



**МОСКОВСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ГОРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ**

**РЕДАКЦИОННЫЙ
С О В Е Т**

**Председатель
Л.А. ПУЧКОВ**

**Зам. председателя
Л.Х. ГИТИС**

**Члены редсовета
И.В. ДЕМЕНТЬЕВ**

А.П. ДМИТРИЕВ

Б.А. КАРТОЗИЯ

В.В. КУРЕХИН

М.В. КУРЛЕНЯ

В.И. ОСИПОВ

Э.М. СОКОЛОВ

К.Н. ТРУБЕЦКОЙ

В.В. ХРОНИН

В.А. ЧАНТУРИЯ

Е.И. ШЕМЯКИН

**ИЗДАТЕЛЬСТВО
МОСКОВСКОГО
ГОСУДАРСТВЕННОГО
ГОРНОГО УНИВЕРСИТЕТА**

**ректор МГГУ,
чл.-корр. РАН**

**директор
Издательства МГГУ**

академик РАЕН

академик РАЕН

академик РАЕН

академик РАЕН

академик РАН

академик РАН

академик МАН ВШ

академик РАН

профессор

академик РАН

академик РАН

ВЫСШЕЕ ГОРНОЕ ОБРАЗОВАНИЕ

В.Я. Волк

КУРС ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

**для горно-экономических
специальностей бакалавриата**

Допущено Учебно-методическим объединением вузов Российской Федерации по образованию в области горного дела в качестве учебного пособия для студентов вузов, обучающихся по специальности «Экономика и управление на предприятии горной промышленности»

МОСКВА

**ИЗДАТЕЛЬСТВО
МОСКОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО
ГОРНОГО УНИВЕРСИТЕТА**

2 0 0 3



УДК 517
ББК 22.1
В 61

Рецензенты:

- д-р физ.-мат. наук, проф. *Ю.П. Пытьев* (Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова);
- д-р физ.-мат. наук, проф. *Э.М. Карташов* (Московская государственная академия тонкой химической технологии им. М.В. Ломоносова)

Волк В.Я.

В 61 Курс высшей математики для горно-экономических специальностей бакалавриата: Учебное пособие. — М.: Издательство Московского государственного горного университета, 2003. — Т. 1. — 324 с.: ил.

ISBN 5-7418-0240-0 (в пер.)

Основное содержание учебного пособия составляют линейная алгебра и дифференциальное исчисление. Кроме того, в пособии излагаются элементы алгебры, аналитической геометрии, линейного и нелинейного программирования, интегрального исчисления и теории обыкновенных дифференциальных уравнений.

Для студентов вузов, обучающихся по специальности «Экономика и управление на предприятии горной промышленности».

УДК 517
ББК 22.1

ISBN 5-7418-0240-0

© В.Я. Волк, 2003

© Издательство МГГУ, 2003

© Дизайн книги. Издательство
МГГУ, 2003

ЛОГИЧЕСКИЕ СИМВОЛЫ. МНОЖЕСТВА

1. ЛОГИЧЕСКИЕ СИМВОЛЫ

При изложении материала в этой книге используются символы математической логики

$\neg \vee \wedge \Rightarrow \Leftrightarrow \forall \exists$.

Символ $\neg$ называется отрицанием.

Например,

$\neg(x = y)$ означает $x \neq y$.

Символ $\vee$ – логическое «или», дизъюнкция, читается: «выполняется хотя бы одно из условий».

Условию (число делится на два) $\vee$ (число делится на три) удовлетворяют все числа, делящиеся на два, и все числа, делящиеся на три, например 2, 3, 4, 6, 8, 9, 10, 12 и т.д.

Символ $\wedge$ – логическое «и», конъюнкция, читается: «выполняются оба условия одновременно».

Условию (число делится на два) $\wedge$ (число делится на три) удовлетворяют числа, делящиеся на два и на три одновременно, т.е. делящиеся на шесть. Это 6, 12, 18 и т.д.

Символ $\Rightarrow$, «влечет», означает логическое следствие.

Например, (число делится на шесть) $\Rightarrow$ (число делится на два).

Символ $\Leftrightarrow$, «равносильно», означает логическую эквивалентность.

Например, ((число делится на два) $\wedge$ (число делится на три)) $\Leftrightarrow$ (число делится на шесть).

Символ $\forall$ означает «любой», «произвольный».

Например, $\forall$ студент имеет зачетную книжку.

Символ $\exists$ означает «существует», «найдется».

Например, $\exists$ студент, у которого в зачетке только отличные оценки.

Кроме того, будут использоваться символы, позаимствованные в программировании,

$:: =$ и $: =$

Они читаются: «равно по определению».

Первый из них используется для абстрактных понятий, второй – для конкретных объектов.

Например, окружность $:: =$ множество точек, равноудаленных от точки, называемой центром, $C: =$ окружность с радиусом, равным единице, и центром в точке O .

2. МНОЖЕСТВА

Понятие множества – одно из основных в математике. На интуитивном уровне множество – это собрание некоторых объектов, как правило, объединенных каким-либо общим свойством. Например, множество целых чисел, множество равнобедренных треугольников, множество студентов МГГУ.

Однако это простое интуитивное понимание множества оказывается внутренне противоречивым. Это показывает парадокс английского логика Б. Рассела.

В популярном изложении этот парадокс выглядит следующим образом. В воинской части командир приказал парикмахеру брить всех, кто не может бриться сам, и не брить тех, кто бриться может. Куда следует отнести самого парикмахера? Если он побреется – он может бриться и ему бриться нельзя, если ему бриться нельзя, то он обязан себя побрить.

Чтобы избежать этого и других парадоксов, создана строгая теория множеств, исключаяющая влияние противоречия. Эта теория выходит за рамки данного курса, но необходимо понимать, что с интуитивными понятиями в математике (да и не только) следует обращаться с осторожностью.

Множества обычно обозначаются прописными буквами латинского алфавита, а объекты, в них входящие и называемые элементами множества, – строчными буквами.

Если элементы x объединяются в множество A каким-либо общим свойством, то пишут:

$$A := \{x \mid \text{свойство элементов } x \text{ множества } A\}.$$

В теории множеств используются символы

$$\in \subset = \cap \cup$$

Символ $\in$ используется для указания принадлежности элемента множеству.

Например, если

$F := \{n \mid n\text{-натуральное число, делящееся на четыре}\}$, то $2000 \in F$.

Если элемент не принадлежит множеству, то используется символ $\notin$, например, $2001 \notin F$.

Если любой элемент множества A является элементом множества B , то используется символ $\subset$: $A \subset B$.

С помощью введенных ранее символов это включение можно определить так:

$$A \subset B :: = \forall x \in A \Rightarrow x \in B.$$

Это же включение может быть записано в виде

$$B \supset A.$$

Если $A \subset B$ и $B \subset A$, то пишут $A = B$:

$$A = B :: = (A \subset B) \wedge (B \subset A).$$

Объединение множеств A и B , $A \cup B$ – это множество всех элементов, входящих хотя бы в одно из множеств A или B :

$$A \cup B :: = \{x \mid (x \in A) \vee (x \in B)\}.$$

Пересечение множества A и B , $A \cap B$ – это множество элементов, одновременно входящих и в A , и в B :

$$A \cap B :: = \{x \mid (x \in A) \wedge (x \in B)\}.$$

Эти понятия можно проиллюстрировать диаграммами (рис. 1).

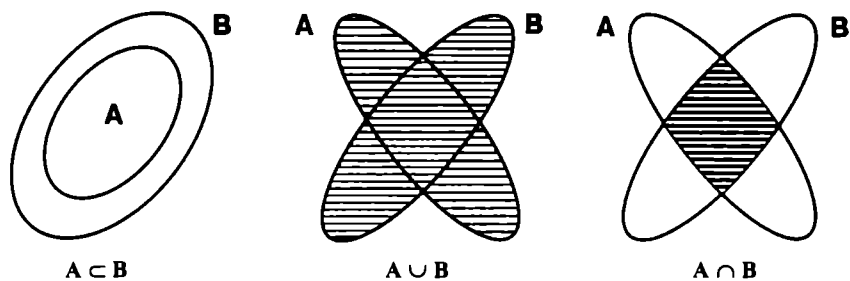


Рис. 1

I
ЧАСТЬ

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕКТОРА

Вектором называется направленный отрезок. Отрезок определяется двумя точками – концами этого отрезка. Если выбрать, какая из этих точек первая, а какая вторая, то отрезок приобретает направление и превращается в вектор. Первая из точек называется *началом* вектора, а вторая – его *концом*. Поэтому говорят, что *вектор – это упорядоченная пара точек*. Если точка A – начало вектора, а B – его конец, то вектор обозначается $\overrightarrow{AB}$. На чертеже конец вектора отмечается стрелкой (рис. 2).

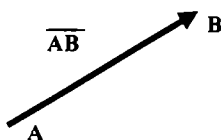


Рис. 2

Вектор, начало и конец которого совпадают, называется нулевым. Векторы могут быть расположены в пространстве, на плоскости или на прямой.

2. РАВЕНСТВО ВЕКТОРОВ

Два вектора называются равными, если

а) они лежат на одной прямой, составляющие их отрезки равны и они направлены в одну сторону (рис. 3)

или

б) они не лежат на одной прямой, и фигура, получаемая в результате соединения отрезками начал и концов векторов, есть параллелограмм (рис. 3).

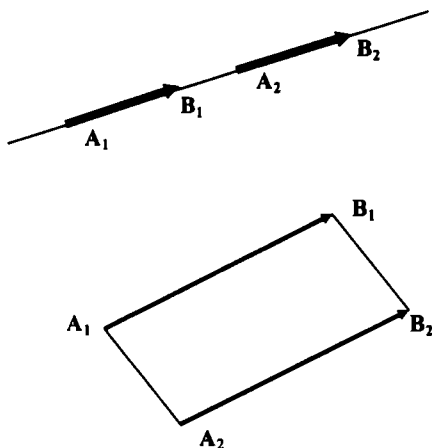


Рис. 3. $\overline{A_1B_1} = \overline{A_2B_2}$

Выполняются следующие свойства равенства векторов:

1°. $\overline{AB} = \overline{AB}$.

2°. Если $\overline{A_1B_1} = \overline{A_2B_2}$, то $\overline{A_2B_2} = \overline{A_1B_1}$.

3°. Если $\overline{A_1B_1} = \overline{A_2B_2}$ и $\overline{A_2B_2} = \overline{A_3B_3}$, то $\overline{A_1B_1} = \overline{A_3B_3}$.

Если выбрать какой-либо вектор и рассмотреть векторы, равные ему, то получится множество равных между собой векторов. Такое множество всех равных между собой векторов называется свободным вектором.

Свободные векторы обозначаются малыми буквами латинского алфавита со стрелкой: $\vec{a}, \vec{b}, \vec{u}, \vec{x}$.

Если вектор $\overline{AB}$ является представителем множества равных между собой векторов $\vec{u}$, то говорят, что вектор $\overline{AB}$ равен свободному вектору $\vec{u}$, и пишут $\overline{AB} = \vec{u}$.

Начало вектора называют точкой приложения вектора. Так, если $\overline{AB} = \vec{u}$, то говорят, что вектор $\vec{u}$ приложен к точке A .

В дальнейшем, говоря о свободном векторе, слово «свободный» мы будем опускать.

Длина вектора $\vec{a}$ обозначается $|\vec{a}|$.

Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ параллельны или лежат на одной прямой, то пишут $\vec{a} \parallel \vec{b}$.

Такие векторы называются коллинеарными.

3. СЛОЖЕНИЕ ВЕКТОРОВ

Сумма векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ определяется следующим образом. Выберем произвольную точку A и приложим к ней вектор $\vec{a}$. Получим вектор $\overline{AB}$.

К концу вектора $\overline{AB}$, точке B , приложим вектор $\vec{b}$ и получим вектор $\overline{BC}$. Вектор $\overline{AC}$ по определению равен сумме векторов $\overline{AB}$ и $\overline{BC}$. Множество всех векторов, равных вектору $\overline{AC}$, есть вектор $\vec{a} + \vec{b}$ (рис. 4). Корректность этого определения, т.е. независимость от способа построения, следует из рис. 5, где фигура $ABCA_1B_1C_1$, очевидно, является призмой.

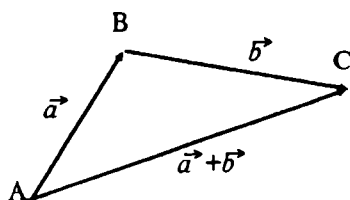


Рис. 4

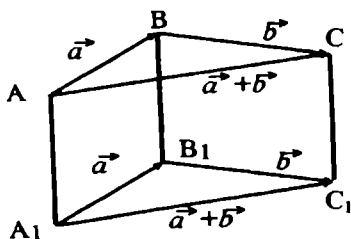


Рис. 5

Отметим некоторые свойства сложения векторов.

1°. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$.

2°. $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$.

Для доказательства свойства 1° построим сумму $\vec{a} + \vec{b}$ (рис. 6) и построим треугольник ABC до параллелограмма $ABCB_1$.

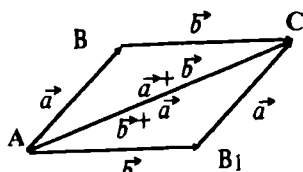


Рис. 6

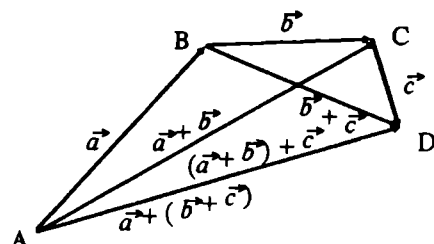


Рис. 7

Тогда, очевидно $\overline{AB_1} = \vec{b}$ и вектор $\overline{B_1C} = \vec{a}$, вектор $\overline{AC}$ равен как сумме $\vec{a} + \vec{b}$, так и сумме $\vec{b} + \vec{a}$.

Для доказательства свойства 2° из точки A отложим вектор $\vec{a}$, из конца полученного вектора точки B отложим вектор $\vec{b}$ и из конца вектора $\vec{b}$ точки C отложим вектор $\vec{c}$ (рис. 7).

Вектор $\overline{AC} = \vec{a} + \vec{b}$ и, следовательно, $\overline{AD} = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$.

В то же время $\overline{BD} = (\vec{b} + \vec{c})$ и $\overline{AD} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$.

4. УМНОЖЕНИЕ ВЕКТОРА НА ЧИСЛО

В результате умножения вектора $\vec{a}$ на число k , получается вектор $k\vec{a}$, такой, что

а) вектор $k\vec{a}$ коллинеарен вектору $\vec{a}$, $k\vec{a} \parallel \vec{a}$;

б) длина вектора $k\vec{a}$ получается умножением длины вектора $\vec{a}$ на модуль числа k : $|k\vec{a}| = |k| \cdot |\vec{a}|$;

в) если $k > 0$, то вектор $k\vec{a}$ направлен в ту же сторону, что вектор $\vec{a}$,

если $k < 0$, то вектор $k\vec{a}$ направлен противоположно вектору $\vec{a}$.

Умножение вектора на число обладает следующими свойствами

$$1^\circ. (k_1 + k_2) \cdot \vec{a} = k_1 \vec{a} + k_2 \vec{a}.$$

$$2^\circ. k_1 (k_2 \vec{a}) = (k_1 k_2) \cdot \vec{a}.$$

Кроме того, для сложения векторов и умножения вектора на число выполняется свойство

$$3^\circ. k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}.$$

Докажем это свойство.

Построим сумму векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$, $\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{AC}$ (рис. 8).

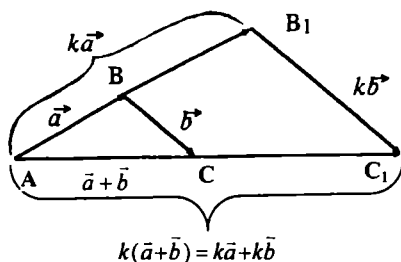


Рис. 8

Затем вектор $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ умножим на число $k > 0$. Получим вектор $\overrightarrow{AB_1}$. Из точки B_1 проведем прямую, параллельную прямой BC до пересечения с прямой AC в точке C_1 . Треугольники ABC и AB_1C_1 подобны, следовательно,

$$\frac{|B_1C_1|}{|BC|} = \frac{|AC_1|}{|AC|} = \frac{|AB_1|}{|AB|}.$$

Но последнее отношение равно k .

Вектор $\overrightarrow{B_1C_1}$ коллинеарен вектору $\overrightarrow{BC}$, одинаково с ним направлен и $|\overrightarrow{B_1C_1}| = k |\overrightarrow{BC}|$. Следовательно, $\overrightarrow{B_1C_1} = k \overrightarrow{BC}$. Аналогично $\overrightarrow{AC_1} = k \overrightarrow{AC}$. Вектор $\overrightarrow{AC_1} = k\vec{a} + k\vec{b}$ одновременно $\overrightarrow{AC_1} = k(\vec{a} + \vec{b})$. Свойство 3° при $k > 0$ доказано. Аналогично доказательство при $k < 0$.

1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЛИНЕЙНОГО ПРОСТРАНСТВА

Линейным пространством называется множество L , для элементов которого определены операции сложения и умножения на вещественные числа, не выходящие за пределы этого множества. Если $a \in L$ и $b \in L$, то $a + b \in L$.

Если и $a \in L$, и α – число, то $\alpha a \in L$.

Операции сложения и умножения на числа обладают всеми свойствами соответствующих операций над векторами. Элементы линейного пространства также называют векторами.

Примерами линейных пространств являются множества всех векторов на прямой, плоскости и в пространстве.

Другим примером линейного пространства является множество всех многочленов, степени не выше данной. Важным примером линейного пространства является пространство векторов-столбцов вида

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix},$$

где $a_1, a_2, \dots, a_n$ – произвольные вещественные числа. Числа $a_1, a_2, \dots, a_n$ называют координатами вектор-столбца.

Сложение вектор-столбцов и их умножение на числа производится покомпонентно.

Если

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}, \alpha - \text{число},$$

то

$$a + b = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix}, \alpha \cdot a = \begin{pmatrix} \alpha a_1 \\ \alpha a_2 \\ \vdots \\ \alpha a_n \end{pmatrix}.$$

Аналогично определяется пространство вектор-строк вида

$$(a_1, a_2, \dots, a_n).$$

Линейной оболочкой системы векторов

$$a_1, a_2, \dots, a_n$$

называется множество векторов вида

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_n a_n,$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ – произвольные числа.

Линейная оболочка системы векторов, очевидно, является линейным пространством.

2. ЛИНЕЙНАЯ ЗАВИСИМОСТЬ И НЕЗАВИСИМОСТЬ ВЕКТОРОВ

Пусть даны векторы $a_1, a_2, \dots, a_n$ и числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$. Выражение

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_n a_n$$

называется **линейной комбинацией** векторов $a_1, a_2, \dots, a_n$ с коэффициентами $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$.

Система векторов $a_1, a_2, \dots, a_n$ называется линейно независимой, если ни один из векторов этой системы нельзя представить в виде линейной комбинации остальных.

В противном случае, если хотя бы один из векторов системы можно представить в виде линейной комбинации остальных, система называется линейно зависимой.

Рассмотрим понятие линейной независимости на примере векторного пространства.

Пусть два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ линейно зависимы. Это значит, что вектор $\vec{a}$, например, можно представить в виде линейной комбинации вектора $\vec{b}$. Но линейная комбинация одного вектора есть результат умножения вектора на число. Следовательно, $\vec{a} = k \cdot \vec{b}$.

Таким образом, векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны. Можно показать и обратно, если векторы коллинеарны, то они линейно зависимы. Линейная независимость двух векторов означает их неколлинеарность.

Если три вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, линейно зависимы, то один из них, например $\vec{c}$, равен линейной комбинации векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, $\vec{c} = k\vec{a} + l\vec{b}$ и вектор $\vec{c}$ лежит в плоскости векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, т.е. векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, параллельны одной плоскости. Такие векторы называются *компланарными*. Можно показать, что три вектора линейно независимы тогда и только тогда, когда они некопланарны.

Четыре вектора всегда линейно зависимы. Из векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, и $\vec{d}$ впервые три $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, можно считать некопланарными. В противном случае один из них можно представить в виде линейной комбинации остальных, например $\vec{c} = k\vec{a} + l\vec{b}$.

Добавив к этой линейной комбинации вектор $\vec{d}$ с коэффициентом, равным нулю, получим

$$\vec{c} = k\vec{a} + l\vec{b} + 0\vec{d},$$

что означает линейную зависимость векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ и $\vec{d}$. В случае некопланарности векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ сделаем следующее построение (рис. 9).

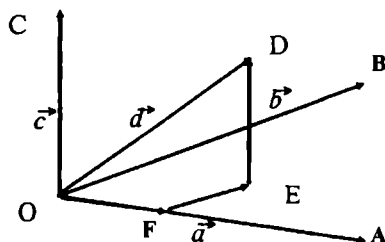


Рис. 9

Переместим все векторы в общее начало – точку O .

$\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$, $\overrightarrow{OD} = \vec{d}$, из точки D проведем прямую, параллельную OC до пересечения с плоскостью OAB в точке E , затем из точки E проведем прямую, параллельную OB до пересечения с прямой OA в точке F . Тогда $OD = OF + FE + ED$.

Но $\overrightarrow{OF} = k\vec{a}$, $\overrightarrow{FE} = l\vec{b}$, $\overrightarrow{ED} = m\vec{c}$.

Следовательно, $\vec{d} = k\vec{a} + l\vec{b} + m\vec{c}$ и векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ и $\vec{d}$ линейно зависимы.

Таким образом, на прямой максимальное число линейно независимых векторов равно одному, на плоскости – двум, в пространстве – трем.

3. НЕОБХОДИМОЕ И ДОСТАТОЧНОЕ УСЛОВИЕ ЛИНЕЙНОЙ НЕЗАВИСИМОСТИ

Необходимое и достаточное условие линейной независимости состоит в следующем.

Для того, чтобы система векторов $a_1, a_2, \dots, a_n$ была линейно независимой, необходимо и достаточно, чтобы из равенства нулю линейной комбинации этих векторов

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_n a_n = 0$$

следовало равенство нулю всех коэффициентов этой линейной комбинации:

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0.$$

Докажем это условие.

Необходимость. Пусть векторы $a_1, a_2, \dots, a_n$ линейно независимы. Предположим, что линейная комбинация равна нулю:

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_n a_n = 0,$$

но хотя бы один из ее коэффициентов, например α_1 , отличен от нуля.

Тогда $\alpha_1 a_1 = -\alpha_2 a_2 - \dots - \alpha_n a_n$ и

$$a_1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} a_2 - \dots - \frac{\alpha_n}{\alpha_1} a_n.$$

Вектор a_1 представлен в виде линейной комбинации векторов $a_2, \dots, a_n$, что противоречит линейной независимости системы $a_1, a_2, \dots, a_n$.

Достаточность. Пусть условие выполняется. Предположим, что система $a_1, a_2, \dots, a_n$ линейно зависима.

Тогда один из векторов, например a_1 , можно представить в виде линейной комбинации остальных:

$$a_1 = \beta_2 a_2 + \dots + \beta_n a_n$$

или

$$a_1 - \beta_2 a_2 - \dots - \beta_n a_n = 0.$$

Получена линейная комбинация векторов $a_1, a_2, \dots, a_n$, равная нулю, в которой коэффициент при a_1 отличен от нуля — он равен единице, что противоречит условию.

Необходимое и достаточное условие доказано. Из этого условия можно получить условие линейной зависимости системы векторов.

Система векторов $a_1, a_2, \dots, a_n$ является линейно зависимой, если существует линейная комбинация этих векторов, равная нулю:

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_n a_n = 0,$$

в которой хотя бы один коэффициент отличен от нуля.

4. СВОЙСТВА ЛИНЕЙНОЙ ЗАВИСИМОСТИ И НЕЗАВИСИМОСТИ ВЕКТОРОВ

1°. Если система векторов содержит нулевой вектор, то эта система линейно зависима.

Действительно, пусть система имеет вид

$$a_1, a_2, \dots, a_n, 0$$

Тогда линейная комбинация

$$0 \cdot a_1 + 0 \cdot a_2 + \dots + 0 \cdot a_n + \alpha \cdot 0$$

равна нулю при $\alpha \neq 0$, а это значит, что система линейно зависима.

2°. Если система векторов содержит линейно зависимую подсистему, то эта система линейно зависима.

Не ограничивая общности, можно считать, что в системе $a_1, a_2, \dots, a_k, a_{k+1}, \dots, a_n$ подсистема $a_1, a_2, \dots, a_k$, $k > 0$ линейно зависима. Это значит, что существует линейная комбинация $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_k a_k$, равная нулю, в которой не все коэффициенты равны нулю.

Прибавим к этой линейной комбинации остальные векторы системы с коэффициентами, равными нулю:

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_k a_k + 0 \cdot a_{k+1} + \dots + 0 \cdot a_n.$$

Эта линейная комбинация, очевидно, равна нулю, и среди первых k ее коэффициентов есть отличные от нуля.

Поэтому система $a_1, a_2, \dots, a_k, a_{k+1}, \dots, a_n$ линейно зависима.

3°. Если, добавив к линейно независимой системе векторов $a_1, a_2, \dots, a_n$ вектор b , получим линейно зависимую систему векторов $a_1, a_2, \dots, a_n, b$ и вектор b можно представить в виде линейной комбинации векторов $a_1, a_2, \dots, a_n$.

Прежде всего заметим, что линейная зависимость векторов $a_1, a_2, \dots, a_n, b$ означает, что хотя бы один из векторов этой системы представим в виде линейной комбинации остальных.

Доказать нужно, что в качестве этого «хотя бы одного» вектора можно взять вектор b .

Линейная зависимость системы векторов

$$a_1, a_2, \dots, a_n, b$$

означает существование линейной комбинации

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_n a_n + \gamma b,$$

равной нулю, в которой хотя бы один из коэффициентов $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \gamma$ отличен от нуля.

Покажем, что $\gamma \neq 0$. Предположим, что $\gamma = 0$. Тогда отличен от нуля один из коэффициентов $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$.

Подставляя в равенство

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_n a_n + \gamma b = 0$$

значение $\gamma = 0$, получим

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_n a_n = 0,$$

где не все коэффициенты равны нулю, что противоречит линейной независимости системы векторов $a_1, a_2, \dots, a_n$.

Таким образом, $\gamma \neq 0$.

Равенство

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_n a_n + \gamma b = 0$$

можно переписать в виде

$$\gamma b = -\alpha_1 a_1 - \alpha_2 a_2 - \dots - \alpha_n a_n.$$

Разделив на $\gamma \neq 0$, получим

$$b = -\frac{\alpha_1}{\gamma} a_1 - \frac{\alpha_2}{\gamma} a_2 - \dots - \frac{\alpha_n}{\gamma} a_n$$

или

$$b = \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \dots + \beta_n a_n,$$

$$\beta_1 = -\frac{\alpha_1}{\gamma}, \quad \beta_2 = -\frac{\alpha_2}{\gamma}, \quad \dots, \quad \beta_n = -\frac{\alpha_n}{\gamma}.$$

Искомое представление получено.

5. ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ СИСТЕМЫ ВЕКТОРОВ

Следующие преобразования системы векторов называются элементарными.

А°. *Перестановка двух векторов системы между собой.*

В°. *Умножение одного из векторов системы на число, отличное от нуля.*

С°. *Прибавление к одному из векторов системы другого вектора этой системы, умноженного на произвольное число.*

Справедливо следующее утверждение.

Теорема. *Элементарные преобразования оставляют линейно независимую систему линейно независимой, а линейно зависимую – линейно зависимой.*

Для преобразования **А°** утверждение теоремы очевидно. Докажем его справедливость для преобразований **В°** и **С°**. Пусть система

$$a_1, a_2, \dots, a_k, \dots, a_n$$

линейно независима, число γ отлично от нуля и линейная комбинация векторов $a_1, a_2, \dots, \gamma a_k, \dots, a_n$ равна нулю:

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_k \gamma a_k + \dots + \alpha_n a_n = 0.$$

Вследствие линейной независимости векторов $a_1, a_2, \dots, a_n$ из этого равенства следует равенство нулю коэффициентов линейной комбинации этих векторов:

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k \gamma = \dots = \alpha_n = 0.$$

Но $\gamma \neq 0$ и $\alpha_k = 0$. Следовательно, система $a_1, a_2, \dots, a_k, \dots, a_n$ линейно независима. Утверждение теоремы доказано для свойства **В°**. Докажем теперь его для свойства **С°**.

Пусть система векторов $a_1, a_2, \dots, a_k, \dots, a_l, \dots, a_n$ линейно независима. Требуется доказать линейную независимость системы векторов

$$a_1, a_2, \dots, a_k, \dots, a_l + \gamma a_k, \dots, a_n,$$

где γ – произвольное число. Используя необходимое и достаточное условие линейной независимости системы векторов,

нужно показать, что из равенства нулю линейной комбинации этих векторов

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_k a_k + \dots + \alpha_l (a_l + \gamma a_k) + \dots + \alpha_n a_n = 0$$

следует равенство нулю ее коэффициентов:

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k = \dots = \alpha_l = \dots = \alpha_n = 0.$$

Для доказательства раскроем скобки и соберем коэффициенты при векторах $a_1, a_2, \dots, a_k, \dots, a_l, \dots, a_n$:

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + (\alpha_k + \gamma \alpha_l) a_k + \dots + \alpha_l a_l + \dots + \alpha_n a_n = 0.$$

Линейная независимость векторов $a_1, a_2, \dots, a_k, \dots, a_l, \dots, a_n$ влечет равенство нулю коэффициентов при этих векторах:

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k + \gamma \alpha_l = \dots = \alpha_l = \dots = \alpha_n = 0.$$

Подставляя $\alpha_l = 0$ в равенство $\alpha_k + \gamma \alpha_l = 0$, получаем $\alpha_k = 0$.

Отсюда $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k = \dots = \alpha_l = \dots = \alpha_n = 0$, что и требовалось доказать.

Из обратимости элементарных преобразований следует, что они оставляют линейно зависимую систему линейно зависимой.

6. ТРЕУГОЛЬНАЯ СИСТЕМА ВЕКТОРОВ

Система вектор-столбцов вида

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{31} \\ a_{32} \\ a_{33} \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} a_{n1} \\ a_{n2} \\ a_{n3} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix}$$

где $a_{11} \neq 0, a_{22} \neq 0, a_{33} \neq 0, \dots, a_{nn} \neq 0$, называется *треугольной*. Докажем, что треугольная система векторов линейно независима.

Доказательство проведем для $n = 4$. В этом случае треугольную систему образуют векторы

$$a_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} a_{31} \\ a_{32} \\ a_{33} \\ 0 \end{pmatrix} \text{ и } a_4 = \begin{pmatrix} a_{41} \\ a_{42} \\ a_{43} \\ a_{44} \end{pmatrix},$$

где $a_{11} \neq 0, a_{22} \neq 0, a_{33} \neq 0, a_{44} \neq 0$.

Чтобы доказать, что эти векторы линейно независимы, покажем, что из равенства нулю их линейной комбинации:

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3 + \alpha_4 a_4 = 0$$

следует равенство нулю ее коэффициентов:

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0.$$

Производя покомпонентные действия над векторами в левой части равенства, получим вектор

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 a_{11} + \alpha_2 a_{12} + \alpha_3 a_{13} + \alpha_4 a_{14} \\ \alpha_2 a_{22} + \alpha_3 a_{23} + \alpha_4 a_{24} \\ \alpha_3 a_{33} + \alpha_4 a_{34} \\ \alpha_4 a_{44} \end{pmatrix}.$$

Нулевой вектор в правой части равенства записывается так:

$$0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Приравнявая координаты в левой и правой частях равенства, получим систему уравнений:

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 a_{11} + \alpha_2 a_{12} + \alpha_3 a_{13} + \alpha_4 a_{14} = 0 \\ \alpha_2 a_{22} + \alpha_3 a_{23} + \alpha_4 a_{24} = 0 \\ \alpha_3 a_{33} + \alpha_4 a_{34} = 0 \\ \alpha_4 a_{44} = 0 \end{pmatrix}.$$

Поскольку $\alpha_{44} \neq 0$, из последнего уравнения следует, что $\alpha_4 = 0$. Подставляя $\alpha_4 = 0$ в предпоследнее уравнение, получим $\alpha_3 \cdot a_{33} = 0$.

Из $\alpha_{33} \neq 0$ следует $\alpha_3 = 0$. Подставляя $\alpha_3 = \alpha_4 = 0$ во второе уравнение, получим $\alpha_2 a_{22} = 0$.

Из $\alpha_{33} \neq 0$ следует $\alpha_2 = 0$. Подставляя $\alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$ в первое уравнение, получим $\alpha_1 \cdot a_{11} = 0$.

Из $\alpha_{11} \neq 0$ следует $\alpha_1 = 0$.

Таким образом, коэффициенты линейной комбинации все равны нулю, и векторы a_1, a_2, a_3, a_4 линейно независимы.

1. РАНГ СИСТЕМЫ ВЕКТОРОВ

Максимальное число линейно независимых векторов, которые можно выбрать из данной системы, называется рангом этой системы.

Справедлива теорема, которая дается без доказательства.

Ранг системы векторов не зависит от порядка выбора векторов.

Как было показано выше, система векторов на прямой содержит один линейно независимый вектор, и ее ранг равен единице, максимальное число линейно независимых векторов на плоскости равно двум и, следовательно, ранг множества всех векторов на плоскости равен двум.

Ранг множества векторов линейного пространства называется размерностью этого пространства.

Следовательно, размерность прямой равна единице, размерность плоскости – двум.

Для ранга системы векторов выполняются следующие свойства:

1°. Добавление или удаление нулевого вектора не изменяет ранга системы векторов.

2°. Элементарные преобразования системы векторов не изменяют ее ранга.

Докажем свойство 2°. Для элементарного преобразования A° и B° оно очевидно.

Докажем, что преобразование C° не может уменьшить ранг системы векторов.

Пусть ранг исходной системы векторов

$$a_1, a_2, \dots, a_k, \dots, a_n$$

равен k . Можно считать (используя преобразование A°), что векторы

$$a_1, a_2, \dots, a_k$$

линейной независимы.

Если преобразование C° производится над первыми k векторами, то они остаются линейно независимыми, и ранг системы не может стать меньше k .

То же можно сказать, если преобразуются векторы с номерами, большими k .

Пусть $p \leq k < q$.

Требуется доказать, что ранг системы векторов

$$a_1, a_2, \dots, a_p + \lambda a_q, \dots, a_k, \dots, a_q, \dots, a_n$$

не меньше ранга исходной системы

$$a_1, a_2, \dots, a_p, \dots, a_k, \dots, a_q, \dots, a_n.$$

Рассмотрим два случая. Пусть векторы

$$a_1, a_2, \dots, a_{p-1}, a_{p+1}, \dots, a_k, a_q$$

линейно независимы. Число их равно k , данное преобразование их не изменяет и не может уменьшить ранг исходной системы.

Если эти векторы линейно зависимы, то, по свойствам линейной зависимости и независимости, вектор a_q можно представить в виде линейной комбинации:

$$a_q = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_{p-1} a_{p-1} + \alpha_{p+1} a_{p+1} + \dots + \alpha_k a_k.$$

В этом случае система векторов

$$a_1, a_2, \dots, a_p + \lambda a_q, \dots, a_k,$$

где

$$a_p + \lambda a_q = a_p + \lambda \alpha_1 a_1 + \lambda \alpha_2 a_2 + \dots + \lambda \alpha_{p-1} a_{p-1} + \lambda \alpha_{p+1} a_{p+1} + \dots + \lambda \alpha_k a_k,$$

может быть получена из системы

$$a_1, a_2, \dots, a_p, \dots, a_k$$

последовательным применением преобразования C° , которое оставляет эту систему линейной независимой и не уменьшает ранга исходной системы.

Вследствие обратимости преобразования C° оно не может увеличить ранг системы векторов.

2. РАНГ МАТРИЦЫ

Матрицей называется прямоугольная таблица чисел вида

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Эта матрица содержит m строк и n столбцов и имеет размер $m \times n$. Матрица размера $n \times n$ называется квадратной матрицей порядка n .

Матрицы принято обозначать большими буквами латинского алфавита: A, B, C и т.д.

Столбцы и строки матрицы можно рассматривать как вектор-столбцы и вектор-строки.

Столбцовым рангом матрицы называется ранг системы вектор-столбцов матрицы.

Строчный ранг – ранг системы вектор-строк. Справедлива теорема, которая дается без доказательства.

Теорема. *Столбцовый и строчный ранги матрицы равны между собой.*

Определение. *Совпадающие столбцовый и строчный ранги матрицы называются рангом этой матрицы.*

Следующие свойства ранга матрицы являются следствием соответствующих свойств ранга системы векторов.

1°. Добавление или удаление нулевой строки или нулевого столбца не изменяют ранга матрицы. Под нулевой строкой или столбцом понимаются строки или столбцы, все элементы которых равны нулю.

2°. Элементарные преобразования строк и столбцов матрицы не изменяют ее ранга.

Выделим в матрице

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

главную диагональ. К ней относятся элементы $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{pp}$,

где $p = \min(m, n)$.

Матрица имеет трапециевидную форму, если:

а) нулевые строки матрицы (если они есть) являются последними строками матрицы;

б) в ненулевых строках элементы на главной диагонали отличны от нуля, а элементы, расположенные под главной диагональю, равны нулю.

Трапециевидную матрицу можно условно изобразить с помощью схемы

$$\begin{pmatrix} * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * \\ & & & * & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & & & * & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & & & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

На схеме элементы, отмеченные звездочкой, произвольны. Элементы главной диагонали, отмеченные двойной чертой, отличны от нуля.

Для нахождения ранга трапециевидной матрицы прежде всего отбросим нулевые строки. Ранг матрицы при этом не изменится. Получим матрицу

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2k} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{kk} & \dots & a_{kn} \end{pmatrix},$$

где k – число ненулевых строк исходной матрицы.

Матрица содержит треугольную систему вектор-столбцов, состоящую из k векторов:

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \vdots \\ a_{kk} \end{pmatrix}.$$

Эти векторы, как было показано ранее, линейно независимы. Следовательно, матрица содержит k линейно независимых столбцов, и ее столбцовый ранг не может быть меньше k .

В матрице всего k строк, следовательно, ее строчный ранг не может быть больше k . Поскольку столбцовый и строчный ранги матрицы равны между собой, заключаем, что ранг матрицы равен k .

Итак, *ранг трапецевидной матрицы равен числу ее ненулевых строк.*

3. МЕТОД ГАУССА НАХОЖДЕНИЯ РАНГА МАТРИЦЫ

Метод Гаусса нахождения ранга матрицы состоит в приведении матрицы к трапецевидной форме с помощью элементарных преобразований ее строк и столбцов.

Основная процедура алгоритма Гаусса состоит в следующем.

Если хотя бы один элемент матрицы отличен от нуля, то перестановкой строк и столбцов матрицы его можно перевести в первую строку и первый столбец. Затем, прибавляя первую строку, умноженную на подходящие множители, к остальным строкам, можно добиться того, чтобы все элементы первого столбца матрицы, расположенные под главной диагональю, обратились в ноль.

После этого основная процедура алгоритма Гаусса применяется к строкам и столбцам, входящим в матрицу, получен-

ную из исходной удалением первой строки и первого столбца. Аналогично, на каждом следующем шаге алгоритма операции производятся над строками и столбцами, входящими в матрицу, полученную из предыдущей удалением первой строки и первого столбца.

Продолжение этого процесса оказывается невозможным в двух случаях.

В первом случае все элементы последней полученной матрицы оказывается равным нулю.

Во втором случае последняя полученная матрица не содержит ни одного элемента.

В обоих случаях алгоритм Гаусса переводит данную матрицу в трапециевидную.

Поскольку алгоритм Гаусса составлен из элементарных преобразований строк и столбцов матрицы, ранг исходной матрицы равен рангу полученной трапециевидной матрицы, т.е. числу ее ненулевых строк.

Пример. В матрице

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 2 & 5 \\ 2 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

умножим первую строку на -2 и прибавим к остальным строкам:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

В полученной матрице элементы первого столбца под главной диагональю равны нулю. Поэтому на следующем шаге операции производятся над строками и столбцами матрицы, кроме ее первой строки и первого столбца. Переставляя второй и четвертый столбцы, получим

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

В результате перестановки строк получим

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Получена трапецевидная матрица, содержащая три ненулевые строки. Следовательно, ее ранг, и вместе с тем ранг исходной матрицы, равен трем.

4. БАЗИС И КООРДИНАТЫ ВЕКТОРА

В n -мерном линейном пространстве L выберем и зафиксируем n линейно независимых векторов:

$$b_1, b_2, \dots, b_n.$$

Фиксированная система линейно независимых векторов, число которых равно размерности пространства, называется базисом этого пространства.

Пусть a – произвольный вектор пространства L . Тогда система векторов

$$b_1, b_2, \dots, b_n, a$$

линейно зависима, поскольку число этих векторов равно $n + 1$, что превышает размерность пространства. Учитывая линейную независимость векторов

$$b_1, b_2, \dots, b_n,$$

получаем, что вектор a можно представить в виде линейной комбинации векторов $b_1, b_2, \dots, b_n$: