



В. И. Смирнов

Курс
ВЫСШЕЙ
МАТЕМАТИКИ
том III часть 1



В. И. Смирнов

**Курс
ВЫСШЕЙ
МАТЕМАТИКИ
том III часть 1**

Допущено Научно-методическим советом по математике
Министерства образования и науки Российской Федерации
в качестве учебника для студентов механико-математических
и физико-математических факультетов университетов
и технических высших учебных заведений

Санкт-Петербург

«БХВ-Петербург»

2010

УДК 510(075.8)
ББК 22.1я73
С50

Смирнов В. И.

С50 Курс высшей математики. Том III, часть 1 / Пред. Л. Д. Фаддеева, пред. и прим. Е. А. Грининой: 11-е изд. — СПб.: БХВ-Петербург, 2010. — 400 с.: ил. — (Учебная литература для вузов)

ISBN 978-5-9775-0334-1

Фундаментальный учебник по высшей математике, переведенный на множество языков мира, отличается, с одной стороны, систематичностью и строгостью изложения, а с другой — простым языком, подробными пояснениями и многочисленными примерами.

В первой части третьего тома рассматриваются определители и решение системы уравнений, линейные преобразования и квадратичные формы, основы теории групп, линейные представления групп и непрерывные группы.

В настоящем, 11-м, издании отмечена устаревшая терминология, сделаны некоторые замечания, связанные с методикой изложения материала, отличающейся от современной, исправлены печатки.

Для студентов университетов и технических вузов

УДК 510(075.8)
ББК 22.1я73

Предисловие академика РАН Л. Д. Фаддеева

Рецензент: Л. Д. Кудрявцев, член-корреспондент РАН, академик Европейской академии наук, президент Центра современного образования, профессор

Редактор: Е. А. Гринина, канд. физ.-мат. наук

Оригинал-макет подготовлен издательством
Санкт-Петербургского государственного университета

ISBN 978-5-9775-0334-1

© Смирнов В. И., Смирнова Е. В., 2010
© Оформление, издательство "БХВ-Петербург", 2010

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие к I тому 24-го издания	6
--	---

ГЛАВА I ОПРЕДЕЛИТЕЛИ И РЕШЕНИЕ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ

§ 1. Определитель и его свойства	9
1. Понятие об определителе (9). 2. Перестановки (15). 3. Основные свойства определителя (21). 4. Вычисление определителя (27). 5. Примеры (29). 6. Теорема об умножении определителей (36). 7. Прямоугольные таблицы (40).	
§ 2. Решение систем уравнений	44
8. Теорема Крамера (44). 9. Общий случай систем уравнений (47). 10. Однородные системы (52). 11. Линейные формы (55). 12. n -мерное векторное пространство (58). 13. Скалярное произведение (65). 14. Геометрическая интерпретация однородных систем (68). 15. Случай неоднородной системы (71). 16. Определитель Грамма. Неравенство Адамара (74). 17. Системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами (79). 18. Функциональные определители (84). 19. Неявные функции (88).	

ГЛАВА II ЛИНЕЙНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ И КВАДРАТИЧНЫЕ ФОРМЫ

§ 3. Линейные преобразования	93
20. Преобразование координат в трехмерном пространстве (93). 21. Общие линейные преобразования вещественного трехмерного пространства (98). 22. Ковариантные и контравариантные аффинные векторы (107). 23. Понятие тензора (110). 24. Примеры аффинных ортогональных тензоров (113). 25. Случай n -мерного комплексного пространства (116). 26. Основы матричного исчисления (121). 27. Характеристические числа матриц и приведение матриц к каноническому виду (128). 28. Унитарные и ортогональные преобразования (135). 29. Неравенство Коши—Буняковского (141). 30. Свойства	

скалярного произведения и нормы (143). 31. Процесс ортогонализации векторов (145).

§ 4. Квадратичные формы 147

32. Преобразование квадратичной формы к сумме квадратов (147). 33. Случай кратных корней характеристического уравнения (153). 34. Примеры (159). 35. Классификация квадратичных форм (161). 36. Формула Якоби (166). 37. Одновременное приведение двух квадратичных форм к сумме квадратов (167). 38. Малые колебания (170). 39. Экстремальные свойства собственных значений квадратичной формы (172). 40. Эрмитовские матрицы и формы Эрмита (175). 41. Коммутирующие эрмитовские матрицы (182). 42. Приведение унитарных матриц к диагональной форме (185). 43. Матрицы проектирования (190). 44. Функции от матриц (195). 45. Пространство с бесчисленным множеством измерений (199). 46. Сходимость векторов (206). 47. Ортонормированные системы (212). 48. Линейные преобразования с бесчисленным множеством переменных (216). 49. Функциональное пространство L_2 (221). 50. Связь между пространствами l_2 и L_2 (222). 51. Линейные операторы в L_2 (224).

ГЛАВА III

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ГРУПП И ЛИНЕЙНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГРУПП

§ 5. Основы общей теории групп 230

52. Группы линейных преобразований (230). 53. Группы правильных многогранников (234). 54. Преобразования Лоренца (238). 55. Перестановки (246). 56. Абстрактные группы (252). 57. Подгруппа (256). 58. Классы и нормальный делитель (260). 59. Примеры (264). 60. Изоморфные и гомоморфные группы (267). 61. Примеры (269). 62. Стереографическая проекция (271). 63. Унитарная группа и группа движения (273). 64. Общая линейная группа и группа Лоренца (280).

§ 6. Линейные представления групп 285

65. Представление группы линейными преобразованиями (285). 66. Основные теоремы (291). 67. Абелевы группы и представления первого порядка (296). 68. Линейные представления унитарной группы с двумя переменными (299). 69. Линейные представления группы вращения (307). 70. Теорема о простоте группы вращения (311). 71. Уравнение Лапласа и линейные представления группы вращения (313). 72. Прямое произведение матриц (320). 73. Композиция двух линейных представлений группы (323). 74. Прямое произведение групп и его линейные представления (326). 75. Разбиение композиции $D_j \times D_j$, линейных представлений группы вращения (330).

76. Свойство ортогональности (338). 77. Характеры (342). 78. Регулярное представление группы (347). 79. Примеры представления конечных групп (349). 80. Представления линейной группы с двумя переменными (351). 81. Теорема о простоте группы Лоренца (356).

§ 7. Непрерывные группы	358
82. Непрерывные группы. Структурные постоянные (358). 83. Бесконечно малые преобразования (363). 84. Группа вращения (368). 85. Бесконечно малые преобразования и представления группы вращения (370). 86. Представления группы Лоренца (375). 87. Вспомогательные формулы (378). 88. Построение группы по структурным постоянным (381). 89. Интегрирование на группе (383). 90. Свойство ортогональности. Примеры (389).	

ПРЕДИСЛОВИЕ

к I тому 24-го издания

В чем притягательная сила этого энциклопедического учебника, который выдерживает испытание временем уже более семидесяти лет, переведен на множество языков мира, ссылки на который имеются в научных публикациях самого последнего времени?

Прежде всего это основополагающая идея, выдвинутая выдающимися учеными, академиками В. А. Фоком и В. И. Смирновым, работавшими на физическом факультете Ленинградского университета. Она состояла в том, что для студентов физиков и, даже шире, для естествоиспытателей и инженеров, требуется совсем иное содержание и стиль изложения математики, чем для студентов математиков. Формализованный стиль, основанный на чередовании определений, лемм и теорем, и доведение условий до предельно общих за счет громоздкости доказательства представляется ненужным мышлению физика, использующего эмпирический подход чаще, чем дедуктивный.

Второй составляющей успеха представляемой книги был непревзойденный педагогический дар Владимира Ивановича. До преклонных лет он был одним из любимейших лекторов на физическом факультете. Книги, написанные им, читаются просто и увлекательно, даже те страницы, где проводятся громоздкие вычисления. И все это с сохранением достаточной строгости изложения.

Третьим важным моментом является энциклопедический охват материала. Курс включает как общие разделы математики, чита-

емые для физиков, химиков, инженеров и т. д., так и более специализированные разделы, например, теорию групп или теорию специальных функций.

При написании раздела по теории групп значительную помощь ему оказал мой отец член-корреспондент Д. К. Фаддеев. В последнем томе курса впервые в советской математике было дано изложение функционального анализа. Часть разделов, связанных с функциональным анализом, была доработана после смерти В. И. Смирнова академиком О. А. Ладыженской.

Несколько слов надо сказать о личности Владимира Ивановича. Он был очень скромным, открытым человеком, никогда не требовавшим от университетского начальства ни отдельного кабинета, ни личной секретарши. Однако он был тверд и решителен, когда выступал в защиту гонимых по тем или иным причинам математиков, когда отстаивал научные принципы университетского образования. Ту же О. А. Ладыженскую он неоднократно спасал от административного произвола, сохранив для математики выдающегося ученого. Авторитет Владимира Ивановича как в Ленинградском математическом сообществе, так и в мировой науке был чрезвычайно высок.

До сих пор курс В. И. Смирнова используется как основное учебное пособие на физическом факультете Санкт-Петербургского государственного университета. На младших курсах одним из лекторов по высшей математике была Е. А. Гринина, которая и подготовила данное переиздание к печати.

академик РАН *Л. Д. Фаддеев*

Общая цель сделанных комментариев состоит в том, чтобы упростить современному студенту использование данной книги и как единого учебного пособия, и как справочного материала при работе с другими изданиями. Мною отмечена устаревшая терминология, даны замечания по поводу опущенных вычислений. Также сделаны некоторые замечания, связанные с методикой изложения

материала, отличающейся от принятой в большинстве современных лекционных курсов. В ходе работы были исправлены опечатки, допущенные в предыдущем издании.

канд. физ.-мат. наук *Е. А. Гринина*

ГЛАВА I

ОПРЕДЕЛИТЕЛИ И РЕШЕНИЕ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ

§ 1. ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ И ЕГО СВОЙСТВА

1. Понятие об определителе. Мы начнем настоящий параграф с решения простой алгебраической задачи, а именно задачи о решении систем уравнений первой степени. Рассмотрение этой задачи приведет нас к важному понятию об определителе.

Начнем с рассмотрения наиболее простых частных случаев. Возьмем сначала систему двух уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{aligned}a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2.\end{aligned}$$

Коэффициенты при неизвестных a_{ik} снабжены двумя значками, первый из которых указывает, в каком уравнении находится этот коэффициент, а второй значок указывает, при каком из неизвестных он стоит.

Решение написанной системы, как известно, имеет вид

$$x_1 = \frac{b_1 a_{22} - a_{12} b_2}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}}; \quad x_2 = \frac{a_{11} b_2 - b_1 a_{21}}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}}.$$

Возьмем теперь три уравнения с тремя неизвестными:

$$\begin{aligned}a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2,\end{aligned}$$

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3,$$

причем мы пользуемся прежними обозначениями для коэффициентов. Перепишем первые два уравнения в виде

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 - a_{13}x_3, \quad a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 - a_{23}x_3.$$

Решая их относительно неизвестных x_1 и x_2 по предыдущим формулам, будем иметь

$$x_1 = \frac{(b_1 - a_{13}x_3)a_{22} - a_{12}(b_2 - a_{23}x_3)}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}};$$

$$x_2 = \frac{a_{11}(b_2 - a_{23}x_3) - (b_1 - a_{13}x_3)a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}.$$

Подставляя эти выражения в последнее уравнение системы, получим уравнение для определения неизвестного x_3 и, наконец, решая это уравнение, будем иметь окончательное выражение для этого неизвестного:

$$x_3 =$$

$$= \frac{a_{11}a_{22}b_3 + a_{12}b_2a_{31} + b_1a_{21}a_{32} - a_{11}b_2a_{32} - a_{12}a_{21}b_3 - b_1a_{22}a_{31}}{a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}}.$$

(1)

Рассмотрим подробно конструкцию этого выражения. Заметим прежде всего, что его числитель может быть получен из знаменателя простой заменой коэффициентов a_{i3} при определяемом неизвестном свободными членами b_i . Таким образом, остается выяснить закон образования знаменателя, который не содержит уже свободных членов и составлен исключительно из коэффициентов нашей системы. Запишем эти коэффициенты в виде квадратной таблицы, сохраняя тот порядок, в котором они стоят в самой системе

$$\left\| \begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array} \right\|.$$

(2)

Написанная таблица содержит три строки и три столбца. Числа a_{ik} называются ее элементами. Первый из значков показывает, в

какой строке стоит этот элемент, а второй значок указывает номер столбца. Выпишем теперь знаменатель выражения (1):

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}. \quad (3)$$

Как мы видим, он состоит из шести членов, и каждый его член есть произведение трех элементов таблицы (2), причем в этом произведении участвуют элементы каждой строки и каждого столбца. Действительно, эти произведения имеют вид

$$a_{1p}a_{2q}a_{3r}, \quad (4)$$

где p, q, r суть целые числа 1, 2, 3, расставленные в некотором определенном порядке. Таким образом, как первые, так и вторые знаки представляют собою совокупность целых чисел 1, 2, 3, и произведения (4) действительно содержат по одному элементу из каждой строки и из каждого столбца. Чтобы получить все члены выражения (3), надо в произведении (4) взять вторые значки p, q, r в различных возможных порядках. Таких возможных перестановок из вторых значков будет, очевидно, шесть:

$$1, 2, 3; \quad 2, 3, 1; \quad 3, 1, 2; \quad 1, 3, 2; \quad 2, 1, 3; \quad 3, 2, 1, \quad (5)$$

и мы получаем, таким образом, все шесть членов выражения (3). Но мы видим, что некоторые из произведений (4) входят в выражение (3) со знаком плюс, а другие со знаком минус, и остается лишь выяснить то правило, согласно которому надо выбирать знак. Со знаком плюс, как мы видим, входят те произведения (4), у которых вторые значки образуют следующие перестановки:

$$1, 2, 3; \quad 2, 3, 1; \quad 3, 1, 2, \quad (5_1)$$

а со знаком минус входят те произведения, вторые значки которых образуют перестановки:

$$1, 3, 2; \quad 2, 1, 3; \quad 3, 2, 1. \quad (5_2)$$

Выясним теперь, чем перестановки (5₁) отличаются от перестановок (5₂). Назовем беспорядком в перестановке тот факт, что

большее число стоит впереди меньшего, и подсчитаем число беспорядков в перестановках (5_1) . В первой из этих перестановок беспорядков вовсе нет, т. е. число беспорядков равно нулю. Перейдем ко второй перестановке и сравним по величине каждое из чисел, в нее входящих, со всеми следующими. Мы видим, что здесь имеются два беспорядка, а именно число 2 стоит перед числом 1 и число 3 стоит перед числом 1. Точно так же нетрудно убедиться, что и третья из перестановок (5_1) содержит два беспорядка. Одним словом, можно сказать, что все перестановки (5_1) содержат четное число беспорядков. Совершенно так же исследуя перестановки (5_2) , мы убеждаемся, что все они содержат нечетное число беспорядков. Мы можем теперь формулировать правило знаков в выражении (3), а именно: те произведения (4), в которых число беспорядков в перестановке, образованной вторыми значками, есть число четное, входят в выражение (3) без всякого изменения. Те же произведения (4), у которых перестановки, образованные вторыми значками, содержат нечетное число беспорядков, входят в выражение (3) с приписанным к ним знаком минус. Выражение (3) называется *определителем третьего порядка*, соответствующим таблице чисел (2). Нетрудно теперь обобщить предыдущее на случай определителей любого порядка.

Пусть имеется n^2 чисел, расставленных в виде квадратной таблицы, имеющей n строк и n столбцов:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}. \quad (6)$$

Элементы этой таблицы a_{ik} суть заданные комплексные числа, причем значки i и k указывают номер строки и столбца, на пересечении которых стоит число a_{ik} . Составим всевозможные произведения из чисел таблицы (6) так, чтобы эти произведения содержали по одному числу из каждой строки и из каждого столбца. Эти произведения будут иметь вид

$$a_{1p_1} a_{2p_2} \dots a_{np_n}, \quad (7)$$

где $p_1, p_2, \dots, p_n$ суть числа $1, 2, \dots, n$, расставленные в некотором порядке. Чтобы получить всевозможные произведения вида

(7), нам надо взять всевозможные перестановки вторых значков. Как известно из элементарной алгебры, число таких перестановок будет равно факториалу целого числа n :

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n = n!$$

Каждая из этих перестановок будет иметь некоторое число беспорядков по сравнению с основной перестановкой

$$1, 2, 3, \dots, n.$$

Те произведения вида (7), вторые значки которых образуют перестановку с четным числом беспорядков, возьмем без всякого изменения, а к тем произведениям вида (7), у которых перестановка вторых значков имеет нечетное число беспорядков, припишем знак минус. Сумма всех полученных таким образом произведений и называется *определителем n -го порядка*, соответствующим таблице (6). Эта сумма будет, очевидно, содержать $n!$ слагаемых. Нетрудно представить это определение в виде формулы. Введем для этого некоторое обозначение. Пусть $p_1, p_2, \dots, p_n$ — некоторая перестановка из чисел $1, 2, \dots, n$. Обозначим число беспорядков в этой перестановке символом

$$[p_1, p_2, \dots, p_n].$$

Тогда данное выше определение определителя, соответствующего таблице (6), может быть записано в виде следующей формулы, причем для обозначения определителя мы пишем таблицу (6) между вертикальными чертами:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{p_1, p_2, \dots, p_n} (-1)^{[p_1, p_2, \dots, p_n]} a_{1p_1} a_{2p_2} \dots a_{np_n}. \quad (8)$$

Здесь суммирование распространяется на всевозможные перестановки вторых значков, т.е. на всевозможные перестановки $(p_1, p_2, \dots, p_n)$. Говоря о таблице как таковой, а не об определителе, из нее составленном, мы ставим эту таблицу между двойными вертикальными чертами.

Заметим, что в выражении (3) мы в каждом произведении ставили сомножители в таком порядке, чтобы первые значки образовывали основную перестановку 1, 2, 3, и таким образом все наши рассуждения относились к перестановкам, образуемым вторыми значками. Можно, наоборот, поставить в каждом произведении сомножители так, чтобы вторые значки всегда шли в возрастающем порядке; при этом выражение (3) переписется в виде

$$a_{11}a_{22}a_{33} - a_{31}a_{12}a_{23} - a_{21}a_{32}a_{13} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{31}a_{22}a_{13}. \quad (9)$$

Здесь первые значки образуют всевозможные перестановки p, q, r , причем легко проверить, что правило знаков у членов выражения (9) может быть сформулировано совершенно так же, как и выше, но только по отношению к первым значкам. Это приводит нас к тому, чтобы наряду с суммой (8) рассматривать аналогичную сумму вида

$$\sum_{p_1, p_2, \dots, p_n} (-1)^{[p_1, p_2, \dots, p_n]} a_{p_1}^1 a_{p_2}^2 \dots a_{p_n}^n. \quad (10)$$

Очевидно, что эта последняя сумма состоит из тех же членов, что и сумма (8). В дальнейшем мы увидим, что и знаки ее членов такие же, как и в сумме (8), т. е. так же, как и при $n = 3$, сумма (10) совпадает с суммой (8).

Обратимся, наконец, к случаю $n = 2$. При этом таблица имеет вид

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

и формула (8) дает следующее выражение для определителя второго порядка, соответствующего этой таблице:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \quad (11)$$

Из предыдущего непосредственно следует, что для выяснения свойств определителя необходимо познакомиться ближе со свойствами перестановок, к чему мы сейчас и переходим.

2. Перестановки. Пусть имеется n каких-нибудь элементов, расставленных в определенном порядке. Назовем это *перестановкой*, образованной из наших элементов. Докажем прежде всего, что таких различных перестановок будет $n!$. При $n = 2$ это очевидно, ибо два элемента могут образовывать две различные перестановки. При $n = 3$ это непосредственно следует из подсчета перестановок (5), где роль элементов играют числа 1, 2, 3. Без труда можно убедиться, что (5) дают всевозможные перестановки из этих трех элементов. Докажем наше утверждение при любом целом n по закону индукции. Предполагая, что наше утверждение справедливо при некотором n , докажем, что оно справедливо и для числа элементов $(n + 1)$. Положим, что n элементов дают $n!$ перестановок, и рассмотрим какие-нибудь $(n + 1)$ элементов, которые обозначим

$$C_1, C_2, \dots, C_{n+1}.$$

Обратим сначала внимание на те перестановки, у которых первым элементом будет C_1 . Чтобы получить всевозможные такие перестановки, надо поставить на первое место C_1 , а затем писать всевозможные перестановки из оставшихся n элементов, и число таких перестановок будет по предположению равно $n!$. Таким образом, число перестановок из элементов C_k , начинающихся с элемента C_1 , будет равно $n!$. Совершенно так же число перестановок из элементов C_k , начинающихся с элемента C_2 , будет равно также $n!$. В общем, число различных перестановок из элементов C_k будет:

$$n! \cdot (n + 1) = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n \cdot (n + 1) = (n + 1)!,$$

что и требовалось доказать.

Мы можем, конечно, считать, что за элементы взяты целые числа, начиная с единицы, чего мы и будем придерживаться в дальнейшем. Назовем *транспозицией операцию, которая состоит в том, что в некоторой перестановке мы меняем местами два элемента*. Непосредственно очевидно, что из всякой перестановки мы можем получить всякую другую перестановку, совершая несколько транспозиций. Например, возьмем две перестановки из четырех элементов

$$1, 3, 4, 2, \quad 2, 4, 1, 3.$$

Можно перейти от первой из этих перестановок ко второй при помощи транспозиций путем следующего перехода:

$$1, 3, 4, 2 \rightarrow 2, 3, 4, 1 \rightarrow 2, 4, 3, 1 \rightarrow 2, 4, 1, 3.$$

Здесь нам понадобились три транспозиции, чтобы перейти от первой перестановки ко второй. Если бы мы совершали транспозиции иным образом, то мы могли бы и другим путем перейти от первой перестановки ко второй при помощи транспозиций, т. е., иначе говоря, число транспозиций, необходимых для перехода от одной перестановки к другой, не есть строго определенное число. Можно переходить от одной перестановки к другой при помощи различного числа транспозиций. Но для нас будет существенным доказать, что эти различные числа для двух заданных перестановок будут всегда или все четные или все нечетные. Иначе это выражают, говоря, что эти числа всегда одинаковой четности. Чтобы выяснить это, введем понятие о беспорядке, которым мы уже пользовались в предыдущем номере. Пусть имеются перестановки из n элементов $1, 2, \dots, n$. Назовем *основной перестановкой* ту перестановку

$$1, 2, \dots, n, \tag{12}$$

в которой числа идут возрастающим порядком. Назовем беспорядком в некоторой перестановке тот факт, когда два элемента этой перестановки следуют не в том порядке, в каком они стоят в основной перестановке (12), т. е., иначе говоря, когда большее число стоит левее меньшего. Назовем *перестановками первого класса* те перестановки, в которых число беспорядков есть число четное, и *перестановками второго класса* — те, где это число есть число нечетное. Основным для дальнейшего будет следующая теорема:

Транспозиция меняет число беспорядков на число нечетное.

Возьмем некоторую перестановку

$$a, b, \dots, k, \dots, p, \dots, s \tag{13}$$

и положим, что мы применяем к этой перестановке транспозиции по отношению к элементам k и p , т. е. меняем эти два элемента взаимно местами. После такой транспозиции взаимное расположение элементов k и p относительно элементов, стоящих левее k или

правее p , останется прежним. Изменится лишь взаимное расположение элементов k и p относительно тех элементов, которые стоят в перестановке между k и p , а также изменится, конечно, взаимное расположение элементов k и p одного относительно другого. Подсчитаем общее изменение числа беспорядков. Положим, что между элементами k и p в перестановке (13) стоит всего m элементов, и пусть эти средние элементы по сравнению с элементом k дают α порядков и β беспорядков, относительно же элемента p дают α_1 порядков и β_1 беспорядков. Имеем, очевидно:

$$\alpha + \beta = \alpha_1 + \beta_1 = m. \quad (14)$$

В результате транспозиции порядок перейдет в беспорядок, и наоборот, т. е., точнее говоря, если элемент k с некоторым средним элементом до транспозиции был в порядке, то после транспозиции он окажется в беспорядке, и наоборот, и то же самое для элемента p . Таким образом, общее число беспорядков у элементов k и p относительно средних элементов до транспозиции было $\beta + \beta_1$ и после транспозиции $\alpha + \alpha_1$, т. е. изменение числа беспорядков будет:

$$\gamma = (\alpha + \alpha_1) - (\beta + \beta_1).$$

Пользуясь (14), мы можем переписать это число в виде

$$\gamma = (\alpha + \alpha_1) - (m - \alpha + m - \alpha_1) = 2(\alpha + \alpha_1 - m),$$

откуда непосредственно следует, что это число γ будет четным. Остается обратить внимание на взаимное расположение самих элементов k и p . Если до транспозиции они образовывали порядок, то после они образуют беспорядок, и наоборот, т. е. здесь изменение числа беспорядков равно единице, и таким образом общее изменение числа беспорядков, происшедших от транспозиции, будет числом нечетным.

Выясним некоторые следствия, вытекающие из доказанной теоремы.

Следствие I. Если выписать все $n!$ перестановок и в каждой из них произвести транспозицию двух определенных элементов, например элементов 1 и 3, то все перестановки первого класса станут

перестановками второго класса, и наоборот; а в общем получится опять вся совокупность $n!$ перестановок. Отсюда непосредственно следует, что число перестановок первого и второго классов одинаково.

Следствие II. Всякая перестановка может быть получена из основной путем транспозиций. Из доказанной теоремы непосредственно следует, что *первый класс образуют те перестановки, которые получаются из основной путем четного числа транспозиций, а второй класс — те перестановки, которые получаются из основной путем нечетного числа транспозиций.*

Следствие III. Выбор основной перестановки совершенно произволен. Мы могли бы вместо перестановки (12) выбрать за основную какую-нибудь другую перестановку, при этом, конечно, при определении беспорядков надо сравнивать перестановку с основной, т. е. исходить из того порядка элементов, в котором они стоят в основной перестановке. Нетрудно видеть, что если мы возьмем вместо перестановки (12) за основную перестановку какую-нибудь из перестановок первого класса, то перестановки первого класса останутся по-прежнему перестановками первого класса, а перестановки второго класса останутся перестановками второго класса. Наоборот, если мы за основную перестановку возьмем какую-нибудь перестановку второго класса, то перестановки второго класса станут перестановками первого класса, и перестановки первого класса станут перестановками второго класса.

Например, если в шести перестановках из элементов 1, 2, 3 мы примем за основную перестановку 2, 1, 3, то перестановками первого класса будут перестановки:

$$2, 1, 3; \quad 1, 3, 2; \quad 3, 2, 1.$$

Во второй из этих перестановок мы имеем два беспорядка: 1 стоит перед 2 и 3 перед 2, а в основной 2 стоит перед 1 и 2 перед 3. Перестановками второго класса будут перестановки:

$$1, 2, 3; \quad 2, 3, 1; \quad 3, 1, 2.$$

В первой из этих перестановок мы имеем один беспорядок по сравнению с основной 2, 1, 3, а именно 1 стоит перед 2.

Принимая во внимание сказанное выше, мы можем формулировать правило знаков в выражении (8) следующим образом: *мы пишем перед произведением знак плюс, если перестановка из вторых значков принадлежит первому классу, и знак минус, если перестановка из вторых значков принадлежит второму классу, причем за основную перестановку принята перестановка 1, 2, ..., n.*

Выясним теперь одно из основных свойств определителя. Переставим в таблице, дающей определитель, первый и второй столбцы. Числа, которые мы раньше обозначали через a_{ik} , мы по-прежнему будем обозначать этими же буквами с теми же самыми значками. Вместо таблицы (6) будем иметь таблицу:

$$\left\| \begin{array}{ccccc} a_{12} & a_{11} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{22} & a_{21} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n2} & a_{n1} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{array} \right\|. \quad (15)$$

Мы можем теперь, пользуясь определением, выражаемым формулой (8), составить определитель, соответствующий таблице (15). В этой таблице столбцы пронумерованы в следующем порядке: 2, 1, 3, ..., n, и эту перестановку мы должны считать за основную. Она получилась из прежней основной при помощи одной транспозиции и, следовательно, раньше принадлежала ко второму классу. Таким образом, прежние перестановки второго класса станут при новом выборе основной перестановки перестановками первого класса, и наоборот. Следовательно, определитель, соответствующий таблице (15), будет суммой тех же слагаемых, которые стоят в формуле (8), но вследствие указанного только что изменения в распределении перестановок вторых значков по классам знаки у членов новой суммы будут противоположны знакам слагаемых суммы (8), т. е. *при перестановке двух столбцов величина определителя меняет знак.* Мы доказали это свойство, переставляя первый и второй столбцы. Точно такое же доказательство годится и при перестановке двух любых столбцов. Так, например, имеет место формула

$$\left| \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 7 & 6 \\ 5 & 3 & 0 \end{array} \right| = - \left| \begin{array}{ccc} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 6 & 7 \\ 5 & 0 & 3 \end{array} \right|.$$

Второй определитель получается из первого перестановкой второго и третьего столбцов.

Выясним еще одно свойство определителя. Возьмем некоторое слагаемое суммы (8):

$$(-1)^{[p_1, p_2, \dots, p_n]} a_{1p_1} a_{2p_2} \dots a_{np_n}. \quad (16_1)$$

Переставляя порядок сомножителей, мы можем привести в полный порядок вторые значки, но при этом первые значки будут образовывать некоторую перестановку $q_1, q_2, \dots, q_n$, и предыдущее выражение запишется в виде

$$(-1)^{[p_1, p_2, \dots, p_n]} a_{q_1}^1 a_{q_2}^2 \dots a_{q_n}^n. \quad (16_2)$$

Переход от (16₁) к (16₂) можно совершить при помощи нескольких транспозиций сомножителей. Всякая такая транспозиция будет одновременно транспозицией в перестановке как первых, так и вторых значков. Если число необходимых транспозиций для перехода от (16₁) к (16₂) будет четным, то отсюда будет следовать, что перестановка $p_1, p_2, \dots, p_n$ принадлежит первому классу, так как она переходит в основную $1, 2, \dots, n$ при помощи четного числа транспозиций и, следовательно, очевидно, может быть получена из основной также при помощи четного числа транспозиций. Но при этом и перестановка $q_1, q_2, \dots, q_n$ принадлежит к первому классу, так как она одновременно получается из основной при помощи того же четного числа транспозиций. Точно так же, если $p_1, p_2, \dots, p_n$ принадлежит второму классу, то и $q_1, q_2, \dots, q_n$ принадлежит второму классу. Отсюда следует, что $(-1)^{[p_1, p_2, \dots, p_n]} = (-1)^{[q_1, q_2, \dots, q_n]}$, и, следовательно, мы можем написать:

$$(-1)^{[p_1, p_2, \dots, p_n]} a_{1p_1} a_{2p_2} \dots a_{np_n} = (-1)^{[q_1, q_2, \dots, q_n]} a_{q_1}^1 a_{q_2}^2 \dots a_{q_n}^n.$$

Итак, если мы сравним соответствующие слагаемые в суммах (8) и (10), то увидим, что эти суммы в точности совпадают. В сумме (10) строки играют ту же роль, что столбцы в сумме (8), и из наших рассуждений непосредственно следует, что *если в таблице заменить все строки столбцами и столбцы строками, не меняя их порядка, то величина определителя от этого не изменится.*

Так, например, мы имеем равенство следующих двух определителей третьего порядка:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 7 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 7 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 6 \end{vmatrix}.$$

3. Основные свойства определителя. I. Формулируем прежде всего только что доказанное свойство — *величина определителя не меняется при замене строк столбцами*. В дальнейшем все, что будет доказано для столбцов, будет годиться и для строк, и наоборот.

II. В предыдущем номере мы видели, что перестановка двух столбцов меняет лишь знак у определителя, то же относится и к строкам, т. е. *при перестановке двух строк (столбцов) между собой величина определителя меняет лишь знак*.

III. Если определитель имеет две одинаковые строки, то, переставляя их, мы, с одной стороны, ничего не изменим, а с другой стороны, по доказанному переменим знак определителя, т. е., обозначая через Δ величину определителя, $\Delta = -\Delta$ или $\Delta = 0$. Итак, *определитель с двумя одинаковыми строками (столбцами) равен нулю*.

IV. Линейной однородной функцией переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$ называется полином первой степени этих переменных без свободного члена, т. е. выражение вида

$$\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) = a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n,$$

где коэффициенты a_i не зависят от x_s . Такая функция обладает двумя очевидными свойствами:

$$\varphi(kx_1, kx_2, \dots, kx_n) = k\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

$$\varphi(x_1+y_1, x_2+y_2, \dots, x_n+y_n) = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) + \varphi(y_1, y_2, \dots, y_n).$$

Последнее свойство имеет место и для любого числа слагаемых. Обращаясь к формуле (8), мы видим, что каждое слагаемое написанной суммы содержит множителем один и только один элемент из

каждой строки. Отсюда следует, что *определитель есть линейная однородная функция элементов какой-нибудь строки (или какого-нибудь из столбцов).*

Следовательно, *если все элементы некоторой строки (столбца) содержат общий множитель, то его можно вынести за знак определителя.*

Величина определителя, соответствующего таблице (6), часто обозначается, как мы уже указывали выше, в виде

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

или более коротко:

$$|a_{ik}| \quad (i, k = 1, 2, \dots, n).$$

Доказанное свойство можно в частном случае записать, например, в виде

$$\begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Второе из указанных свойств линейных однородных функций дает следующее свойство определителя: *если элементы некоторой строки (столбца) суть суммы равного числа слагаемых, то определитель равен сумме определителей, в которых элементы упомянутой строки (столбца) заменены отдельными слагаемыми.* Так, например:

$$\begin{vmatrix} a & b & c + c' \\ d & e & f + f' \\ g & h & i + i' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c' \\ d & e & f' \\ g & h & i' \end{vmatrix}.$$

Отметим еще одно очевидное следствие линейности и однородности. *Если все элементы некоторой строки (столбца) равны нулю, то и определитель равен нулю.*

V. Если из таблицы (6) вычеркнуть i -ю строку и k -й столбец, на пересечении которых находится элемент a_{ik} , то останется $(n - 1)$ строк и столько же столбцов. Соответствующий определитель $(n - 1)$ -го порядка называется *минором* основного определителя n -го порядка, соответствующим элементу a_{ik} . Обозначим его через Δ_{ik} и составим произведение

$$A_{ik} = (-1)^{i+k} \Delta_{ik} \quad (17)$$

и назовем его *алгебраическим дополнением* элемента a_{ik} . Покажем теперь, что эти алгебраические дополнения являются коэффициентами той линейной однородной функции, о которой мы говорили в предыдущем свойстве, т. е., что для любой i -й строки имеет место формула

$$\Delta = A_{i1}a_{i1} + A_{i2}a_{i2} + \dots + A_{in}a_{in} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (18)$$

и для любого k -го столбца — формула

$$\Delta = A_{1k}a_{1k} + A_{2k}a_{2k} + \dots + A_{nk}a_{nk} \quad (k = 1, 2, \dots, n), \quad (19)$$

где Δ — величина определителя. Иначе говоря, мы должны показать, что если в сумме (8) мы соберем все члены, содержащие некоторый определенный элемент a_{ik} , то коэффициентом при этом элементе будет его алгебраическое дополнение A_{ik} , определяемое формулой (17). Обозначим предварительно этот коэффициент через B_{ik} и заметим прежде всего, что этот коэффициент представляет собой сумму произведений из $(n - 1)$ элементов, причем эти произведения не содержат уже элементов i -й строки и k -го столбца.

Возьмем сначала случай $i = k = 1$ и выпишем те слагаемые суммы (8), которые содержат элемент a_{11} :

$$a_{11} \sum_{(p_2, \dots, p_n)} (-1)^{[1, p_2, \dots, p_n]} a_{2p_2} \dots a_{np_n}.$$

Здесь суммирование должно распространяться на всевозможные перестановки $p_2, p_3, \dots, p_n$ из чисел $2, 3, \dots, n$. В полной перестановке $1, p_2, \dots, p_n$ первый элемент единица по отношению ко

всем следующим находится в порядке, а потому для числа беспорядков мы имеем:

$$[1, p_2, \dots, p_n] = [p_2, \dots, p_n],$$

причем за основную перестановку в обоих случаях берется та, где числа идут в возрастающем порядке. Мы имеем, таким образом, следующее выражение для коэффициента при a_{11} :

$$B_{11} = \sum_{(p_2, p_1, \dots, p_n)} (-1)^{[p_2, \dots, p_n]} a_{2p_2} \dots a_{np_n}.$$

Эта сумма подходит под определение определителя, но только по сравнению с исходным определителем отсутствуют первая строка и первый столбец. Отсюда видно, что $B_{11} = \Delta_{11} = (-1)^{1+1} \Delta_{11} = A_{11}$, т. е. при $i = k = 1$ наше утверждение доказано. Перейдем к случаю любых i и k . Будем переставлять i -ю строку постепенно с более высокими строками так, чтобы она попала на место первой строки. Для этого придется сделать $(i-1)$ перестановок строк. Совершенно так же постепенной перестановкой приведем k -й столбец на место первого столбца. После этих перестановок элемент a_{ik} попадет в левый верхний угол на место элемента a_{11} . Строка с номером i и столбец с номером k окажутся на первом месте, а порядок остальных строк и столбцов не изменится. Полученный выше результат показывает, что после упомянутых перестановок коэффициент при a_{ik} будет равен Δ_{ik} . Но нам пришлось применить $(i-1) + (k-1)$ перестановок строк и столбцов попарно, и каждая такая перестановка добавляет множитель (-1) к определителю, т. е., в общем, мы добавили множитель $(-1)^{(i-1)+(k-1)} = (-1)^{i+k}$, и, следовательно, окончательное выражение для коэффициента B_{ik} будет

$$B_{ik} = \frac{\Delta_{ik}}{(-1)^{i+k}} = (-1)^{i+k} \Delta_{ik} = A_{ik},$$

что и требовалось доказать. Таким образом мы доказали формулы (18) и (19). Если мы в определителе Δ заменим элементы i -й строки последовательно некоторыми числами $c_1, c_2, \dots, c_n$, не меняя остальных строк, то в формуле (18) множители A_{is} не изменятся,

и величина нового определителя будет:

$$\Delta' = A_{i1}c_1 + A_{i2}c_2 + \dots + A_{in}c_n. \quad (20)$$

В частности, если мы возьмем числа $c_1, c_2, \dots, c_n$ равными элементам $a_{j1}, a_{j2}, \dots, a_{jn}$ другой строки с номером j , отличным от i , то определитель Δ' будет иметь две одинаковые строки i -ю и j -ю, и его величина будет равна нулю: $\Delta' = 0$, т. е.

$$A_{i1}a_{j1} + A_{i2}a_{j2} + \dots + A_{in}a_{jn} = 0 \quad (i \neq j). \quad (21_1)$$

Точно так же для столбцов:

$$A_{1k}a_{1l} + A_{2k}a_{2l} + \dots + A_{nk}a_{nl} = 0 \quad (k \neq l). \quad (21_2)$$

Формулы (19) и $(21_1, 21_{1,2})$ приводят нас к следующему важному в дальнейшем свойству определителя.

Если элементы некоторой строки (столбца) умножить на их алгебраические дополнения и эти произведения сложить, то получится величина определителя. Если же элементы некоторой строки (столбца) умножить на алгебраические дополнения соответствующих элементов другой строки (столбца) и эти произведения сложить, то сумма будет равна нулю.

VI. Прибавим к элементам первой строки определителя Δ элементы второй строки, умноженные на некоторый множитель p . Элементы первой строки станут равными $a_{1s} + pa_{2s}$ ($s = 1, 2, \dots, n$), и в силу свойства IV новый определитель будет суммой двух определителей: прежнего определителя и второго определителя, у которого первая строка состоит из элементов pa_{2s} ($s = 1, 2, \dots, n$), а остальные строки одинаковы с Δ . Вынося из первой строки p , получим одинаковые первую и вторую строки, и, следовательно, величина этого второго определителя равна нулю, т. е. вообще величина определителя не изменится, если к элементам некоторой строки (столбца) добавит соответствующие элементы другой строки (столбца), предварительно умножив эти последние на один и тот же множитель.

Укажем некоторые обозначения, которыми мы будем пользоваться в дальнейшем. Пусть, как и выше, имеется квадратная таблица чисел (6) и пусть l — целое положительное число, не большее,

чем n . Введем следующее обозначение определителя порядка l , составленного из строк таблицы (6) с номерами $p_1, p_2, \dots, p_l$ и столбцов с номерами $q_1, q_2, \dots, q_l$:

$$A \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & \dots & p_l \\ q_1 & q_2 & \dots & q_l \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{p_1 q_1} & a_{p_1 q_2} & \dots & a_{p_1 q_l} \\ a_{p_2 q_1} & a_{p_2 q_2} & \dots & a_{p_2 q_l} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{p_l q_1} & a_{p_l q_2} & \dots & a_{p_l q_l} \end{vmatrix}. \quad (22)$$

При этом обычно определителем первого порядка, соответствующим какому-либо числу a , называют само это число, т. е. $A \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = a_{pq}$. Последовательности целых положительных чисел $p_1, p_2, \dots, p_l$ и $q_1, q_2, \dots, q_l$ могут быть расположены и не в порядке возрастания чисел p_s и q_s . Если в обеих этих последовательностях числа идут в возрастающем порядке, то определитель (22) называется *минором* порядка l определителя (8). Этот определитель (22) получается из (8) вычеркиванием $(n - l)$ строк и $(n - l)$ столбцов. Пусть номера этих вычеркнутых строк и столбцов в возрастающем порядке суть: $r_1, r_2, \dots, r_{n-l}$ и $s_1, s_2, \dots, s_{n-l}$. Минор

$$A \begin{pmatrix} r_1 & r_2 & \dots & r_{n-l} \\ s_1 & s_2 & \dots & s_{n-l} \end{pmatrix}$$

называется минором, дополнительным к минору (22), а выражение

$$(-1)^{p_1+p_2+\dots+p_l+q_1+q_2+\dots+q_l} A \begin{pmatrix} r_1 & r_2 & \dots & r_{n-l} \\ s_1 & s_2 & \dots & s_{n-l} \end{pmatrix} \quad (22_1)$$

называется *алгебраическим дополнением* минора (22). Для отдельного элемента a_{ik} это определение алгебраического дополнения совпадает с прежним определением (17).

Алгебраическое дополнение (22₁) обозначим через

$$A' \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & \dots & p_l \\ q_1 & q_2 & \dots & q_l \end{pmatrix}.$$

Оно вполне определяется заданием определителя (22), т. е. заданием последовательностей номеров его строк $p_1, p_2, \dots, p_l$ и столбцов $q_1, q_2, \dots, q_l$.

Фиксируем номера строк. Величина определителя Δ является, очевидно, однородным полиномом степени l элементов этих строк, и она выражается, как можно доказать, формулой (теорема Лапласа):

$$\Delta = \sum_{q_1 < q_2 < \dots < q_l} A \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & \dots & p_l \\ q_1 & q_2 & \dots & q_l \end{pmatrix} A' \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & \dots & p_l \\ q_1 & q_2 & \dots & q_l \end{pmatrix}, \quad (23)$$

где суммирование проводится по всевозможным возрастающим последовательностям чисел $q_1, q_2, \dots, q_l$, взятых из последовательности $1, 2, \dots, n$. Число слагаемых в сумме (23) равно числу сочетаний из n элементов по l :

$$C_n^l = \frac{n(n-1)\dots(n-l+1)}{l!},$$

поскольку порядок чисел q_s не играет роли, ибо они берутся при составлении суммы (23) только в возрастающем порядке. При $l = 1$ мы имеем $A \begin{pmatrix} p_1 \\ q_1 \end{pmatrix} = a_{p_1 q_1}$, и формула (23) переходит в формулу (18) при $i = p_1$. Легко построить формулу, аналогичную (23) и соответствующую разложению Δ по элементам каких-либо выбранных столбцов. Мы не будем в дальнейшем пользоваться формулой (23) и не приводим ее доказательства.

4. Вычисление определителя. Вычисление определителя второго порядка очень просто. Согласно формуле (11) достаточно написать таблицу

$$\left\| \begin{array}{cc} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{array} \right\|$$

и взять произведение элементов, стоящих на диагонали, отмеченной сплошной чертой, с собственным знаком, и отмеченной пунктиром — с обратным знаком.

Перейдем к определителю третьего порядка. В раскрытом виде он записан нами в формуле (3). Нетрудно проверить, что его можно образовать следующим путем: выписываем таблицу, дающую определитель, и подписываем под ней еще раз первую и вторую строки. Будем иметь таблицу, содержащую шесть диагоналей, по три элемента в каждой.

Берем произведение элементов, стоящих на диагоналях, отмеченных сплошной чертой, без изменения и на диагоналях, отмеченных пунктиром, — со знаком минус. Сумма этих шести произведений и дает определитель (*правило Сарруса*).

$$\left| \begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array} \right|$$

Правило это не обобщается на определители более высокого порядка, и там приходится поступать иначе для сокращения вычислений. Полезно, например, пользоваться указанным в предыдущем номере свойством VI определителя. Выясним это на примере. Возьмем определитель четвертого порядка

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 5 \\ 1 & 7 & 4 & 2 \\ -3 & 5 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Умножаем третью строчку на (-2) и складываем со второй; кроме того, умножаем эту же строчку на 3 и складываем с четвертой и вычитаем из первой. Таким образом, в силу упомянутого свойства придем к определителю, равному вышенаписанному, причем этот определитель будет иметь в первом столбце три нуля:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & -16 & -11 & -6 \\ 0 & -13 & -4 & 1 \\ 1 & 7 & 4 & 2 \\ 0 & 26 & 13 & 7 \end{vmatrix}.$$

Отсюда, разлагая по элементам первого столбца, согласно формуле (19), получим:

$$\Delta = \begin{vmatrix} -16 & -11 & -6 \\ -13 & -4 & 1 \\ 26 & 13 & 7 \end{vmatrix}.$$

Умножаем третий столбец на 4 и складываем со вторым и затем умножаем его на 13 и складываем с первым. Получаем таким образом:

$$\Delta = \begin{vmatrix} -94 & -35 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \\ 117 & 41 & 7 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -94 & -35 \\ 117 & 41 \end{vmatrix} = 94 \cdot 41 - 35 \cdot 117 = -241.$$

5. Примеры. I. Пусть требуется вычислить объем параллелепипеда, три ребра которого, выходящих из одной вершины, суть векторы **A**, **B** и **C**. Как известно [II, 117], искомый объем выражается скалярным произведением вектора **A** на векторное произведение $(\mathbf{B} \times \mathbf{C})$:

$$V = \mathbf{A}(\mathbf{B} \times \mathbf{C}). \quad (24)$$

При этом объем получается со знаком плюс, если векторы **A**, **B**, **C** дают ту же ориентировку, что координатные оси, и со знаком минус, если упомянутые ориентировки различны. Составляющие векторного произведения равны

$$B_y C_z - B_z C_y, \quad B_z C_x - B_x C_z, \quad B_x C_y - B_y C_x,$$

и таким образом скалярное произведение, входящее в формулу (24), будет:

$$A_x(B_y C_z - B_z C_y) + A_y(B_z C_x - B_x C_z) + A_z(B_x C_y - B_y C_x).$$

Нетрудно видеть, что эта последняя сумма представляет собою определитель третьего порядка, т. е.

$$V = \begin{vmatrix} A_x & B_x & C_x \\ A_y & B_y & C_y \\ A_z & B_z & C_z \end{vmatrix}. \quad (25)$$

Равенство нулю этого определителя будет нам показывать, что объем равен нулю, иначе говоря, что наши три вектора компланарны, т. е. находятся в одной плоскости. Если мы в определителе переставим две строки (столбца), например первую и вторую, то этим самым порядок векторов **A**, **B**, **C** заменится другим порядком **B**, **A**, **C**, и если векторы в прежней последовательности давали ту же ориентировку, что координатные оси, то теперь они будут давать уже иную ориентировку, и наоборот. В соответствии с этим величина определителя изменит знак.

Если аналогичным образом в плоскости XY рассмотрим два вектора с составляющими (A_x, A_y) и (B_x, B_y) , то площадь параллелограмма, построенного на этих двух векторах, будет равна определителю второго порядка:

$$P = \begin{vmatrix} A_x & B_x \\ A_y & B_y \end{vmatrix}.$$