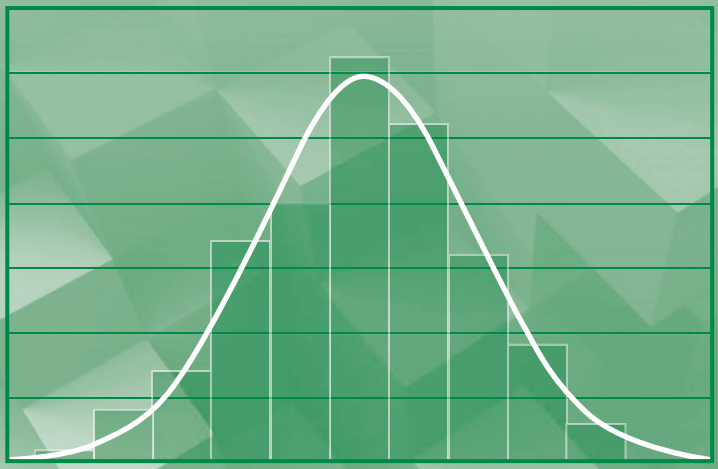
Ю. В. Прохоров
А. В. Прохоров

Курс лекций по теории вероятностей и математической статистике



УДК 519.21(075.8)
ББК 22.171
П84

Прохоров Ю. В., Прохоров А. В.
Курс лекций по теории вероятностей и математической статистике.
М.: МЦНМО, 2020.
144 с.
ISBN 978-5-4439-3392-4

Предлагаемая к изданию книга содержит курс теории вероятностей с элементами математической статистики, рассчитанный на семестр университетского учебного плана.

Впервые этот курс был прочитан в Московском инженерно-физическом институте, затем в переработанном и дополненном виде на факультете вычислительной математики и кибернетики и на инженерном отделении механико-математического факультета МГУ. Изложение основ теории вероятностей дополнено нестандартным материалом. Так, например, в курс включены простейшие примеры марковских случайных процессов, закон больших чисел для зависимых случайных величин, в частности цепей Маркова, элементы теории массового обслуживания. Кроме того, дано полное оригинальное доказательство основных теорем классической теории вероятностей: теоремы Пуассона и центральной предельной теоремы.

Книга может служить учебным пособием для студентов университетов, в образовательной программе которых в соответствии с учебным планом теория вероятностей и математическая статистика занимают важное место.

Подготовлено на основе книги:
Прохоров Ю. В., Прохоров А. В. Курс лекций по теории вероятностей и математической статистике. — М.: МЦНМО, 2019. — 144 с. — ISBN 978-5-4439-1392-6

Учебное издание для вузов

6+

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования
119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11,
тел. (499)241-08-04.
http://www.mccme.ru

ISBN 978-5-4439-3392-4

© Прасолов В. В., 2020.
© МЦНМО, 2020.

Оглавление

Предисловие 5
Введение 7

Глава 1. Классическая вероятностная модель: урновая схема 8

Глава 2. Основные понятия математической теории вероятностей . . 14
§ 1. Конечное вероятностное пространство 14
§ 2. Условная вероятность. Формула полной вероятности 17
§ 3. Независимость случайных событий 19
§ 4. Случайные величины 23
§ 5. Совместное распределение вероятностей и независимость случайных величин 30
§ 6. Неравенство Чебышёва. Закон больших чисел 39
§ 7. Вероятностные модели с бесконечным числом элементарных событий 44

Глава 3. Суммирование независимых случайных величин. Предельные теоремы теории вероятностей 57
§ 1. Производящие и характеристические функции 58
§ 2. Предельная теорема Пуассона 63
§ 3. Центральная предельная теорема для независимых случайных величин 65
§ 4. Замечания к центральной предельной теореме 72
§ 5. Применение центральной предельной теоремы к статистическим задачам 75

Глава 4. Последовательности зависимых случайных величин. Цепи Маркова. Простейшие марковские процессы в задачах массового обслуживания 80
§ 1. Вариант закона больших чисел для зависимых случайных величин. Теорема Бернштейна 80
§ 2. Цепи Маркова 83
§ 3. Эргодические теоремы для цепей Маркова 90
§ 4. Закон больших чисел для цепей Маркова 94
§ 5. Понятие о марковском случайном процессе. Пуассоновский процесс 97
§ 6. Пример системы обслуживания с ожиданием 101
§ 7. Пример системы обслуживания с отказами 103

Глава 5. Элементы математической статистики 109
§ 1. Постановка задач в математической статистике 109

§ 2. Статистическая оценка параметра биномиального распределения 111
§ 3. Общие проблемы теории статистических оценок 115
§ 4. Методы получения точечных статистических оценок 121
§ 5. Интервальные статистические оценки 125
§ 6. Проверка статистических гипотез 129
§ 7. Фундаментальная лемма Неймана—Пирсона 136
Литература 141

Глава 1

Классическая вероятностная модель: урновая схема

Приведем пример подсчета вероятностей с помощью простейших комбинаторных рассуждений в так называемой «урновой» схеме. Занумеруем шары номерами от 1 до N. Предположим также, что шары в урне хорошо перемешаны. Шары один за другим извлекаются из урны «наудачу». Возможны две процедуры выбора:

а) выбор с возвращением,

б) выбор без возвращения.

Если общее число вынутых из урны шаров равно n (объем «выборки» равен n) и если j_k — номер шара при k-м извлечении, $1 \leqslant j \leqslant N$, то в каждом из указанных случаев элементарные исходы (события) опыта можно символически описать следующим образом:

а) $(j_1, j_2, \ldots, j_n)$, некоторые из j_k могут быть равными,

б) $(j_1, j_2, \ldots, j_n)$, все j_k различны.

Общее число возможных элементарных исходов в каждом из этих случаев равно соответственно

а) $\underbrace{N \cdot N \cdot \ldots \cdot N}_{n \text{ раз}} = N^n$,

б) $N(N-1)\ldots(N-n+1) = A_N^n$, где $A_N^n = \dfrac{N!}{(N-n)!}$ называют числом размещений из N по n.

Вычислим в схеме выбора с возвращением вероятность того, что среди n извлеченных шаров нет ни одной пары с одинаковыми номерами. Для этого подсчитаем число элементарных исходов опыта, благоприятствующих данному событию, в предположении, что элементарные исходы взаимно исключают друг друга и равновозможны, а затем найдем отношение числа благоприятных исходов к общему их числу. Это отношение и будет искомой вероятностью в соответствии с классическим определением.

Пример 1 (парадокс дней рождения)**.** Предположим, что в группе n студентов и каждый из них мог быть рожден с одинаковой вероятностью в любой день года из $N = 365$ (но, возможно, в разные годы). Тогда вероятность того, что все студенты группы рождены в разные дни года, равна $\dfrac{A_N^n}{N^n}$, а соответственно вероятность того,

что хотя бы у двух студентов совпадут дни рождения, будет равна $p = 1 - \frac{A_N^n}{N^n}$. Зависимость значений этой вероятности от размеров группы отражена в следующей табличке.

n	22	23	30	55	65
p	0,476	0,507	0,706	0,990	0,999

При $n = 366$ (мы приняли число дней в году за 365) вероятность интересующего нас события равна 1, и это дает основание считать результаты этих подсчетов парадоксальными. □

Предположим теперь, что среди N шаров в урне ровно M белых и $N - M$ черных шаров. Занумеруем эти шары так, что все белые шары имеют номера от 1 до M, а все черные шары — соответственно номера от $M + 1$ до N.

Вычислим вероятность того, что среди n извлеченных шаров ровно m белых. Для этого подсчитаем в каждом случае (при выборе с возвращением и без возвращения) число элементарных исходов опыта, благоприятствующих данному событию.

Число способов размещения m белых шаров на n местах без учета их номеров и порядка равно $C_n^m = \frac{A_N^n}{n!}$. Если места белых шаров фиксированы, то число размещений любых m из M шаров на этих местах в сочетании с размещением любых $n - m$ из $N - M$ шаров на оставшихся местах равно в каждом из рассматриваемых случаев соответственно

а) $M^m (N - M)^{n-m}$,

б) $A_M^m A_{N-M}^{n-m}$.

Искомая вероятность при выборе с возвращением равна

$$C_n^m \frac{M^m (N - M)^{n-m}}{N^n} = C_n^m p^m (1 - p)^{n-m},$$

где $p = \frac{M}{N}$ — доля белых шаров в урне (очевидно, что абсолютные значения M и N здесь несущественны). При данных n и p совокупность чисел $C_n^m p^m (1 - p)^{n-m}$, $m = 0, 1, \ldots, n$, образует *биномиальное* распределение вероятностей. Эти вероятности вычисляются либо по специальным таблицам биномиального распределения, либо с помощью таблиц $\lg n!$ или таблиц $\lg C_n^m$.

При выборе без возвращения искомая вероятность равна

$$C_n^m \frac{A_M^m A_{N-M}^{n-m}}{A_N^n} = \frac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}.$$

Для данных значений N, M, n $(n \leqslant N)$ числа $C_n^m \dfrac{A_M^m A_{N-M}^{n-m}}{A_N^n}$ при $m = 0, 1, \ldots, \min(n, M)$ образуют *гипергеометрическое* распределение вероятностей.

Пример 2 (биномиальное распределение)**.** Идеальный опыт, заключающийся в 100 подбрасываниях симметричной (шансы на выпадение «орла» и «решки» при отдельном бросании одинаковы) монеты, включается в урновую схему с $n = 100$, $p = q = \dfrac{1}{2}$.

Пример 3 (гипергеометрическое распределение)**.** Обратимся к знаменитой генуэзской или французской лотерее, существовавшей в Европе с XVII до начала XX века. Суть ее в том, что, имея 90 номеров, можно было делать ставку на любое число номеров $k = 1, 2, 3, 4, 5$. Если ставка сделана на k номеров и все эти k номеров после розыгрыша имеются среди 5 номеров, «вышедших в тираж», то выигрыши таковы:

$$\begin{aligned} 15 &\text{ ставок при } k = 1;\\ 270 &\text{ ставок при } k = 2;\\ 5500 &\text{ ставок при } k = 3;\\ 75\,000 &\text{ ставок при } k = 4;\\ 1\,000\,000 &\text{ ставок при } k = 5. \end{aligned}$$

Подсчитаем вероятности выигрыша, пользуясь схемой выбора без возвращения при $N = 90$, $n = 5$, $M = k$, $m = k$. Имеем

$$C_5^k \frac{A_k^k A_{90-k}^{5-k}}{A_{90}^5} = \frac{C_{90-k}^{5-k}}{C_{90}^5}.$$

Для значений $k = 1, 2, 3, 4, 5$ эти вероятности равны соответственно

$$\frac{1}{18}, \ \frac{2}{801}, \ \frac{1}{11748}, \ \frac{1}{511033}, \ \frac{1}{43949268}.$$

События, которые обычно люди считают маловероятными, имеют вероятность порядка 10^{-5} (вероятность того, что при раздаче карт четырем игрокам хотя бы один получит полную масть, имеет порядок 10^{-11}). Подсчет вероятностей устраняет иллюзии в оценке шансов на выигрыш, например, при ставке на пять номеров в генуэзской лотерее.

Рассмотрим еще два поучительных примера подсчета вероятностей.

Пример 4 (задача Галилея)**.** Какой исход вероятнее при бросании трех игральных костей: 9 или 10 очков?

Некто заметил, что 9 очков при большом числе испытаний появляется реже, чем 10 очков, хотя он считал, что эти суммы очков на костях должны выпадать одинаково часто. Этот человек, как говорят, обратился за разъяснениями к Галилею, и тот показал, что выводы были основаны на неверном подсчете числа различных равновозможных исходов. При бросании трех игральных костей суммарное число очков на них может принимать значения от 3 до 18. В нижеследующей таблице помещены результаты неверных подсчетов: 6 случаев, соответствующих сумме 9 очков (левый столбец), и 6 случаев, соответствующих сумме 10 очков (правый столбец), которые не являются равновозможными элементарными исходами опыта. В круглых скобках справа указано правильное число равновозможных элементарных исходов, соответствующих каждому случаю.

$$
\begin{array}{rlrl}
9 = 1+2+6 & (6), & 10 = 1+3+6 & (6), \\
1+3+5 & (6), & 1+4+5 & (6), \\
1+4+4 & (3), & 2+2+6 & (3), \\
2+2+5 & (3), & 2+3+5 & (6), \\
2+3+4 & (6), & 2+4+4 & (3), \\
3+3+3 & (1), & 3+3+4 & (3).
\end{array}
$$

Итак, вывод о равновероятности двух событий был основан на неправильном подсчете (6 исходов и 6 исходов), тогда как выписанные выше исходы не являются элементарными и поэтому не равновероятны. На самом деле при бросании трех игральных костей каждое элементарное событие представляется тройкой чисел (i, j, k), где i, j, k — числа очков на первой, второй, третьей костях соответственно. Первое из выписанных событий {сумма очков равно 9} включает следующие элементарные исходы: $(1, 2, 6)$, $(1, 6, 2)$, $(2, 1, 6)$, $(2, 6, 1)$, $(6, 1, 2)$, $(6, 2, 1)$. Всего элементарных исходов $6^3 = 216$. Событию {сумма очков равна 9} благоприятствуют 25 элементарных исходов, а событию {сумма очков равна 10} — 27 исходов. Поэтому вероятность события {сумма очков 9} равна $\frac{25}{216} = 0{,}1157$, а вероятность события {сумма очков 10} равна $\frac{27}{216} = 0{,}1250$ и разность этих вероятностей равна 0,0092. Возникает вопрос: сколько раз нужно осуществить данный опыт, чтобы на практике испытать эту разницу?

Пример 5 («парадокс» де Мере)**.** По легенде известный игрок де Мере задал Паскалю вопрос: сколько раз нужно бросить одну правильную кость, чтобы вероятность события {хотя бы раз выпадет 6} превосходила $\frac{1}{2}$, и сколько раз нужно бросить две правильные ко-

сти, чтобы вероятность события {хотя бы раз на обеих костях выпадет 6} превосходила $\frac{1}{2}$? Речь и в том и в другом случае идет о наименьшем числе бросаний. Полагаясь на ошибочные рассуждения, де Мере пришел к выводу, что в первом случае достаточно 4, а во втором — 24 бросаний. Будучи уверенным, что это так, де Мере неоднократно держал пари на то, что при 24 бросаниях двух костей хотя бы раз выпадет одновременно 6 очков на обеих костях, но со временем заметил, что в среднем он проигрывает. Как показал Паскаль, в первом случае правильный ответ де Мере был «угадан»: вероятность того, что при 4 бросаниях кости хотя бы раз выпадет 6 очков, немного больше $\frac{1}{2}$, а именно равна $1-\frac{5^4}{6^4}=0{,}51775$. Вероятность того, что при 24 бросаниях двух костей хотя бы раз получится результат (6,6), равна $1-\frac{35^{24}}{36^{24}}=0{,}49140$, т. е. немного меньше $\frac{1}{2}$. Можно вновь задать вопрос о том, сколько наблюдений необходимо сделать, чтобы различить эти вероятности. □

В связи с поставленными проблемами уместно сделать замечание о соотношении прямой и обратной задач теории вероятностей, не выходя пока за пределы урновой схемы.

Прямая задача (задача вероятностного прогноза) заключается в том, чтобы по известному составу урны вычислить вероятность того или иного соотношения шаров в выборке.

Обратная задача состоит в том, чтобы определить неизвестный состав урны по соотношению шаров в выборке из этой урны. Это задача математической статистики, которой посвящена гл. 5.

Поставленные выше вопросы о различении вероятностей и о числе наблюдений, необходимых для этого, соответствуют специально сформулированной обратной задаче: пусть состав урны с белыми и черными шарами неизвестен, но имеется предположение о том, что доля белых шаров в урне либо p_1, либо p_2, причем p_1 и p_2 — заданные числа между 0 и 1. Безошибочный ответ на вопрос, какова доля белых шаров в урне — p_1 или p_2, принципиально невозможен, однако, произведя выбор с возвращением фиксированного объема n, можно установить такое значение n, которое необходимо для различения указанных гипотез с заданной точностью. Точность определяется малой вероятностью ошибки. Рассмотрим пример.

Пример 6 (проверка гипотезы о составе урны)**.** Пусть имеются две гипотезы о доле белых шаров в урне — гипотеза H_1: $p=p_1=0{,}9$ и гипотеза H_2: $p=p_2=0{,}1$. Будем считать, что шары в урне хо-

рошо перемешаны. Наудачу вынем из урны один шар и примем следующее правило: если вынут белый шар, то верна гипотеза H_1, т. е. $p = p_1$; если вынут черный шар, то будем считать, что верна гипотеза H_2, т. е. $p = p_2$. Очевидно, что, принимая каждое из решений, можно ошибиться. Легко подсчитать вероятности ошибок. Пусть, например, верна гипотеза H_2, но вынут белый шар и мы приняли гипотезу H_1. Таким образом, вероятность ошибки равна вероятности того, что шар, извлеченный из урны с долей белых шаров $p_2 = 0{,}1$, окажется белым, т. е. равна 0,1. Вероятность другой возможной ошибки в рассматриваемом конкретном случае также равна 0,1. Это означает, что при следовании принятому правилу, называемому критерием проверки двух гипотез, мы будем ошибаться в среднем в одном случае из 10. Вероятности ошибок можно уменьшить, вынимая из урны не один шар, а три шара с возвращением шаров каждый раз в урну. В этом случае естественно следующее правило поведения: если два или три шара белые, то принимается гипотеза H_1, а если соотношение шаров в выборке обратное, то принимается гипотеза H_2. Вероятность первой из этих ошибок совпадает с вероятностью вытащить два или три белых шара из урны, в которой доля белых шаров равна $p_2 = 0{,}1$. Эта вероятность равна $p_2^3 + 3p_2^2(1 - p_2) = 0{,}028$ и совпадает с вероятностью другой возможной ошибки. Увеличивая число шаров в выборке, можно значительно уменьшить вероятность ошибок, как показывает следующая табличка.

Объем выборки	Вероятность ошибки
5	0,00856
7	0,00273
11	0,00030

Если заранее задать вероятности ошибок, то можно решить задачу об объеме выборки, необходимом для различения двух гипотез о доле белых шаров. Подробнее об этом пойдет речь в гл. 5, посвященной задачам математической статистики.

Глава 2

Основные понятия математической теории вероятностей

§ 1. Конечное вероятностное пространство

В первую очередь к основным понятиям относятся: пространство элементарных событий, случайное событие, вероятность, случайная величина, математическое ожидание. О первых трех мы уже получили наглядное представление, теперь перейдем к строгим определениям.

Мы рассматриваем эксперименты, каждый из которых может закончиться одним и только одним элементарным исходом из общего числа s. Элементарные исходы опыта условимся обозначать $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_s$ и называть *элементарными событиями*. Основное свойство элементарных событий — они неразложимы и взаимно исключают друг друга. Совокупность всех элементарных событий $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_s\}$ будем называть *пространством элементарных событий*. Предположим, что каждому элементарному событию ω_i поставлено в соответствие такое число p_i, что

1) $p_i \geqslant 0$, $i = 1, \ldots, s$,

2) $\sum\limits_{i=1}^{s} p_i = 1$.

Числа p_i называются *вероятностями* элементарных событий ω_i (иногда мы будем опускать индексы у элементарных событий и употреблять обозначение $p(\omega)$ для всех ω). Выбор математической модели равнозначен перечислению элементарных событий и указанию соответствующих им вероятностей. Числа p_i можно выбирать по-разному, мы считаем p_i уже выбранными.

Всякое событие A, связанное с данным экспериментом, задается как совокупность элементарных событий, с каждым из которых оно осуществляется, и поэтому является подмножеством пространства Ω: $A = \{\omega_{i_1}, \ldots, \omega_{i_k}\}$, $1 \leqslant k \leqslant s$. К числу всех событий причисляют Ω и пустое множество $\varnothing$, не содержащее элементарных событий.

Вероятностью события A называется сумма вероятностей входящих в него элементарных событий: если $A = \{\omega_{i_1}, \ldots, \omega_{i_k}\}$, то

$$\mathrm{P}\{A\} = p_{i_1} + \ldots + p_{i_k}, \quad \text{или} \quad \mathrm{P}\{A\} = \sum_{\omega \in A} p(\omega).$$

Функция $\mathrm{P}\{A\}$ — функция множеств, область определения которой в рассматриваемом конечном случае совпадает с классом всех подмножеств пространства Ω. Эта функция называется распределением вероятностей на Ω. Если все элементарные события равновероятны, т. е.

$$p_1 = p_2 = \ldots = p_s = \frac{1}{s},$$

то мы приходим к классическому, исторически самому первому определению вероятности:

$$\mathrm{P}\{A\} = \frac{k}{s} = \frac{\text{число элементарных событий, благоприятствующих } A}{\text{число всех элементарных событий}}.$$

Пространство элементарных событий Ω вместе с введенным на нем распределением вероятностей составляют вероятностную модель (Ω, P).

Замечание. Пространство Ω может состоять из счетного числа элементарных исходов, например, пространство, соответствующее эксперименту, состоящему в извлечении шаров из урны до тех пор, пока не появится шар с номером 1. В этом случае в определении вероятностей конечные суммы заменяются рядами. □

Перед тем как указать свойства вероятности, остановимся на операциях над событиями, которые соответствуют обычным операциям над множествами.

Объединение двух событий $A_1 \cup A_2$ — совокупность всех элементарных событий, входящих в A_1 или в A_2.

Пересечение или *произведение* двух событий $A_1 \cap A_2$ — совокупность всех элементарных событий, входящих одновременно в A_1 и в A_2. Два события A_1 и A_2, для которых $A_1 \cap A_2 = \varnothing$, называются *несовместными*.

Разность двух событий $A_1 \setminus A_2$ — совокупность тех элементарных событий, которые входят в A_1, но не входят в A_2.

Противоположное событие, дополнение к событию A — разность $\Omega \setminus A = \overline{A}$.

Операции объединения и пересечения событий определяются аналогично для любого числа событий $A_1, \ldots, A_n$, принадлежащих

одному и тому же пространству элементарных событий Ω. Особенно часто используются следующие соотношения «двойственности»:

- для двух событий:

$$\overline{A_1 \cup A_2} = \bar{A}_1 \cap \bar{A}_2, \quad \overline{A_1 \cap A_2} = \bar{A}_1 \cup \bar{A}_2,$$

- для любого конечного числа событий $A_1, \ldots, A_s$:

$$\overline{\bigcup_{k=1}^{s} A_k} = \bigcap_{k=1}^{s} \bar{A}_k, \quad \overline{\bigcap_{k=1}^{s} A_k} = \bigcup_{k=1}^{s} \bar{A}_k.$$

Отметим следующие главные свойства вероятности:

1) *неотрицательность*: $\mathrm{P}\{A\} \geqslant 0$;

2) *нормированность*: $\mathrm{P}(\Omega) = 1$;

3) *аддитивность*: если $A_1 \cap A_2 = \varnothing$, то $\mathrm{P}\{A_1 \cup A_2\} = \mathrm{P}\{A_1\} + \mathrm{P}\{A_2\}$.

Доказательство свойства 3 следует непосредственно из определения вероятности:

$$\mathrm{P}\{A_1 \cup A_2\} = \sum_{\omega \in A_1 \cup A_2} \mathrm{P}(\omega) = \sum_{\omega \in A_1} \mathrm{P}(\omega) + \sum_{\omega \in A_2} \mathrm{P}(\omega) = \mathrm{P}\{A_1\} + \mathrm{P}\{A_2\}.$$

По индукции это свойство доказывается для любого конечного числа попарно несовместных событий. □

Отметим, кроме того, еще свойства, которые являются следствиями уже перечисленных:

4) $\mathrm{P}\{\bar{A}\} = 1 - \mathrm{P}\{A\}$;

5) $\mathrm{P}\{\varnothing\} = 0$;

6) $\mathrm{P}\{A_1 \setminus A_2\} = \mathrm{P}\{A_1 \cap \bar{A}_2\}$;

7) для любых A_1 и A_2 имеет место формула

$$\mathrm{P}\{A_1 \cup A_2\} = \mathrm{P}\{A_1\} + \mathrm{P}\{A_2\} - \mathrm{P}\{A_1 \cap A_2\}.$$

Доказательство свойства 7 просто:

$$\mathrm{P}\{A_1 \cup A_2\} = \mathrm{P}\{A_1\} + \mathrm{P}\{A_2 \setminus A_1 \cap A_2\},$$
$$\mathrm{P}\{A_2 \setminus A_1 \cap A_2\} = \mathrm{P}\{A_2\} - \mathrm{P}\{A_1 \cap A_2\}. \qquad \square$$

Свойство 7 можно обобщить для любого числа событий $A_1, \ldots, A_n$:

$$\mathrm{P}\{A_1 \cup \ldots \cup A_n\} = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}\{A_i\} - \sum_{i<j} \mathrm{P}\{A_i \cap A_j\} +$$
$$+ \sum_{i<j<k} \mathrm{P}\{A_i \cap A_j \cap A_k\} + \ldots + (-1)^{n-1} \mathrm{P}\{A_1 \cap \ldots \cap A_n\}.$$

Последняя формула доказывается по индукции, но мы ее докажем иным способом несколько позже (см. с. 28).

Отметим, что события Ω и $\varnothing$, которым соответствуют вероятности 1 и 0, называются *достоверным* и *невозможным* событиями (эти понятия имеют смысл только для данного пространства элементарных событий).

Рассмотрим совокупность $\mathrm{D}\{A_1, \ldots, A_n\}$ событий из Ω, которые обладают свойствами $\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k = \Omega$ и $A_k \cap A_j = \varnothing$ при $k \neq j$. Тогда D называют *конечным разбиением пространства* Ω, а $A_1, \ldots, A_n$ — *полной группой* событий.

§ 2. Условная вероятность. Формула полной вероятности

Определение. Пусть $A, B \subset \Omega$ и $\mathrm{P}\{B\} > 0$. Тогда *условной вероятностью* события A при условии, что произошло событие B (или кратко: условной вероятностью события A при условии B), называется отношение

$$\mathrm{P}\{A|B\} = \frac{\mathrm{P}\{A \cap B\}}{\mathrm{P}\{B\}}.$$

Вероятность $\mathrm{P}\{A\}$ называют по отношению к условной вероятности $\mathrm{P}\{A|B\}$ *безусловной* вероятностью события A. Условная вероятность $\mathrm{P}\{A|B\}$ в сравнении с безусловной вероятностью $\mathrm{P}\{A\}$ показывает, как изменяются шансы события A, если поступает дополнительная информация о том, что произошло событие B. В случае, когда $\mathrm{P}\{B\} = 0$, полагают $\mathrm{P}\{A|B\} = 0$.

Пример. Производится трехкратное бросание симметричной монеты. Событие «орел» обозначаем 1, а событие «решка» обозначаем 0. Пространство Ω насчитывает $2^3 = 8$ элементарных событий:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= (0, 0, 0), \quad & \omega_5 &= (1, 1, 0), \\ \omega_2 &= (1, 0, 0), \quad & \omega_6 &= (1, 0, 1), \\ \omega_3 &= (0, 1, 0), \quad & \omega_7 &= (0, 1, 1), \\ \omega_4 &= (0, 0, 1), \quad & \omega_8 &= (1, 1, 1). \end{aligned}$$

Рассмотрим события $A = \{$«орел» ровно 1 раз$\}$ и $B = \{$«орел» нечетное число раз$\}$. Очевидно, что $\mathrm{P}\{A\} = \frac{3}{8}$, $\mathrm{P}\{B\} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$ и $\mathrm{P}\{A \mid B\} = \frac{3}{4}$, так как $A = \{\omega_2, \omega_3, \omega_4\}$, $B = \{\omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_8\}$.

Следующие две теоремы называются *теоремами умножения вероятностей* (ср. с теоремами сложения на предыдущей странице).