень скромным, открытым человеком, никогда не требовавшим от университетского начальства ни отдельного кабинета, ни личной секретарши. Однако он был тверд и решителен, когда выступал в защиту гонимых по тем или иным причинам математиков, когда отстаивал научные принципы университетского образования. Ту же О. А. Ладыженскую он неоднократно спасал от административного произвола, сохранив для математики выдающегося ученого. Авторитет Владимира Ивановича как в Ленинградском математическом сообществе, так и в мировой науке был чрезвычайно высок.

До сих пор курс В. И. Смирнова используется как основное учебное пособие на физическом факультете Санкт-Петербургского государственного университета. На младших курсах одним из лекторов по высшей математике была Е. А. Гринина, которая и подготовила данное переиздание к печати.

академик РАН *Л. Д. Фаддеев*

Общая цель сделанных комментариев состоит в том, чтобы упростить современному студенту использование данной книги и как единого учебного пособия, и как справочного материала при работе с другими изданиями. Мною отмечена устаревшая терминология, даны замечания по поводу опущенных вычислений. Также сделаны некоторые замечания, связанные с методикой изложения материала, отличающейся от принятой в большинстве современных лекционных курсов. В ходе работы были исправлены опечатки, допущенные в предыдущем издании.

канд. физ.-мат. наук *Е. А. Гринина*

ГЛАВА I

ФУНКЦИОНАЛЬНАЯ ЗАВИСИМОСТЬ И ТЕОРИЯ ПРЕДЕЛОВ

§ 1. ПЕРЕМЕННЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

1. Величина и ее измерение. Математический анализ имеет основное значение в ряде наук и, в частности, в естественных науках и технике. В отличие от остальных наук, из которых каждая интересуется лишь некоторой определенной стороной окружающего нас мира, математика имеет дело с самыми общими свойствами, присущими всем доступным для научного исследования явлениям.

Одним из основных понятий является понятие о *величине и ее измерении*. Характерное свойство величины заключается в том, что она может быть измерена, т. е. тем или иным путем сравнена с некоторой определенной величиной того же рода, которая принимается *за единицу меры*. Самый процесс сравнения зависит от свойства исследуемой величины и называется *измерением*. В результате же измерения получается *число*, выражающее отношение рассматриваемой величины к величине, принятой за единицу меры. Всякий закон природы дает нам соотношение между величинами или, вернее, между числами, выражающими эти величины. Предметом исследования математики и являются как раз числа и различные соотношения между ними, независимо от конкретного характера тех величин или законов, которые привели нас к этим числам и соотношениям.

Итак, *каждой величине соответствует измеряющее ее число.* Но число это существенно зависит от принятой при измерении единицы или *масштаба.* При увеличении этой единицы будет уменьшаться число, измеряющее данную величину, и, обратно, число это будет увеличиваться при уменьшении единицы. Выбор масштаба обусловливается характером исследуемой величины и обстоятельствами, при которых производится измерение. Величина масштаба при измерении одной и той же величины может меняться в самых широких пределах, — например, при измерении *длины* в точных оптических исследованиях принимают за единицу длины один *ангстрем* (одну десятимиллионную долю миллиметра, 10^{-7} мм); в астрономии же употребляют единицу длины, называемую *световым годом*, т. е. расстояние, проходимое светом в течение одного года (за одну секунду свет проходит примерно 300 000 км).

2. Число. Число, которое получается в результате измерения, может быть *целым* (если единица содержится целое число раз в измеряемой величине), *дробным*, или *рациональным* (если существует другая единица, которая содержится целое число раз в измеряемой величине, так и в выбранной раньше единице, — короче, когда измеряемая величина *соизмерима* с единицей меры), и, наконец, *иррациональным* (когда такой общей меры не существует, т. е. данная величина оказывается *несоизмеримой* с единицей меры).

Так, например, в элементарной геометрии доказывается, что диагональ квадрата несоизмерима с его стороной, так что если мы будем измерять диагональ квадрата, приняв за единицу длины его сторону, то полученное при измерении число $\sqrt{2}$ будет иррациональным. Иррациональным же оказывается и число π, измеряющее длину окружности, диаметр которой принят за единицу.

Для уяснения понятия об иррациональном числе полезно обратиться к десятичным дробям. Всякое рациональное число, как известно из арифметики, может быть представлено или в виде конечной десятичной дроби, или в виде бесконечной десятичной дроби, причем в последнем случае бесконечная дробь будет периодической (чистой периодической или смешанной периодической). Так, например, производя деление числителя на знаменатель по правилу деления десятичных дробей, мы получим

$$\frac{5}{33} = 0,151515\dots = 0(15),\ \ \frac{5}{18} = 0,2777\dots = 0,2(7).$$

Наоборот, как известно из арифметики, всякая периодическая десятичная дробь выражает рациональное число.

При измерении величины, несоизмеримой с принятой единицей, мы можем сначала подсчитать, сколько раз полная единица заключается в измеряемой величине, затем сколько раз десятая доля единицы заключается в полученном остатке величины, затем сколько раз сотая доля единицы заключается в новом остатке и т. д. Таким путем при измерении величины, несоизмеримой с единицей, будет образовываться некоторая бесконечная непериодическая десятичная дробь. Всякому иррациональному числу соответствует такая бесконечная дробь и, наоборот, всякой бесконечной непериодической десятичной дроби соответствует некоторое иррациональное число. Если в этой бесконечной десятичной дроби оставить лишь несколько первых десятичных знаков, то получится приближенное значение по недостатку иррационального числа, представляемого этой дробью. Так, например, извлекая квадратный корень по обычному правилу до третьего десятичного знака, получим

$$\sqrt{2} = 1,414\dots$$

Числа 1,414 и 1,415 будут приближенными значениями $\sqrt{2}$ с точностью до одной тысячной по недостатку и по избытку.

Пользуясь десятичными знаками, можно иррациональные числа сравнивать по величине друг с другом и с рациональными числами.

Во многих случаях приходится рассматривать величины разных знаков: положительные и отрицательные (температура выше и ниже $0°$ и т. п.). Такие величины выражаются соответственно положительными и отрицательными числами. Если a и b — положительные числа и $a > b$, то $-a < -b$, и любое положительное число, включая нуль, больше любого отрицательного числа.

Все рациональные и иррациональные числа располагаются в некотором определенном порядке по своей величине. Все эти числа образуют совокупность *вещественных чисел*.

Отметим одно обстоятельство, связанное с представлением вещественных чисел десятичными дробями. Вместо любой конечной десятичной дроби мы можем написать бесконечную десятичную дробь с девяткой в периоде. Так, например: $3,16 = 3,1599\ldots$ Если не пользоваться конечными десятичными дробями, то получится точное биоднозначное* соответствие между вещественными числами и бесконечными десятичными дробями, т. е. всякому вещественному числу соответствует бесконечная десятичная дробь и всякой бесконечной десятичной дроби соответствует вещественное число. Отрицательным числам соответствуют бесконечные десятичные дроби с предшествующим им знаком минус.

В области вещественных чисел выполнимы первые четыре действия, кроме деления на нуль. Корень нечетной степени из любого вещественного числа имеет всегда одно определенное значение. Корень четной степени из положительного числа имеет два значения, которые различаются только знаком. Корень четной степени из отрицательного вещественного числа не имеет смысла в области вещественных чисел

$$(\sqrt[n]{0} = 0).$$

Строгая теория вещественных чисел и действий над ними будет нами изложена в [40].

Арифметическим, или абсолютным, значением числа a называется само число a, если a — положительное число или нуль, и число $-a$, если a — отрицательное число. Абсолютное значение числа a обозначается символом $|a|$, так что $|\mathrm{a}| = a$, если $a \geqslant 0$, и $|a| = -a$, если $a < 0$. Так, например, $|5| = 5$ и $|-5| = 5$ и вообще $|a| = |-a|$. Нетрудно видеть, что абсолютное значение суммы $|a+b|$ будет равно сумме абсолютных значений слагаемых, т. е. равно $|a| + |b|$ только в том случае, если слагаемые имеют одинаковый знак, а при разных знаках слагаемых $|a+b| < |a| + |b|$, так что во всех случаях

$$|a+b| \leqslant |a| + |b|.$$

* «Биоднозначное» означает взаимооднозначное.

Так, например, при $a = -3$ и $b = -7$ мы имеем знак равенства, а при $a = 3$ и $b = -7$ имеем $|3 + (-7)| = 4$ и $|3| + |-7| = 10$, т. е. знак неравенства.

Точно так же легко видеть что

$$|a - b| \geqslant |a| - |b|,$$

причем считается, что $|a| \geqslant |b|$. При $|a| < |b|$ неравенство также справедливо, ибо слева стоит положительная величина, а справа — отрицательная.

Абсолютное значение произведения равно произведению абсолютных значений сомножителей, и абсолютное значение частного (делитель отличен от нуля) равно частному абсолютных значений делимого и делителя, т. е.

$$|abc| = |a| \cdot |b| \cdot |c| \text{ и } \left|\frac{a}{b}\right| = \left|\frac{a}{b}\right|.$$

3. Величины постоянные и переменные. Величины, исследуемые в математике, разделяются на два класса: постоянные и переменные.

Постоянной величиной называется величина, которая при данном исследовании сохраняет одно и то же, неизменное, значение. Ей соответствует, таким образом, при фиксированной единице меры определенное число.

Переменной величиной называется такая величина, которая по тем или иным причина может принимать различные значения при данном исследовании.

Из этих определений ясно, что понятие о постоянной и переменной величине в значительной мере условно и зависит от обстоятельств, при которых изучается данное явление. Одна и та же величина, которая при одних условиях могла рассматриваться как постоянная, при других условиях может стать переменной, и наоборот.

Так, например, при измерении веса тел важно знать, производится ли взвешивание в одном и том же месте земной поверхности или в разных: если измерение производится в одном и том же месте, то ускорение силы тяжести, от которой и зависит вес, будет оставаться величиной постоянной, и различие в весе между разными телами будет зависеть только от их массы; если же измерения производятся в разных местах земной поверхности, то ускорение силы тяжести не может считаться постоянным, так как оно зависит от центробежной силы вращения Земли; благодаря этому одно и то же тело на экваторе весит меньше, чем на полюсе, что и можно обнаружить, если производить взвешивание не на рычажных, а на пружинных весах.

Равным образом при грубых технических расчетах можно считать, что длина входящих в конструкцию стержней есть величина неизменная; при более же точных, когда приходится принимать во внимание действие изменения температуры, длина стержней оказывается переменной, что, конечно, значительно усложняет все расчеты.

4. Промежуток. Характер изменения переменной величины может быть самым разнообразным. Переменная величина может принимать либо всевозможные вещественные значения, без всяких ограничений (например время t, отсчитываемое от некоторого определенного начального момента, может принимать всевозможные, как положительные, так и отрицательные, значения), либо значения ее ограничиваются некоторыми неравенствами (например абсолютная температура T°, которая должна быть больше $-273\,℃$); наконец, переменная величина может принимать лишь некоторые, а не всевозможные значения (только целые — число жителей данного города, число молекул в данном объеме газа — или только соизмеримые с данной единицей и т. п.).

Укажем некоторые, наиболее распространенные в теоретических исследованиях и на практике способы изменения переменных величин.

Если переменная величина x может принимать все вещественные значения, удовлетворяющие условию $a \leqslant x \leqslant b$, где a и b — заданные вещественные числа, то говорят, что *x изменяется в промежутке* (a, b). Такой промежуток, со включенными концами, называют иногда *замкнутым промежутком.* Если переменная x может принимать все значения из промежутка (a, b), кроме его концов, т. е. $a < x < b$, то говорят, что *x изменяется внутри промежут-*

ка (a, b). Такой промежуток с исключенными концами называется *открытым промежутком*. Кроме того, областью изменения x может быть и промежуток, замкнутый с одной стороны и открытый с другой: $a \leqslant x < b$ или $a < x \leqslant b$.

Если область изменения x определяется неравенством $a \leqslant x$, то говорят, что x изменяется в промежутке $(a, +\infty)$, который замкнут слева и открыт справа. Точно так же при неравенстве $x \leqslant b$ мы имеем промежуток $(-\infty, b)$, открытый слева и замкнутый справа. Если x может принимать любые вещественные значения, то говорят, что x изменяется в промежутке $(-\infty, +\infty)$, открытом с обеих сторон.

В дальнейшем через (a, b) мы всегда будем обозначать замкнутый промежуток. Часто для замкнутого промежутка пользуются обозначением $[a, b]$*. Исключение одного или обоих концов из промежутка мы будем оговаривать особо.

5. Понятие о функции. Чаще всего в приложениях приходится иметь дело не с одной переменной величиной, а с несколькими сразу. Рассмотрим, например, 1 *кг* воздуха. Переменные величины, определяющие его состояние, будут: давление p(*кг*/*м*^{2}), под которым он находится; объем v(*м*^{3}), который он занимает; температура его t(℃). Предположим пока, что температура воздуха поддерживается равной 0 ℃. Число t есть в данном случае постоянная, равная нулю. Остаются переменные p и v. Если менять p, то будет меняться и v; например, если воздух сжимать, то объем уменьшается. Давление p мы можем менять произвольно (по крайней мере, в пределах, доступных технике), а потому мы можем называть p *независимой переменной*; при каждой фиксированной величине давления газ, очевидно, должен занимать вполне определенный объем; стало быть, должен существовать такой закон, который позволяет при каждом значении p найти соответствующее ему значение v. Этот закон хорошо известен — это закон Бойля-Мариотта, который гласит, что объем, занимаемый газом при постоянной температуре, обратно пропорционален давлению.

---

* В математической литературе, как правило, обозначение (a, b) используется именно для открытого промужетка, а $[a, b]$ для замкнутого. На это следует обратить внимание при использовании этой книги одновременно с другими источниками.

Применяя этот закон к нашему килограмму воздуха, можно найти зависимость между v и p в виде уравнения

$$v = \frac{273 \cdot 29,27}{p}.$$

Переменная величина v называется в данном случае *функцией* независимой переменной p.

Отвлекаясь от этого частного примера, мы можем сказать, что, теоретически говоря, *для независимой переменной характерным является множество ее возможных значений, и мы можем по произволу выбирать для нее любое значение из этого множества ее возможных значений.* Так, например, множеством значений независимой переменной x может служить какой-либо промежуток (a, b) или внутренность этого промежутка, т. е. независимая переменная x может, например, принимать любые значения, удовлетворяющие неравенству $a \leqslant x \leqslant b$ или неравенству $a < x < b$. Может случиться, что x принимает любые целочисленные значения и т. д. В указанном выше примере роль независимой переменной играло p, и объем v был функцией p. Дадим теперь определение функции.

Определение. *Величина y называется функцией независимой переменной x, если любому определенному значению x (из множества ее возможных значений) соответствует определенное значение y.*

Если, например, y есть функция от x, определенная в промежутке (a, b), то это значит, что любому значению x из этого промежутка соответствует определенное значение y.

Вопрос о том, какую из двух величин, x или y, считать независимой переменной, есть часто вопрос только удобства. В нашем примере мы могли бы, меняя произвольно объем v и определяя каждый раз давление p, считать независимой переменной v, а давление p рассматривать как функцию от v. Решая написанное выше уравнение относительно p, получим формулу, выражающую функцию p через независимую переменную:

$$p = \frac{273 \cdot 29,27}{v}.$$

Сказанное о двух переменных без труда распространяется и на случай какого угодно числа переменных; и здесь мы можем отличить переменные независимые от зависимых, или функций.

Возвращаясь к нашему примеру, положим, что температура t не будет уже 0 °C, а может меняться. Закон Бойля—Мариотта должен быть при этом заменен более сложной зависимостью Клапейрона:

$$pv = 29,27(273 + t),$$

которая показывает, что при изучении состояния газа можно менять произвольно лишь две из величин p, v и t, а третья будет полностью определена, если даны значения этих двух. Мы можем принять за независимые переменные, например, p и t, тогда v будет функцией от них:

$$v = \frac{29,27(273 + t)}{p},$$

либо же независимыми переменными можно считать v и t, а p будет функцией от них.

Приведем другой пример. Площадь S треугольника выражается через длины сторон a, b, c по формуле

$$S = \sqrt{p\,(p-a)(p-b)(p-c)},$$

где p — полупериметр треугольника:

$$p = \frac{a+b+c}{2}.$$

Стороны a, b, c можно менять произвольно, лишь бы только каждая сторона была больше разности и меньше суммы двух других. Таким образом, переменные a, b, c *будут независимыми переменными, ограниченными неравенствами,* S — *функцией от них.*

Мы можем также задать произвольно две стороны, например a, b, и площадь S треугольника; пользуясь формулой

$$S = \frac{1}{2}\,ab\,\sin C,$$

где C — угол между сторонами a, b, мы можем тогда вычислить C. Здесь уже величины a, b, S будут независимыми переменными, C —

функцией. При этом переменные a, b, S должны быть ограничены неравенством

$$\sin C = \frac{2S}{ab} \leqslant 1.$$

Следует заметить, что в этом примере мы получаем для C *два значения*, смотря по тому, возьмем ли мы для C острый или тупой из двух углов, имеющих один и тот же синус

$$\sin C = \frac{2S}{ab}.$$

Мы приходим здесь к понятию о *многозначной функции*, о котором подробнее будем говорить ниже.

6. Аналитический способ задания функциональной зависимости. Всякий закон природы, дающий связь одних явлений с другими, устанавливает *функциональную зависимость* между величинами. Существует много способов для изображения функциональных зависимостей, но самое важное значение имеют три способа: 1) *аналитический*, 2) *способ таблиц* и 3) *графический, или геометрический*.

Мы говорим, что функциональная зависимость между величинами или, проще, *функция изображена аналитически*, если величины эти связаны между собой *уравнениями*, в которые они входят, подвергаясь различным математическим операциям: сложению, вычитанию, делению, логарифмированию и т. д. К аналитическому изображению функций мы приходим, когда исследуем вопрос *теоретически*, т. е., установив основные предпосылки, мы применяем математический анализ и получаем результат в виде некоторой математической формулы.

Если мы имеем, непосредственное выражение функции (т. е. зависимой переменной) при помощи математических действий над другими, независимыми переменными, то говорят, что функция аналитически задана явно. Примером явного задания функции может служить выражение объема газа v при постоянной температуре через давление (явная функция одной независимой переменной):

$$v = \frac{273 \cdot 29,27}{p}$$

или выражение площади S треугольника через стороны:

$$S = \sqrt{p\,(p-a)(p-b)(p-c)}$$

(явная функция от трех независимых переменных). Выпишем еще пример явного задания функции от одной независимой переменной x:

$$y = 2x^2 - 3x + 7. \tag{1}$$

Часто бывает неудобно или невозможно выписывать формулу, которая выражает функцию через независимые переменные. При этом пишут коротко так:

$$y = f(x).$$

Эта запись обозначает, что y есть функция независимой переменной x, и f есть символический знак зависимости y от x. Вместо f можно, конечно, употреблять и другие буквы. Если мы рассматриваем разные функции от x, то должны употреблять и разные буквы для символической записи зависимости от x:

$$f(x),\ \ F(x),\ \ \phi(x) \text{ и т. д.}$$

Такой символической записью пользуются не только в том случае, когда функция задана аналитически, но и в самом общем случае функциональной зависимости, которую мы определили в [5].

Аналогичной короткой записью пользуются и для функций от нескольких независимых переменных:

$$v = F(x,\ y,\ z).$$

Здесь v есть функция переменных x, y, z.

Частное значение функции получим, придав независимым переменным частные же значения и выполнив действия, указанные знаками $f, F, \ldots$ Так, например, частное значение функции (1) при $x = \frac{1}{2}$ будет

$$y = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 3 \cdot \frac{1}{2} + 7 = 6.$$

Вообще частное значение некоторой функции $f(x)$ при $x = x_0$ обозначается $f(x_0)$. Аналогично — для функции от нескольких переменных.

Не надо смешивать общего понятия функции, которое было нами дано в [5], с понятием аналитического выражения y через x. В общем определении функции говорится лишь о некотором законе, согласно которому любому значению переменной x из множества ее возможных значений соответствует определенное значение y. При этом не предполагается никакое аналитическое выражение (формула) y через x.

Отметим еще, что можно определить функцию различными аналитическими выражениями на разных участках изменения независимой переменной x. Так, например, мы можем определить функцию y на промежутке $(0,\ 3)$ следующим образом: $y = x + 5$ при $0 \leqslant x \leqslant 2$ и $y = 11 - 2x$ при $2 < x \leqslant 3$. При таком задании любому значению x из промежутка $(0,\ 3)$ соответствует определенное значение y, что и соответствует определению функции.

7. Неявные функции. Функция называется, *неявной*, если мы имеем не непосредственное аналитическое выражение ее через переменные независимые, а только *уравнение*, которое связывает ее значение со значениями переменных, независимых. Так, например, если переменная величина y связана с переменной величиной x уравнением

$$y^3 - x^2 = 0,$$

то y есть *неявная* функция независимой переменной x; с другой стороны, можно и x считать неявной функцией независимой переменной x.

Неявная функция v от нескольких независимых переменных $x, y, z, \ldots$ определяется вообще из *уравнения*

$$F(x,\ y,\ z,\ \ldots,\ v) = 0.$$

Вычислять значения этой функции мы можем тогда, когда разрешим уравнение относительно v и тем самым представим v в виде явной функции от $x, y, z, \ldots$:

$$v = \varphi(x,\ y,\ z,\ \ldots).$$

В приведенном выше примере y выражается через x в виде

$$y = \sqrt[3]{x^2}.$$

Однако для получения различных, свойств функции v совсем нет необходимости решать уравнение, и очень часто бывает, что удается достаточно хорошо изучить неявную функцию по самому уравнению, которым она определяется, не решая его.

Например, объем газа v есть неявная функция давления p и температуры t, определяемая уравнением

$$pv = R(273 + t).$$

Угол C между сторонами a и b треугольника площади S есть неявная функция a, b и S, определяемая уравнением

$$ab \sin C = 2S.$$

8. Табличный способ. Аналитический способ представления функций применяется главным образом при теоретических исследованиях. На практике же, когда приходится на самом деле вычислять много частных значений различных функций, аналитический способ представления часто оказывается неудобным, так как он требует в каждом случае производства всех необходимых вычислений.

Чтобы избежать этого, вычисляются частные значения наиболее употребительных функций, при большом числе частных значений независимых переменных, и составляются *таблицы.* Таковы, например, таблицы значений функций

$$y = x^2,\ \frac{1}{x},\ \sqrt{x},\ \pi x,\ \frac{1}{4}\pi x^3,\ \log_{10} x,\ \log_{10} \sin x,\ \text{и т. д.}$$

с которыми постоянно приходится иметь дело на практике. Существуют и другие таблицы, более сложных функций, которые тоже приносят большую пользу: таблицы бесселевых функций, эллиптических и т. д. Существуют таблицы и для функций от нескольких переменных, простейший пример которых представляет обыкновенная *таблица умножения*, т. е. таблица значений функций $z = xy$ при различных целых значениях x и y.

Иногда приходится вычислять значения функций при таких частных значениях независимых переменных, которых в таблицах нет, а есть только соседние к ним значения; для того, чтобы можно было пользоваться таблицами и в этом случае, существуют различные правила *интерполяции*; одно из таких правил было дано еще в курсе средней школы при пользовании таблицами логарифмов (partes proportionales).

Важное значение имеют таблицы тогда, когда при их помощи изображаются функции, аналитическое выражение которых нам *неизвестно*; с этим приходится иметь дело, когда производится *эксперимент.* Всякое опытное исследование имеет целью обнаружить скрытые для нас функциональные зависимости, и результат всякого опыта представляется в виде *таблицы*, связывающей между собой соответствующие значения исследуемых при этом опыте величин.

9. Графический способ изображения чисел. Переходя к графическому способу изображения функциональной зависимости, мы начнем со случая графического изображения одной переменной.

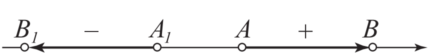

Рис. 1.

Всякое число x может быть изображено некоторым отрезком. Для этого достаточно, условившись раз и навсегда в выборе единицы длины, построить отрезок, длина которого равна как раз данному числу x. Таким образом, всякая величина не только может быть выражена *числом*, но также и геометрически изображена *отрезком.*

Для того чтобы можно было таким путем изобразить и отрицательные числа, условимся откладывать отрезки на одной и той же прямой линии, приписав ей притом определенное направление (рис. 1). Условимся, далее, обозначать всякий отрезок знаком $\overline{AB}$, причем точку A будем называть началом, B — концом отрезка.

Если направление от A к B совпадает с направлением прямой, отрезок изображает число положительное; если же направление от A к B противоположно направлению прямой, то отрезок изобразит число отрицательное (A_1B_1 на рис. 1). *Абсолютное же значение* рассматриваемого числа выражается длиной изображающего его отрезка независимо от направления.

Длину отрезка $\overline{AB}$ будем обозначать через $|\overline{AB}|$; если отрезок $\overline{AB}$ изображает число x, то будем писать просто

$$x = \overline{AB}, \ |x| = |\overline{AB}|.$$

Для большей определенности можно раз навсегда условиться помещать начало всех отрезков в заранее выбранную точку O прямой. Тогда всякий отрезок $\overline{OA}$, а потому и изображаемое им число x, будет вполне определяться *точкой* A, концом отрезка (рис. 2). Обратно, задав число x, можем и по величине и по направлению определить отрезок $\overline{OA}$, а потому и конец его A. Точке O (начало) соответствует $x = 0$.

Рис. 2.

Итак, *если провести направленную прямую $X'X$ (ось) и отметить на ней неподвижную точку O (начало), то каждому вещественному числу x будет соответствовать определенная точка A этой прямой, такая, что отрезок $\overline{OA}$ измеряется числом x. Обратно, всякой точке A оси соответствует вполне определенное вещественное число x, измеряющее отрезок $\overline{OA}$. Это число x называется абсциссой точки A; если нужно указать, что точка A имеет абсциссу x, то пишут $A(x)$.*

Если число x меняется, то изображающая его точка A передвигается по оси. Установленное выше понятие о промежутке при таком *графическом изображении числа x* становится совершенно наглядным, а именно: если x меняется в промежутке $a \leqslant x \leqslant b$, то соответствующая точка на оси $X'X$ будет находиться в отрезке, концы которого имеют абсциссы a и b.

Если бы мы ограничились одними рациональными числами, то точке A не соответствовало бы никакой абсциссы, если отрезок $\overline{OA}$ несоизмерим с принятой единицей, т. е., иначе говоря, одни рациональные числа не заполняют всех точек прямой. Это заполнение достигается введением иррациональных чисел. Основным положением при графическом изображении одной переменной величины является указанное выше положение: всякой точке оси $X'X$ соответствует определенное вещественное число и, наоборот, всякому вещественному числу соответствует определенная точка оси $X'X$.

Возьмем на оси $X'X$ две точки: точку A_1 с абсциссою x_1 и точку A_2 с абсциссою x_2. При этом отрезку $\overline{OA_1}$ будет соответствовать число x_1, а отрезку $\overline{OA_2}$ — число x_2. Нетрудно показать, рассматривая всевозможные взаимные расположения точек A_1 и A_2, что отрезку $\overline{A_1A_2}$ будет соответствовать число $x_2 - x_1$ так что длина этого отрезка будет равна абсолютному значению разности $(x_2 - x_1)$:

$$\overline{|A_1A_2|} = |x_2 - x_1|.$$

Если, например, $x_1 = -3$ и $x_2 = 7$, то точка A_1 лежит слева от O на расстоянии, равном 3, а точка A_2 лежит справа от O на расстоянии, равном 7. Отрезок $\overline{A_1A_2}$ будет иметь длину 10 и будет направлен так же, как ось $X'X$, т. е. ему будет соответствовать число $10 = 7 - (-3) = x_2 - x_1$. Предоставляем читателю разобрать другие возможности расположения точек A_1и A_2.

10. Координаты. Выше мы видели, что положение точки на прямой $X'X$ может быть определено вещественным числом x. Покажем теперь аналогичный способ определении положения точки на плоскости. Проведем на плоскости две взаимно перпендикулярные оси $X'X$и $Y'Y$ и возьмем за начало на каждой из них их точку пересечения O (рис. 3). Положительные направления на осях указаны стрелками. Точкам оси

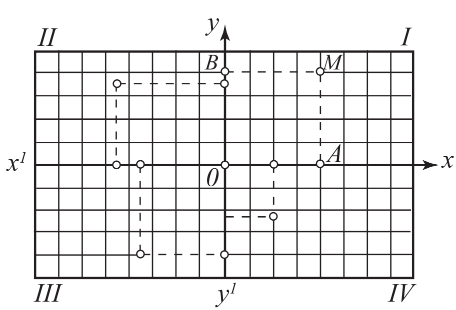

Рис. 3.

$X'X$ соответствуют вещественные числа, которые мы обозначим буквой x. Точкам оси $Y'Y$ также соответствуют вещественные числа, которые мы будем обозначать буквой y. Если нам заданы определенные значения x и y, то мы имеем определенные точки A и B на осях $X'X$ и $Y'Y$; зная точки A и B, можем построить точку M пересечения прямых, параллельных осям и проведенных через точки A и B.

Каждой паре значений величин x, y соответствует одно вполне определенное положение точки M на плоскости чертежа.

Обратно, каждой точке M плоскости соответствует вполне определенная пара значений величин x, y, отвечающих точкам пересечения A, B прямых, проведенных через точку M параллельно осям, с осями $X'X$и $Y'Y$.

При указанных на рис. 3 направлениях осей $X'X, Y'Y$ надо x считать положительным, если точка A лежит направо, и отрицательным, если она лежит налево от точки O; y будет положительным, если точка B лежит сверху, отрицательным, — если снизу от точки O.

Величины x, y, определяющие положение точки M на плоскости и в свою очередь определяемые положением точки M, называются координатами точки M. Оси $X'X, Y'Y$; называются координатными осями, плоскость чертежа — координатной плоскостью XOY, точка O — началом координат.

Величина x называется абсциссой, y — ординатой точки M. Задавая точку M ее координатами, пишут $M(x,\ y)$.

Самый способ изображения называется способом прямоугольных координат.

Знаки координат точки M при различных ее положениях в различных координатных углах (I–IV) (рис. 3) можно представить такой таблицей:

M	I	II	III	IV
x	$+$	$-$	$-$	$+$
y	$+$	$+$	$-$	$-$

Совершенно ясно, что координаты x и y точки M равны расстояниям точки M до осей координат, взятым с соответствующими знаками. Отметим, что точки оси $X'X$ имеют координаты $(x,\ 0)$, а точки оси $Y'Y$ — координаты $(0,\ y)$. Начало координат O имеет координаты $(0,\ 0)$.

11. График и уравнение кривой. Возвратимся к величинам x и y, которые изображает точка M. Пусть x и y связаны функциональной зависимостью; это значит, что, меняя по произволу x (или y), мы будем получать каждый раз соответствующее значение y (или

x). Каждой такой паре значений x и y соответствует определенное положение точки M на плоскости XOY; если же значения эти будут меняться, то точка M будет передвигаться по плоскости и при движении своем опишет некоторую линию (рис. 4), которая называется *графическим изображением* (или, проще, *графиком* или *диаграммой*) *рассматриваемой функциональной зависимости.*

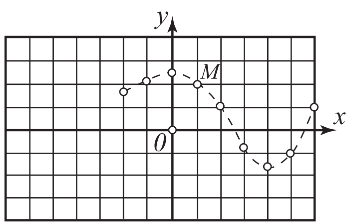

Рис. 4.

Если зависимость задана *аналитически* в виде *уравнения* в явной форме

$$y = f(x)$$

или в неявной форме

$$F(x,\ y) = 0,$$

то уравнение это называется *уравнением кривой*, а кривая — *графиком уравнения* или *графиком функции*. Кривая и ее уравнение суть лишь различные способы выражения одной и той же функциональной зависимости, т. е. *все точки, координаты которых удовлетворяют уравнению кривой, лежат на этой кривой и, обратно, координаты всех точек, лежащих на кривой, удовлетворяют ее уравнению.*

Если дано уравнение кривой, можно, пользуясь листом графленой бумаги, построить, более или менее точно, самую кривую (вернее, можно построить *какое угодно число точек*, лежащих на этой кривой); чем больше таких точек построим, тем яснее будет для нас форма кривой; такой способ называется *построением кривой по точкам.*

Выбор *масштаба* имеет существенное значение при построении кривых; при этом можно выбирать *разные* масштабы при построении x и y. При одинаковых масштабах для x и y плоскость уподобляется листу бумаги, разграфленному на *квадраты*, при разных же масштабах — на *прямоугольники*. В дальнейшем будет подразумеваться, что масштабы для x и y одинаковы.

Читателям рекомендуется здесь же построить по точкам несколько графиков простейших функций, меняя притом масштабы для x и y.

Введенные выше понятия о координатах точки M, об уравнении кривой и графике уравнения устанавливают тесную связь между алгеброй и геометрией. С одной стороны, мы получаем возможность наглядным геометрическим путем изображать и исследовать аналитические зависимости, с другой стороны, оказывается возможным сводить решение геометрических вопросов к чисто алгебраическим действиям, в чем и заключается основная задача *аналитической геометрии*, разработанной впервые Декартом.

Ввиду чрезвычайной важности формулируем еще раз факты, лежащие в основе аналитической геометрии. Если на плоскости отметить две координатные оси, *то всякой точке плоскости будет соответствовать пара вещественных чисел — абсцисса и ордината этой точки, и, наоборот, всякой паре чисел будет соответствовать определенная точка плоскости, имеющая первое число своей абсциссой и второе число своей ординатой. Кривой на плоскости соответствует функциональная зависимость между* x *и* y*, или, что то же, уравнение, содержащее переменные* x *и* y*, которое удовлетворяется в том и лишь в том случае, если вместо* x *и* y *подставить координаты какой-либо из точек кривой. Наоборот, уравнению, содержащему две переменные* x *и* y*, соответствует кривая, состоящая из тех точек плоскости, координаты которых, будучи подставлены вместо* x *и* y *в уравнение, удовлетворяют ему.*

В дальнейшем мы рассмотрим основные примеры графиков функций, а теперь приведем некоторые общие соображения. Пусть мы имеем уравнение в явной форме: $y = f(x)$, где $f(x)$ — *однозначная функция*, определенная, например, в промежутке $(a,\ b)$, т. е. такая функция, что любому x из $(a,\ b)$ соответствует одно определен-