В. И. Смирнов

Курс высшей математики

том III часть 2

bhv

В. И. Смирнов

Курс высшей математики

том III часть 2

Допущено Научно-методическим советом по математике
Министерства образования и науки Российской Федерации
в качестве учебника для студентов механико-математических
и физико-математических факультетов университетов
и технических высших учебных заведений

Санкт-Петербург

«БХВ-Петербург»

2010

УДК 510(075.8)
ББК 22.1я73
С50

Смирнов В. И.

С50 Курс высшей математики. Том III, часть 2 / Прим. Е. А. Грининой: 10-е изд. — СПб.: БХВ-Петербург, 2010. — 816 с.: ил. — (Учебная литература для вузов)

ISBN 978-5-9775-0087-6

Фундаментальный учебник по высшей математике, переведенный на множество языков мира, отличается, с одной стороны, систематичностью и строгостью изложения, а с другой — простым языком, подробными пояснениями и многочисленными примерами.

Во второй части третьего тома рассматриваются основы теории функций комплексного переменного, конформное преобразование и плоское поле, применение теории вычетов, целые и дробные функции, аналитические функции многих переменных и функции матриц, линейные дифференциальные уравнения, специальные функции, приведение матриц к канонической форме.

В настоящем, 10-м, издании отмечена устаревшая терминология, сделаны некоторые замечания, связанные с методикой изложения материала, отличающейся от современной, исправлены опечатки.

Для студентов университетов и технических вузов

УДК 510(075.8)
ББК 22.1я73

Рецензент: Л. Д. Кудрявцев, член-корреспондент РАН, академик Европейской академии наук, президент Центра современного образования, профессор

Редактор: Е. А. Гринина, канд. физ.-мат. наук

Оригинал-макет подготовлен издательством
Санкт-Петербургского государственного университета

ISBN 978-5-9775-0087-6

ОГЛАВЛЕНИЕ

ГЛАВА I

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

ГЛАВА II

КОНФОРМНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ И ПЛОСКОЕ ПОЛЕ

ГЛАВА III
ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ ВЫЧЕТОВ, ЦЕЛЫЕ И ДРОБНЫЕ ФУНКЦИИ

ГЛАВА IV
АНАЛИТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ И ФУНКЦИИ МАТРИЦ

ГЛАВА V
ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

ГЛАВА I

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

1. Функции комплексного переменного. При изложении дифференциального и интегрального исчисления мы считали, что как независимая переменная, так и функция принимают лишь вещественные значения. Далее, при изложении основ высшей алгебры мы рассматривали наиболее элементарную функцию, а именно — полином, и в том случае, когда независимая переменная принимает комплексные значения. Целью настоящей главы является распространение основ анализа на случай функции от комплексного переменного.

Возьмем, например, полином

$$f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n,$$

где a_k — заданные комплексные числа. Мы можем считать, что и независимая переменная z принимает любые комплексные значения, и таким образом функция $f(z)$ будет определена для любых комплексных значений z.

То же самое можно сказать о рациональной функции

$$\frac{a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n}{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \ldots + b_m}$$

или о выражениях, содержащих радикалы, например:

$$\sqrt{z-1}.$$

В главе VI тома I мы определили элементарные трансцендентные функции для случаев комплексных значений независимого переменного, а именно для показательной функции мы имеем:

$$e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y),$$

и, определив таким образом показательную функцию, сможем определить и тригонометрические функции при комплексных значениях аргумента

$$\begin{gathered}\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \\ \operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{1}{i}\frac{e^{i2z} - 1}{e^{i2z} + 1}, \quad \operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z} = i\frac{e^{i2z} + 1}{e^{i2z} - 1}.\end{gathered} \tag{1}$$

Напомним выражение для натурального логарифма комплексного числа:

$$\ln z = \ln|z| + i \arg z, \tag{2}$$

где $|z|$ есть модуль z, $\arg z$ обозначает аргумент переменной z. Точно так же, рассматривая функции, обратные (1), мы приходим к обратным круговым функциям комплексного переменного:

$$\arcsin z, \quad \arccos z, \quad \operatorname{arctg} z, \quad \operatorname{arcctg} z.$$

Нетрудно показать, что эти функции могут быть выражены через логарифм. Положим, например,

$$z = \operatorname{tg} w = \frac{e^{i2w} - 1}{i(e^{i2w} + 1)},$$

откуда

$$i(e^{i2w} + 1)z = e^{i2w} - 1,$$

или

$$e^{i2w} = \frac{1 + iz}{1 - iz}.$$

Умножая числитель и знаменатель на i и логарифмируя, получим

$$w = \operatorname{arctg} z = \frac{1}{2i} \ln \frac{i - z}{i + z}.$$

Совершенно так же, если положить

$$z = \sin w = \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{2i},$$

то получим квадратное уравнение для e^{iw}:

$$e^{i2w} - 2ize^{iw} - 1 = 0,$$

откуда

$$e^{iw} = iz + \sqrt{1 - z^2},$$

и, следовательно,

$$w = \frac{1}{i}\ln(iz + \sqrt{1 - z^2}),$$

где надо брать оба значения квадратного радикала.

Как мы увидим в дальнейшем, все вышеуказанные элементарные функции комплексного переменного имеют производную как функции комплексного переменного, т. е. для них существует определенный предел отношения

$$\frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z},$$

когда комплексное выражение Δz стремится к нулю. Вся настоящая глава и будет посвящена изложению основ теории функций комплексного переменного, имеющих производную. Эта теория отличается чрезвычайно большой отчетливостью и простотой, с одной стороны, а с другой стороны, имеет широкое применение ко многим отделам естествознания и техники. В настоящей главе будет дан краткий очерк самой теории, а приложения будут изложены в следующих главах. Мы надеемся таким путем достигнуть более отчетливого и компактного изложения теоретических основ.

В дальнейшем мы будем очень часто пользоваться геометрической интерпретацией комплексного числа, о которой говорили уже в [I, 170].

Напомним кратко основную идею этой интерпретации. Отнеся плоскость к прямолинейным прямоугольным осям OX, OY, мы можем каждой точке этой плоскости сопоставить или две вещественные координаты (x, y) или одну комплексную координату $x + iy$, что и будем делать дальше. В этом смысле плоскость называется плоскостью комплексного переменного, ось X — вещественной осью и ось Y — мнимой осью. Кроме этой точечной интерпретации комплексного числа мы будем пользоваться, главным образом в следующих главах, еще и векторной интерпретацией, при которой комплексному числу $x+iy$ сопоставляется вектор, составляющие которого на координатные оси равны x и y. Непосредственно очевидна связь между двумя этими интерпретациями, а именно: если провести вектор из начала координат в точку с комплексной координатой $x+iy$, то этому вектору будет соответствовать то же самое комплексное число $x+iy$. Вообще, если на нашей плоскости провести вектор, имеющий начало в точке A с комплексной координатой a_1+ia_2 и конец в точке B с комплексной координатой b_1+ib_2, то этому вектору $\overline{AB}$ будет соответствовать комплексное число, равное разности комплексных координат конца и начала:

$$(b_1-a_1)+i(b_2-a_2).$$

Напомним некоторые результаты, изложенные раньше [I, 171 и 172].

Сложению комплексных чисел соответствует геометрическое сложение соответствующих этим числам векторов. Модуль комплексного числа есть длина соответствующего вектора, а аргумент равен углу, образованному вектором с осью X.

Если комплексная переменная z меняется, то соответствующая точка двигается по плоскости.

Мы будем говорить, что $z=x+iy$ стремится к пределу $\alpha=a+ib$, где a и b — постоянные, если модуль разности

$$|\alpha-z|=\sqrt{(a-x)^2+(b-y)^2}$$

стремится к нулю.

Из написанного выражения непосредственно следует, поскольку под радикалом стоят положительные слагаемые, что $|\alpha-z|\to 0$ равносильно тому, что

$$x\to a \quad \text{и} \quad y\to b.$$

Итак,

$$x + iy \to a + ib$$

равносильно

$$x \to a \quad \text{и} \quad y \to b.$$

При этом, очевидно, переменная точка M, соответствующая числу $z = x + iy$, стремится к точке A с комплексной координатой $\alpha = a + ib$ как к своему предельному положению. Как нетрудно показать, на чем мы останавливаться не будем, для комплексного переменного имеют место обычные теоремы о пределе суммы, произведения и частного.

Заметим еще, что из определения предела вытекает, что $z \to 0$ равносильно $|z| \to 0$. Далее, если $z \to \alpha$, то, очевидно, $|z| \to |\alpha|$.

Для комплексного переменного имеет место также признак Коши существования предела.

Пусть имеется, например, последовательность значений комплексного переменного

$$\begin{gathered} z_1 = x_1 + y_1 i, \\ z_2 = x_2 + y_2 i, \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ z_n = x_n + y_n i, \\ \dots\dots\dots\dots\dots \end{gathered}$$

Существование предела у этой последовательности равносильно существованию пределов у вещественных последовательностей x_n и y_n, а для существования этих пределов необходимо и достаточно, чтобы абсолютные значения разностей $|x_n - x_m|$ и $|y_n - y_m|$ становились сколь угодно малыми при достаточно больших n и m [I, 31].

Принимая во внимание, что

$$|z_n - z_m| = \sqrt{(x_n - x_m)^2 + (y_n - y_m)^2}$$

и что под радикалом стоят положительные слагаемые, мы видим, что для существования предела последовательности z_n необходимо и достаточно, чтобы $|z_n - z_m|$ становился сколь угодно малым при всех достаточно больших n и m, т. е., точнее говоря, при любом заданном положительном ε существует такое N, что $|z_n - z_m| < \varepsilon$, если только n и $m > N$. В общем случае комплексного переменного мы должны повторить о комплексном переменном то, что мы говорили в начале тома I о вещественном переменном. Необходимое и достаточное условие существования предела комплексного переменного z состоит в следующем: при любом заданном положительном ε существует такое значение переменной z, что $|z' - z''| < \varepsilon$, если только z' и z'' — любые два значения, следующие после упомянутого значения. В дальнейшем мы будем говорить, что комплексное переменное z стремится к бесконечности, если $|z| \to +\infty$.

Перейдем теперь к рассмотрению функции комплексного переменного

$$w = f(z)$$

и условимся относительно некоторых терминов. Функция $f(z)$ может быть определена или на всей плоскости, или лишь в некоторой области плоскости комплексного переменного z, например в некотором круге, или прямоугольнике, или кольце и т. д. У всякой такой области мы будем отличать внутренние ее точки и точки контура. Так, например, в случае круга с центром в начале координат и радиусом единица, внутренние точки характеризуются условием

$$|z| < 1, \quad \text{или} \quad x^2 + y^2 < 1,$$

а контуром является окружность

$$|z| = 1, \quad \text{или} \quad x^2 + y^2 = 1.$$

Характерным свойством внутренней точки является то свойство, что не только она сама, но и некоторая ее окрестность целиком принадлежит области, т. е. точка M будет внутренней точкой области, если этой области принадлежит целиком некоторый достаточно малый круг с центром M. Точки контура не являются уже внутренними точками области, но в сколь угодно малой окрестности точки контура находятся внутренние точки области. Мы будем, кроме того, считать, что наша область не распадается на отдельные куски (связность области), иначе говоря, будем предполагать, что любые две точки области могут быть соединены некоторой линией, которая целиком находится внутри области. В дальнейшем под областью будем подразумевать обычно лишь *совокупность внутренних точек* области. Если же к области присоединяется и граница, то будем называть область *замкнутой* [II, 91].

Кроме того, мы будем называть область *ограниченной*, если все ее точки находятся на конечном расстоянии от начала. В дальнейшем еще несколько дополним характеристику понятия области.

Вернемся к рассмотрению функции $w = f(z)$. Положим, что она определена внутри некоторой области B, т. е. во всякой точке z, лежащей внутри B, $f(z)$ имеет определенное комплексное значение (мы говорим об однозначных функциях). Пусть z_0 — некоторая точка внутри B. Функция $f(z)$ называется непрерывной в точке z_0, если $f(z) \to f(z_0)$ при $z \to z_0$, т. е. при любом данном положительном ε существует такое положительное η, что $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$, если только $|z - z_0| < \eta$. Функция называется непрерывной внутри B, если она непрерывна во всякой точке, находящейся внутри B. Функция $f(z)$ может быть определена не только внутри B, но и на границе l области, т. е. в замкнутой области B. Мы будем говорить, что такая функция непрерывна в замкнутой области B, если она непрерывна в каждой точке этой замкнутой области B. При определении непрерывности в какой-либо точке z_0 границы l надо иметь в виду, что точка z может стремиться к z_0 любым образом, но не покидая замкнутой области B. Как и в случае вещественного переменного, имеет место теорема: если $f(z)$ непрерывна в ограниченной замкнутой области, то она равномерно непрерывна в этой области, т. е. для любого заданного положительного ε существует такое положительное η (одно и то же для всей области), что $|f(z_1) - f(z_2)| < \varepsilon$, если $|z_1 - z_2| < \eta$, где z_1 и z_2 принадлежат упомянутой замкнутой области.

Напишем z и $w = f(z)$ разложенными на вещественную и мнимую части:

$$z = x + yi;$$
$$w = f(z) = u + vi.$$

Задать z это значит задать x и y, и задать $f(z)$ — значит задать u

и v, т. е. u и v мы должны считать функциями x и y:

$$w = f(z) = u(x, y) + v(x, y)i. \tag{3}$$

В элементарных функциях такое разделение вещественной и мнимой частей может быть произведено при помощи простых операций, например:

$$w = z^2 = (x + yi)^2 = (x^2 - y^2) + 2xyi.$$

Положим, что $z_0 = x_0 + y_0 i$; условие $z \to z_0$ равносильно $x \to x_0$ и $y \to y_0$.

Определение непрерывности в точке z_0 дает, что при $z \to z_0$, т. е. при $x \to x_0$ и $y \to y_0$, мы должны иметь

$$f(z) \to f(z_0),$$

или

$$u(x, y) + v(x, y)i \to u(x_0, y_0) + v(x_0, y_0)i,$$

что равносильно

$$u(x, y) \to u(x_0, y_0)$$

и

$$v(x, y) \to v(x_0, y_0).$$

Следовательно, непрерывность $f(z)$ в точке z_0 равносильна непрерывности $u(x, y)$ и $v(x, y)$ в точке (x_0, y_0).

Разделяя вещественную и мнимую части и пользуясь свойством непрерывности элементарных функций вещественного переменного, мы убеждаемся в том, что полином, e^z, $\sin z$, $\cos z$ — непрерывные функции на всей плоскости комплексного переменного. Рациональная дробь непрерывна везде, кроме тех точек z, где ее знаменатель обращается в нуль. Точно так же $\operatorname{tg} z$ непрерывен везде, кроме тех точек z, где $\cos z$ обращается в нуль. Как и в случае вещественного переменного, сумма и произведение конечного числа непрерывных функций — также непрерывные функции, а частное двух непрерывных функций непрерывно, кроме тех значений z, в которых знаменатель обращается в нуль.

При изложении дальнейшей теории мы будем заниматься сначала однозначными функциями, а затем специально рассмотрим вопрос и о многозначных функциях. Примерами многозначных функций являются $\sqrt{z-1}$, функция (2) и обратные круговые функции.

2. Производная. Выше мы видели, что функция $f(z)$ согласно формуле (3) определяется двумя вещественными функциями $u(x, y)$ и $v(x, y)$, и непрерывность $f(z)$ равносильна непрерывности $u(x, y)$ и $v(x, y)$. Выбор их при построении $f(z)$ остается произвольным без дополнительных требований на $f(z)$. Основой той теории, которую мы будем излагать в дальнейшем, является требование, чтобы $f(z)$ имела производную по комплексной независимой переменной z. Это требование наложит некоторые связи на $u(x, y)$ и $v(x, y)$, и из них будут следовать свойства этих функций. Положим, что $f(z)$ определена в некоторой точке z и во всех точках, достаточно близких к z. Производная $f'(z)$ в точке z определяется, как мы уже упоминали, как предел отношения

$$\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}, \tag{4}$$

причем этот предел должен быть конечным и одним и тем же при любом законе стремления комплексного приращения $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$ к нулю. Точнее говоря [ср. I, 45], при любом заданном числе $\varepsilon > 0$ существует такое число $\eta > 0$, что

$$\left|\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z} - f'(z)\right| < \varepsilon, \text{ если } |\Delta z| = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} < \eta.$$

Нетрудно показать, как и в случае вещественного переменного, что справедливы обычные теоремы о производной суммы, произведения и частного [I, 47]. Применяя формулу бинома Ньютона, получим при целом положительном z

$$(z^n)' = nz^{n-1}. \tag{5}$$

Из сказанного следует существование производной у любого полинома от z, а у рациональной дроби — везде, кроме тех значений, при которых знаменатель дроби обращается в нуль. Имеет место обычное правило дифференцирования сложных функций:

$$F'_z(w) = F'_w(w) \cdot w'_z \tag{6}$$

Точную формулировку для этого правила мы приведем в [5]. Ниже мы выразим $f'(z)$ через частные производные функций $u(x,\, y)$ и $v(x,\, y)$.

Положим, что функция $f(z)$ определена внутри некоторой области B и имеет в каждой точке внутри B производную. При этом просто говорят, что $f(z)$ имеет производную внутри области B. Эта производная $f'(z)$ будет также однозначной функцией внутри B.

Введем новое важное определение. Будем говорить, что $f(z)$ *регулярна*, или *голоморфна*, внутри B, если она однозначна внутри B и имеет внутри B непрерывную производную $f'(z)$. Заметим прежде всего, что из существования производной вытекает и непрерывность $f(z)$ внутри B. Иногда говорят, что $f(z)$ регулярна (или голоморфна) в точке z_0. Это значит, что $f(z)$ регулярна внутри некоторой области, содержащей точку z_0 внутри себя.

Обратимся к формуле (3), в которой отделены вещественная и мнимая части как у z, так и у функции $f(z)$, и поставим следующий вопрос: каким условиям должны удовлетворять функции $u(x,\, y)$ и $v(x,\, y)$, для того чтобы $f(z)$ была регулярной внутри области B. Положим сначала, что $f(z)$ регулярна внутри B и выведем отсюда следствия, касающиеся $u(x,\, y)$ и $v(x,\, y)$.

Как уже упоминалось выше, при определении производной, существование которой предполагается, можно стремить приращение независимого переменного $\Delta z = \Delta x + \Delta y i$ к нулю любым образом.

Отметим внутри B некоторую точку M с координатой $z = x + yi$ и переменную точку N с координатой $z + \Delta z = (x + \Delta x) + (y + \Delta y)i$, причем N стремится к M.

Возьмем два частных способа стремления N к M, т. е. стремления Δz к нулю.

При первом способе будем считать, что N стремится к M, оставаясь на прямой, параллельной оси X, т. е. при первом способе будем иметь

$$\Delta y = 0 \quad \text{и} \quad \Delta z = \Delta x, \tag{7}$$

а при втором способе будем считать, что N стремится к M, оставаясь на прямой, параллельной оси Y, и при этом будем иметь

$$\Delta x = 0 \quad \text{и} \quad \Delta z = i\Delta y. \tag{8}$$

Составим производную $f'(z)$ для обоих этих случаев. В общем случае мы имеем

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \\ = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{[u(x+\Delta x, y+\Delta y) - u(x,y)] + i[v(x+\Delta x, y+\Delta y) - v(x,y)]}{\Delta x + i\Delta y}. \tag{9}$$

Отсюда при первом способе стремления N к M получим

$$f'(z) = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{u(x+\Delta x, y) - u(x,y)}{\Delta x} + i\frac{v(x+\Delta x, y) - v(x,y)}{\Delta x}\right].$$

Мы видим, таким образом, что вещественная и мнимая части в правой части равенства должны иметь предел, т. е. функции $u(x,\, y)$ и $v(x,\, y)$ должны иметь частные производные по x, причем имеет место формула

$$f'(z) = \frac{\partial u(x,\, y)}{\partial x} + \frac{\partial v(x,\, y)}{\partial x} i. \tag{10}$$

Точно так же при втором способе стремления N к M будем иметь согласно (8) и (9)

$$f'(z) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{1}{i}\left[\frac{u(x, y+\Delta y) - u(x,y)}{\Delta y} + i\frac{v(x, y+\Delta y) - v(x,y)}{\Delta y}\right],$$

или

$$f'(z) = \frac{\partial v(x,\, y)}{\partial y} - \frac{\partial u(x,\, y)}{\partial y} i. \tag{11}$$

Сравнивая выражения (10) и (11) для $f'(z)$, получаем условия, которым должны удовлетворять частные производные $u(x, y)$ и $v(x, y)$:

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial v(x, y)}{\partial y}, \quad \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} = -\frac{\partial u(x, y)}{\partial y}. \tag{12}$$

Заметим еще, что из непрерывности $f'(z)$ вытекает, на основании (10) и (11), непрерывность частных производных первого порядка функций $u(x, y)$ и $v(x, y)$. Предыдущие рассуждения приводят нас к следующему результату. Для того чтобы $f(z)$ была регулярна внутри B, необходимо выполнение следующих условий: $u(x, y)$ и $v(x, y)$ *должны иметь внутри B непрерывные частные производные первого порядка по x и y, и эти производные должны удовлетворять соотношениям* (12).

Покажем теперь, что *эти условия не только необходимы, но и достаточны для регулярности $f(z)$ внутри B.* Итак, будем считать, что высказанные условия выполнены, и докажем существование непрерывной производной $f'(z)$. Принимая во внимание непрерывность частных производных от $u(x, y)$ и $v(x, y)$ по x и y, можем написать [I, 68]

$$\begin{aligned} &u(x+\Delta x, y+\Delta y) - u(x, y) = \\ &\qquad\qquad = \frac{\partial u(x, y)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u(x, y)}{\partial y}\Delta y + \varepsilon_1\Delta x + \varepsilon_2\Delta y, \\ &v(x+\Delta x, y+\Delta y) - v(x, y) = \\ &\qquad\qquad\qquad = \frac{\partial v(x, y)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial v(x, y)}{\partial y}\Delta y + \varepsilon_3\Delta x + \varepsilon_4\Delta y, \end{aligned}$$

где ε_k стремятся к нулю одновременно с Δx и Δy. Составляя при помощи последних выражений приращение функции $f(z+\Delta z) - f(z)$ и подставляя его в отношение (4), будем иметь

$$\begin{aligned} &\frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \\ &= \frac{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y\right) + i\left(\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial v}{\partial y}\Delta y\right) + (\varepsilon_1 + i\varepsilon_3)\Delta x + (\varepsilon_2 + i\varepsilon_4)\Delta y}{\Delta x + i\Delta y}, \end{aligned}$$

откуда, пользуясь условиями (12), можем переписать это отношение в виде

$$\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=$$
$$=\frac{\frac{\partial u}{\partial x}(\Delta x+i\Delta y)+i\frac{\partial v}{\partial x}(\Delta x+i\Delta y)}{\Delta x+i\Delta y}+\varepsilon_5\frac{\Delta x}{\Delta x+i\Delta y}+\varepsilon_6\frac{\Delta y}{\Delta x+i\Delta y},$$

где

$$\varepsilon_5=\varepsilon_1+i\varepsilon_3 \quad \text{и} \quad \varepsilon_6=\varepsilon_2+i\varepsilon_4$$

стремятся к нулю одновременно с Δz.

Нетрудно видеть, что последние два слагаемых справа также стремятся к нулю. Действительно, например,

$$\left|\varepsilon_5\frac{\Delta x}{\Delta x+i\Delta y}\right|=|\varepsilon_5|\frac{|\Delta x|}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}},$$

и первый множитель стремится к нулю, а второй не превосходит единицы. Таким образом, предыдущая формула переписывается в виде

$$\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=\frac{\partial u(x,\,y)}{\partial x}+\frac{\partial v(x,\,y)}{\partial x}i+\varepsilon_7,$$

где ε_7 стремится к нулю одновременно с Δz, а первые два слагаемых в правой части вовсе не зависят от Δz. Таким образом, отношение (4) стремится к определенному пределу, определяемому формулой (10). Итак, указанные выше условия для $u(x,\,y)$ и $v(x,\,y)$ *необходимы и достаточны* для регулярности $f(z)$ внутри B. Уравнения (12) называются обычно *уравнениями Коши—Римана.*

Напомним, что мы уже встречались с этими уравнениями, а именно таким двум уравнениям должны удовлетворять потенциал скорости и функция тока при установившемся плоском течении идеальной несжимаемой жидкости [II, 74]. Таким образом, основные уравнения теории функций комплексного переменного (12) являются в то же время и основными уравнениями при исследовании упомянутого только что случая задач гидродинамики. На этом факте основаны многочисленные применения теории функций комплексного переменного к гидродинамике, о чем мы будем говорить в следующей главе.

Отметим теперь одно важное обстоятельство, вытекающее из уравнений (12). Мы увидим в дальнейшем, что в случае регулярной функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ имеют производные всех порядков. Дифференцируя первое из уравнений (12) почленно по x, второе по y и складывая, получим

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \qquad (13_1)$$

Точно так же из уравнений (12) нетрудно вывести

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0. \qquad (13_2)$$

Отсюда видно, что *вещественная и мнимая части регулярной функции $f(z)$ должны удовлетворять уравнению Лапласа*, т. е. должны быть гармоническими функциями. В следующей главе мы так же подробно исследуем эту связь теории функций комплексного переменного с уравнением Лапласа.

Отметим еще одно важное обстоятельство, вытекающее из уравнений (13), а именно мы можем конструировать регулярную функцию, задавая произвольным образом ее вещественную часть, т. е. принимая за $u(x, y)$ любое решение уравнения (13_1). Покажем, что при этом $v(x, y)$ определяется с точностью до постоянного слагаемого.

Действительно, из уравнений (12) имеем

$$dv = \frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy = -\frac{\partial u}{\partial y}dx + \frac{\partial u}{\partial x}dy,$$

откуда

$$v(x, y) = \int^{(x,\, y)} -\frac{\partial u}{\partial y}dx + \frac{\partial u}{\partial x}dy + C. \qquad (14)$$

Остается проверить, что написанный криволинейный интеграл не зависит от пути и дает некоторую функцию своего верхнего предела [II, 71]. Напомним, что условия независимости криволинейного интеграла

$$\int X\,dx + Y\,dy$$

от пути могут быть написаны следующим образом:

$$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x}.$$

Применяя это к интегралу (14), получим

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right), \quad \text{или} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

а это по условию выполнено, так как за $u(x, y)$ мы взяли некоторую гармоническую функцию. Напомним, что если $u(x, y)$ однозначна, то $v(x, y)$ может оказаться и многозначной, если область, в которой мы применяем формулу (14), многосвязна [II, 72].

Обратимся теперь к некоторым примерам. Полином есть очевидно регулярная функция на всей плоскости z. Рациональная дробь есть регулярная функция внутри всякой области, не содержащей корней ее знаменателя. Если возьмем, например, $f(z) = z^2$, то $u(x, y) = x^2 - y^2$ и $v(x, y) = 2xy$. Нетрудно проверить, что эти функции удовлетворяют соотношениям (12).

Покажем теперь, что показательная функция

$$e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$$

регулярна на всей плоскости. В данном случае

$$u(x, y) = e^x \cos y, \quad v(x, y) = e^x \sin y,$$

откуда непосредственно следует

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \sin y,$$
$$\frac{\partial v}{\partial x} = e^x \sin y, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = e^x \cos y.$$

Эти частные производные непрерывны и удовлетворяют соотношениям (12). Вычисляем производную по формуле (10):

$$(e^z)' = e^x \cos y + ie^x \sin y = e^x(\cos y + i \sin y), \quad \text{т. е.} \quad (e^z)' = e^z.$$

Мы получили то же правило дифференцирования показательной функции, что и для вещественного переменного. Теперь нетрудно показать, что $\sin z$ и $\cos z$ имеют также непрерывные производные на всей плоскости z. Эти производные вычисляются по тем же правилам, что и для вещественного переменного. Действительно, применяя правила дифференцирования показательной и сложной функций, получим

$$(\sin z)' = \Big(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\Big)' = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \cos z,$$
$$(\cos z)' = \Big(\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}\Big)' = i\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2} = -\sin z.$$

3. Конформное преобразование. Выясним геометрический смысл понятия функциональной зависимости и производной. Положим, что функция $f(z)$ регулярна в некоторой области B плоскости (X, Y). Всякому значению z из области B соответствует определенное значение $w = f(z)$, и совокупность всех значений $w = u + iv$, соответствующих всем z из B, заполняет некоторую новую область

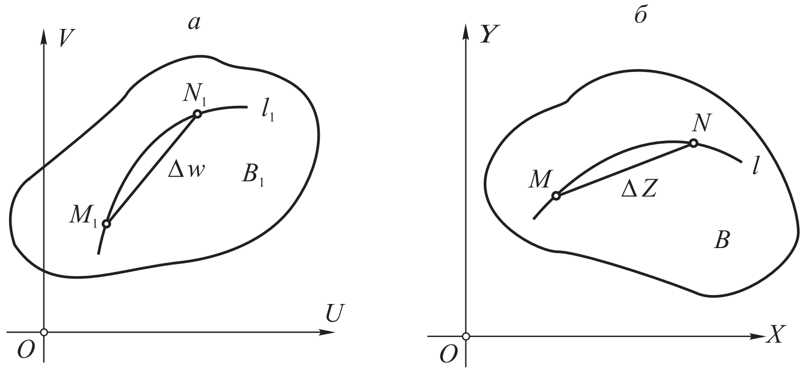

Рис. 1.

B_1, которую мы нарисуем на новой плоскости комплексного переменного $u + iv$ (рис. 1). Таким образом, *наша функция $f(z)$ совер-*

шает преобразование области B *в область* B_1. Строго говоря, мы должны были бы более подробно исследовать зависимость между точками z и w, осуществляемую нашей функцией, и доказать, что совокупность значений w также заполняет некоторую область. В дальнейшем, имея в руках аналитический аппарат, мы займемся этим более подробным исследованием, а в настоящий момент ограничимся лишь общими указаниями, которые все же дадут возможность читателю выяснить геометрический смысл вводимых понятий. В дальнейшем будет показано, что если в некоторой точке z производная $f'(z)$ отлична от нуля, то достаточно малый круг с центром z перейдет в некоторую область на плоскости w, содержащую соответствующую точку $w = f(z)$ внутри себя.

Перейдем теперь к выяснению геометрического смысла *модуля* и *аргумента* производной, причем будем считать, что производная $f'(z)$ в рассматриваемой точке отлична от нуля. Возьмем две близкие точки z и $z + \Delta z$. Соответствующие им точки в области B_1 будут w и $w + \Delta w$.

Возьмем отрезки MN и M_1N_1, соединяющие z с $z + \Delta z$ и w с $w + \Delta w$. Этим векторам соответствуют комплексные числа Δz и Δw. Таким образом, отношение длин этих векторов будет

$$\frac{|M_1N_1|}{|MN|} = \frac{|\Delta w|}{|\Delta z|}$$

или, принимая во внимание, что модуль частного равен частному модулей,

$$\frac{|M_1N_1|}{|MN|} = \left|\frac{\Delta w}{\Delta z}\right|.$$

В пределе при стремлении N к M точка N_1 будет стремиться к M_1, и мы получим

$$\lim \frac{|M_1N_1|}{|MN|} = |f'(z)|,$$

т. е. *модуль производной* $f'(z)$ *характеризует изменение линейных размеров* в точке z при преобразовании, совершаемом функцией $f(z)$. Если, например, $f(z) = z^2 + z + 3$, то при преобразовании линейные размеры в точке $z = 1$ увеличиваются в три раза.

Перейдем теперь к выяснению геометрического смысла аргумента производной. Положим, что точка N стремится к точке M вдоль некоторой линии l, и пусть l_1 — соответствующая линия в области B_1 (рис. 2). Аргумент комплексного числа Δz дает угол, образованный вектором $\overline{MN}$ с вещественной осью, и точно так же $\arg \Delta w$ дает угол, образованный вектором $\overline{M_1 N_1}$ с вещественной

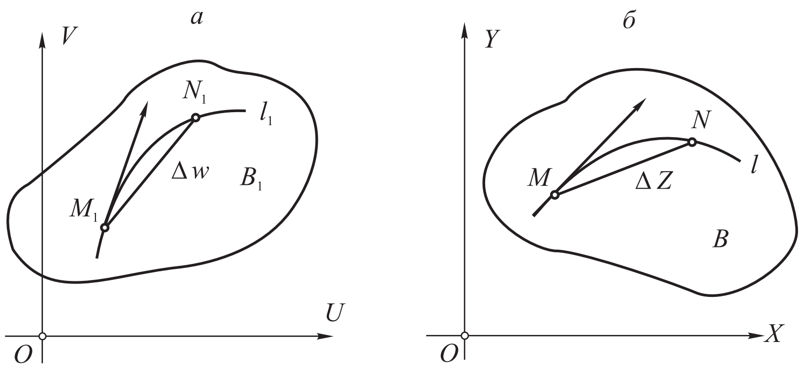

Рис. 2.

осью. Разность указанных аргументов, т. е.

$$\arg \Delta w - \arg \Delta z,$$

представляет собою угол, образованный направлением вектора $\overline{M_1 N_1}$ с направлением вектора $\overline{MN}$, причем этот угол отсчитывается от вектора $\overline{MN}$ противоположно часовой стрелке. Принимая во внимание, что аргумент частного равен разности аргументов делимого и делителя, можем написать

$$\arg \Delta w - \arg \Delta z = \arg \frac{\Delta w}{\Delta z}.$$

В пределе направление вектора $\overline{MN}$ совпадает с направлением касательной к кривой l в точке M, а направление вектора $M_1 N_1$ совпадает с направлением касательной к кривой l_1 в точке M_1.

Переходя в предыдущей формуле к пределу, мы видим, что *аргумент производной* $\arg f'(z)$ *дает угол поворота в данной точке* z в результате преобразования, совершаемого функцией $f(z)$. Иными словами, если провести через z какую-нибудь кривую l, имеющую в точке z определенную касательную, то в результате преобразования получится новая кривая l_1, касательная к которой в соответствующей точке w будет образовывать с вышеуказанной касательной угол, равный аргументу производной. Если мы возьмем в области B две кривые, пересекающиеся в точке z под некоторым углом, то в результате преобразования касательные к этим кривым повернутся на один и тот же угол, равный аргументу производной, и, следовательно, угол между преобразованными кривыми будет прежним как по величине, так и по направлению, т. е. *преобразование, совершаемое регулярной функцией, сохраняет углы во всех точках, где производная этой функции отлична от нуля.* Такое преобразование, сохраняющее углы, называется обычно *конформным.*

Если мы нанесем в области B плоскости XY некоторую сетку кривых, то в результате преобразования получим также сетку кривых, но уже, конечно, других, причем углы между кривыми сохраняются, кроме тех точек, где производная равна нулю. Если мы возьмем, например в области B, сетку прямых, параллельных осям, то в области B_1 получим уже криволинейную, вообще говоря, сетку, но углы между кривыми останутся по-прежнему прямыми, т. е. сетка останется ортогональной. Больше того, если мы покроем область B малыми одинаковыми квадратами, то каждый такой квадрат превратится в области B_1 в малый криволинейный прямоугольник, стороны которого приближенно будут равны произведению длины стороны квадрата на модуль производной в какой-либо из точек этого квадрата, т. е. упомянутый выше криволинейный прямоугольник будет также с точностью до малых высших порядков квадратом, но так как значение $|f'(z)|$ в разных точках будет разное, то эти криволинейные квадраты, заполняющие B_1, будут иметь различные по длине стороны.

Пусть точка $z = z_0$ принадлежит области регулярности B функции $f(z)$ и $f'(z_0) \neq 0$. При этом можно утверждать, как будет потом доказано, что $w = f(z)$ преобразует некоторую окрестность B_0 точки z_0 в некоторую окрестность B_0' точки $w_0 = f(z_0)$ (w_0 находится внутри B_0'), так что в B_0' существует однозначная обратная функция $z = \varphi(w)$, преобразующая B_0' в B_0. При этом $\varphi(w)$ регулярна в B_0', и имеет место правило дифференцирования обратной функции

$$\varphi'(w) = \frac{1}{f'(z)}.$$

Окрестность B_0 точки z_0 во всяком случае должна быть такой, что во всех ее точках $f'(z) \neq 0$. В дальнейшем мы исследуем и тот случай, когда $f'(z)$ обращается в нуль, и более подробно рассмотрим вопрос об обратной функции.

Остановимся кратко на понятии сложной функции $F(w)$, где $w = f(z)$. Пусть $f(z)$ регулярна внутри некоторой области B и преобразует ее в некоторую область B' плоскости w. Положим, далее, что $F(w)$ регулярна в B'. При этом сложная функция $F(w)$ — регулярная функция от z в B, и для нее имеет место правило дифференцирования, выражаемое формулой (6).

Отметим, что это правило справедливо и в том случае, когда функция $w = f(z)$ такова, что в B' нет однозначной обратной, т. е. при различных z из B могут получаться одинаковые w из B' и под B' подразумевается множество значений $f(z)$, когда z меняется в B. Как мы увидим в дальнейшем, B' есть некоторая открытая область на плоскости w. В упомянутых случаях обычно не говорят, что $w = f(z)$ преобразует B и B'. Этот вопрос будет выяснен в дальнейшем.

4. Интеграл. Пусть l — некоторая направленная линия на плоскости z. В дальнейшем, если не оговорено особо, всегда будем предполагать, что линии l гладкие или кусочно гладкие. Это значит, что l имеет параметрическое представление $x = x(t)$, $y = y(t)$, где $x(t)$ и $y(t)$ — непрерывные функции с непрерывными производными, причем

$$[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 > 0$$

(это гарантирует в каждой точке l определенную касательную), или что l состоит из конечного числа кусков, каждый из которых вплоть до своих концов обладает вышеуказанным свойством. Любая дуга такой линии имеет определенную длину [I, 103], или, как говорят,

l спрямляема. Если за параметр t принять длину дуги s линии l, отсчитываемую от фиксированной точки в направлении, указанном на l, то производные $x'(s)$, $y'(s)$ суть направляющие косинусы касательной к l [I, 70], и имеет место равенство

$$[x'(s)]^2 + [y'(s)]^2 = 1.$$

Для линии указанного типа вычисление криволинейного интеграла

$$\int\limits_l P(x,\, y)dx + Q(x,\, y)dy$$

непосредственно сводится к вычислению обычного определенного интеграла. Достаточно лишь в подынтегральном выражении заменить x, y на $x(t)$, $y(t)$ и положить $dx = x'(t)dt$, $dy = y'(t)dt$. Дело сведется к интегрированию по t в пределах, соответствующих линии l.

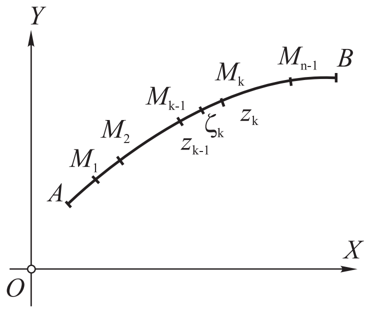

Рис. 3.

Положим, что на l задана некоторая непрерывная функция $f(z)$. Определим понятие контурного интеграла по контуру l (рис. 3). Разобьем l на части промежуточными точками $M_1, M_2, \ldots, M_{n-1}$, и пусть z_k $(k = 1,\, 2,\, \ldots,\, n-1)$ — комплексные координаты M_k, а z_0 и z_n — координаты концов A и B. Пусть, далее, ζ_k — некоторая точка на дуге $M_{k-1}M_k$, ζ_1 — на дуге AM_1 и ζ_n — на дуге $M_{n-1}B$. Составим сумму произведений

$$\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)(z_k - z_{k-1}).$$

Предел этой суммы при беспредельном возрастании n и беспредельном уменьшении каждой из частных дуг называется *контурным интегралом от функции $f(z)$ по l*:

$$\int\limits_l f(z)dz = \lim \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)(z_k - z_{k-1}). \tag{15}$$

Напомним, что написанное равенство равносильно следующему: при любом заданном $\varepsilon > 0$ существует такое $\eta > 0$, что

$$\left| \int\limits_l f(z)dz - \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)(z_k - z_{k-1}) \right| < \varepsilon,$$

если наибольшая из длин частичных дуг $< \eta$.

Обозначим $z_k = x_k + y_k i$ и $\zeta_k = \xi_k + \eta_k i$. Отделяя вещественную и мнимую части у $f(z)$, можем написать

$$\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)(z_k - z_{k-1}) = \\ = \sum_{k=1}^{n} [u(\xi_k,\, \eta_k) + v(\xi_k,\, \eta_k)i][(x_k - x_{k-1}) + (y_k - y_{k-1})i],$$

или

$$\sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)(z_k - z_{k-1}) = \\ = \sum_{k=1}^{n} u(\xi_k,\, \eta_k)(x_k - x_{k-1}) - v(\xi_k,\, \eta_k)(y_k - y_{k-1}) + \\ + i \sum_{k=1}^{n} v(\xi_k,\, \eta_k)(x_k - x_{k-1}) + u(\xi_k,\, \eta_k)(y_k - y_{k-1}).$$

При сделанных предположениях о линии l и при непрерывности $f(z)$ обе суммы, стоящие в правой части, стремятся к пределам, равным соответствующим криволинейным интегралам по l, и мы получаем выражение для интеграла (15) в виде суммы обычных криволинейных вещественных интегралов:

$$\int\limits_l f(z)dz = \int\limits_l u(x,\, y)dx - v(x,\, y)dy + \\ + i \int\limits_l v(x,\, y)dx + u(x,\, y)dy. \quad (16)$$

Выше мы для определенности считали, что линия l имеет концы, но очевидно, что данное определение годится и при интегрировании по замкнутым контурам.

Контурный интеграл (15) обладает совершенно такими же свойствами, как и обычный криволинейный вещественный интеграл [II, 69]. Упомянем основные из этих свойств. Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла. Интеграл от суммы равен сумме интегралов от слагаемых. При перемене направления у контура интегрирования величина интеграла меняет лишь знак. Если разбить контур интегрирования на несколько частей, то величина интеграла по всему контуру равна сумме интегралов по отдельным его частям.

Выведем теперь одно важное неравенство, дающее оценку величине интеграла (15). Положим, что на контуре l модуль подынтегральной функции не превышает положительного числа M, т. е.

$$|f(z)| \leqslant M \quad (z \text{ на } l), \tag{17}$$

и пусть s — длина контура l. При этом для интеграла (15) имеет место следующая оценка:

$$\left| \int_l f(z) dz \right| \leqslant Ms. \tag{18}$$

Действительно, обратимся к сумме (15), дающей в пределе интеграл. Принимая во внимание, что модуль суммы меньше или равен сумме модулей слагаемых, получим

$$\left| \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)(z_k - z_{k-1}) \right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |f(\zeta_k)||z_k - z_{k-1}|,$$

или в силу (17)

$$\left| \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)(z_k - z_{k-1}) \right| \leqslant M \sum_{k=1}^{n} |z_k - z_{k-1}|.$$

Сумма, стоящая множителем при M, представляет собою, очевидно, периметр ломаной линии, вписанной в контур l, и, переходя в последнем неравенстве к пределу, будем иметь неравенство (18).