Герасимчук В.С.
Васильченко Г.С.
Кравцов В.И.

Курс классической математики в примерах и задачах

МОСКВА
ФИЗМАТЛИТ ®

УДК [512.64+514.12+517](075.8)
ББК 22.161я73
Г 37

Герасимчук В.С., Васильченко Г.С., Кравцов В.И. **Курс классической математики в примерах и задачах.** В 3 т. Т.2. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. — 504 с. — ISBN 978-5-9221-0890-4.

Пособие соответствует программе курса высшей математики для студентов инженерно-технических специальностей и представляет собой достаточно полное и доступное руководство к решению задач и примеров традиционного курса высшей математики. Пособие построено по принципу проведения практических занятий — каждый параграф соответствует определенной теме и включает краткую сводку основных теоретических положений, большое число детально решенных типовых задач и примеров, определенное количество задач и примеров для самостоятельной работы и контрольные вопросы, которые предполагают глубокое понимание теоретического материала.

Допущено Министерством образования и науки РФ в качестве учебного пособия для студентов вузов, обучающихся по техническим специальностям.

ISBN 978-5-9221-0890-4

ОГЛАВЛЕНИЕ

Глава 9

НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

§ 9.1. Непосредственное интегрирование

Функция $F(x)$, связанная с функцией $f(x)$ соотношением $F'(x) = f(x)$ или $dF(x) = f(x)dx$, где $x \in X$, называется *первообразной* функции $f(x)$ на множестве X.

Совокупность всех первообразных функции $f(x)$ на множестве X называется *неопределенным интегралом* от функции $f(x)$ и обозначается символом $\int f(x)dx$.

Если $F(x)$ — одна из первообразных функции $f(x)$ на множестве X, то

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

где C — произвольная постоянная.

Таблица основных интегралов

1. $\int x^\alpha dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ (\alpha \neq -1)$;

2. $\int x^{-1} dx = \int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$;

3. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C,\ (a > 0,\ a \neq 1)$;

4. $\int e^x\, dx = e^x + C$;

5. $\int \sin x\, dx = -\cos x + C$;

6. $\int \cos x\, dx = \sin x + C$;

7. $\int \operatorname{tg} x\, dx = -\ln|\cos x| + C$;

8. $\int \operatorname{ctg} x\, dx = \ln|\sin x| + C$;

9. $\int \operatorname{sh} x\, dx = \operatorname{ch} x + C$;

10. $\int \operatorname{ch} x\,dx = \operatorname{sh} x + C;$

11. $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C;$

12. $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| + C;$

13. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C;$

14. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C;$

15. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C;$

16. $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C;$

17. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C = -\frac{1}{a}\operatorname{arcctg}\frac{x}{a} + C^*,\ a \neq 0;$

18. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C = -\arccos\frac{x}{a} + C^*,\ a > 0;$

19. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a}\right| + C,\ a \neq 0;$

20. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C,\ a \neq 0.$

Основные табличные интегралы получаются путем обращения соответствующих формул таблицы производных.

Основные свойства неопределенного интеграла

I. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x),$

II. $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx,$

III. $\int dF(x) = F(x) + C,$

IV. $\int (f(x) \pm \varphi(x))\,dx = \int f(x)dx \pm \int \varphi(x)dx,$

V. $\int Af(x)dx = A\int f(x)dx,$

где A — постоянная, отличная от нуля.

Теорема (*об инвариантности формул интегрирования*). Всякая формула интегрирования сохраняет свой вид при подстановке вместо независимой переменной x любой дифференцируемой функции от нее $u = u(x)$, т. е.

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C, \quad \int f(u)\,du = F(u) + C.$$

Задача непосредственного интегрирования состоит в том, чтобы свести заданный интеграл к известному табличному интегралу [1]), используя свойства неопределенного интеграла и тождественные преобразования.

Правильность результата интегрирования проверяется дифференцированием найденной первообразной, т. к. $(F(x)+C)' = f(x)$.

Пример 9.1. Найти интегралы. Результаты интегрирования в случаях (г) и (д) проверить дифференцированием:

а) $\int dx$; б) $\int \left(5x^2 + x - 3\right) dx$;

в) $\int \dfrac{\left(x^4-1\right)(2x+1)}{x^2}\, dx$; г) $\int \left(4x^7 - 3\sqrt[5]{x^3} + \dfrac{2}{x^4}\right) dx$;

д) $\int \left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{t}} + t\sqrt{t} + 2\right) dt$.

Решение. Используем свойства неопределенного интеграла для сведения заданных интегралов к табличным. Цель будет достигнута, если, сравнивая заданный дифференциал (подынтегральное выражение) с дифференциалами таблицы основных интегралов, мы обнаружим его среди табличных.

Приведенные в этом примере интегралы сводятся в основном к интегралу от *степенной функции*, т. е. к табличным интегралам **1** и **2**:

а) Можно воспользоваться табличным интегралом **1** при $\alpha = 0$ или применить свойство **III**:

$$\boxed{\int dx = x + C}$$

Значение этого интеграла следует запомнить.

б) Сначала применим свойства неопределенного интеграла **IV** и **V**, т. е. представим интеграл от алгебраической суммы в виде алгебраической суммы интегралов и вынесем постоянные множители за знаки интегралов. Затем воспользуемся табличным интегралом **1**:

$$\int \left(5x^2 + x - 3\right) dx = 5\int x^2\, dx + \int x\, dx - 3\int dx = 5 \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 3x + C.$$

Замечание. Вообще говоря, при каждом отдельном интегрировании следует писать произвольную постоянную. Мы же пишем только одну произвольную постоянную C в конечном результате, обозначая ею алгебраическую сумму всех отдельных произвольных постоянных.

[1]) «Интегрирование в сущности есть *процесс целесообразно направленных гаданий и попыток*, для облегчения которых составлена таблица т. н. основных интегралов» (акад. Н. Н. Лузин)

в) Если в числителе раскрыть скобки и полученное выражение почленно разделить на знаменатель, получим интеграл от алгебраической суммы степенных функций. Применяя свойства **IV** и **V** и табличные интегралы **1** и **2**, найдем

$$\int \frac{(x^4-1)(2x+1)}{x^2}\,dx = \int \frac{2x^5+x^4-2x-1}{x^2}\,dx =$$

$$= \int \left(2x^3+x^2-\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}\right)\,dx = 2\int x^3dx + \int x^2dx - 2\int \frac{dx}{x} - \int x^{-2}dx =$$

$$= 2\,\frac{x^{3+1}}{3+1} + \frac{x^{2+1}}{2+1} - 2\ln|\,x\,| - \frac{x^{-2+1}}{-2+1} + C = \frac{x^4}{2} + \frac{x^3}{3} - 2\ln|\,x\,| + \frac{1}{x} + C.$$

г) С помощью свойств **IV** и **V** сведем интеграл к алгебраической сумме интегралов. Все они соответствуют табличному интегралу от степенной функции: для 1-й из них $\alpha = 7$, для 2-й $\alpha = 3/5$, для 3-й $\alpha = -4$. Следовательно,

$$\int \left(4x^7 - 3\sqrt[5]{x^3} + \frac{2}{x^4}\right)dx = 4\int x^7dx - 3\int x^{3/5}dx + 2\int x^{-4}dx =$$

$$= 4\,\frac{x^{7+1}}{7+1} - 3\,\frac{x^{3/5+1}}{\frac{3}{5}+1} + 2\,\frac{x^{-4+1}}{-4+1} + C = \frac{x^8}{2} - \frac{15}{8}x^{8/5} - \frac{2}{3x^3} + C.$$

Убедимся, что первообразная найдена верно:

$$\left(\frac{x^8}{2} - \frac{15}{8}\,x^{8/5} - \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{x^3} + C\right)' =$$

$$= \frac{8}{2}\,x^7 - \frac{15}{8}\cdot\frac{8}{5}\,x^{3/5} - \frac{2}{3}\,(-3)\,x^{-4} + 0 = 4x^7 - 3x^{3/5} + 2x^{-4} =$$

$$= 4x^7 - 3\sqrt[5]{x^3} + \frac{2}{x^4}.$$

Действительно, в результате дифференцирования получили исходную подынтегральную функцию.

д) Здесь переменная интегрирования обозначена буквой t. Сведем этот интеграл к алгебраической сумме интегралов от степенной функции t^α и воспользуемся табличным интегралом **1**:

$$\int \left(\frac{1}{\sqrt[3]{t}} + t\sqrt{t} + 2\right)dt = \int \left(\frac{1}{t^{1/3}} + t^{3/2} + 2\right)dt =$$

$$= \int \left(t^{-1/3} + t^{3/2} + 2\right)dt = \int t^{-1/3}\,dt + \int t^{3/2}\,dt + 2\int dt =$$

$$= \frac{3}{2}\,t^{2/3} + \frac{2}{5}\,t^{5/2} + 2t + C = \frac{3}{2}\sqrt[3]{t^2} + \frac{2}{5}\sqrt{t^5} + 2t + C.$$

Проверим правильность интегрирования:

$$\left(\frac{3}{2}\,t^{2/3}+\frac{2}{5}\,t^{5/2}+2t+C\right)'=\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}\,t^{-1/3}+\frac{2}{5}\cdot\frac{5}{2}\,t^{3/2}+2=$$
$$=t^{-1/3}+t^{3/2}+2=\frac{1}{\sqrt[3]{t}}+t\sqrt{t}+2.$$

Пример 9.2. Найти интегралы от показательных функций. Результат интегрирования в случае (б) проверить дифференцированием:

а) $\displaystyle\int(7^x-2e^x+4)\,dx$; б) $\displaystyle\int\frac{2\cdot3^x+3\cdot2^x}{5^x}\,dx$.

Р е ш е н и е. а) Применим свойства неопределенного интеграла **IV** и **V** и воспользуемся табличными интегралами **1**, **3** и **4**:

$$\int(7^x-2e^x+4)\,dx=\int7^x\,dx-2\int e^x\,dx+4\int dx=\frac{7^x}{\ln7}-2e^x+4x+C.$$

б) Выполним почленное деление и выделим в подынтегральном выражении показательные функции:

$$\int\frac{2\,3^x+3\,2^x}{5^x}\,dx=\int\left(2\,\frac{3^x}{5^x}+3\,\frac{2^x}{5^x}\right)dx=$$
$$=\int\left[2\,\left(\frac{3}{5}\right)^x+3\,\left(\frac{2}{5}\right)^x\right]dx=2\int\left(\frac{3}{5}\right)^x dx+3\int\left(\frac{2}{5}\right)^x dx=$$
$$=2\cdot\frac{\left(\frac{3}{5}\right)^x}{\ln\frac{3}{5}}+3\cdot\frac{\left(\frac{2}{5}\right)^x}{\ln\frac{2}{5}}+C.$$

С помощью проверки убеждаемся в правильности найденной первообразной:

$$\left(\frac{2}{\ln\frac{3}{5}}\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^x+\frac{3}{\ln\frac{2}{5}}\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^x+C\right)'=$$
$$=\frac{2}{\ln\frac{3}{5}}\,\left(\frac{3}{5}\right)^x\ln\frac{3}{5}+\frac{3}{\ln\frac{2}{5}}\,\left(\frac{2}{5}\right)^x\ln\frac{2}{5}=2\left(\frac{3}{5}\right)^x+3\left(\frac{2}{5}\right)^x.$$

Пример 9.3. Найти интегралы от тригонометрических функций:

а) $\displaystyle\int(\sin x-4\operatorname{ctg}x)\,dx$; б) $\displaystyle\int\operatorname{tg}^2\varphi\,d\varphi$;

в) $\displaystyle\int\frac{dx}{\cos^2x\,\sin^2x}$; г) $\displaystyle\int\frac{\cos3x-\cos x}{\sin2x}\,dx$.

Решение. Чтобы свести данные интегралы к табличным, будем выполнять по мере необходимости простые тригонометрические преобразования.

а) $$\int (\sin x - 4\operatorname{ctg} x)\,dx = \int \sin x\,dx - 4\int \operatorname{ctg} x\,dx =$$
$$= -\cos x - 4\ln|\sin x| + C \quad \text{(табличные интегралы } \mathbf{5}, \mathbf{8}\text{)}.$$

б) $$\int \operatorname{tg}^2 \varphi\,d\varphi = \int \frac{\sin^2\varphi}{\cos^2\varphi}\,d\varphi = \int \frac{1-\cos^2\varphi}{\cos^2\varphi}\,d\varphi = \int \left(\frac{1}{\cos^2\varphi} - 1\right) d\varphi =$$
$$= \int \frac{d\varphi}{\cos^2\varphi} - \int d\varphi = \operatorname{tg}\varphi - \varphi + C \quad \text{(табличные интегралы } \mathbf{14}, \mathbf{1}\text{)}.$$

в) Используя основное тригонометрическое тождество $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, представим заданный интеграл в виде суммы двух табличных интегралов:

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x\,\sin^2 x} = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x\,\sin^2 x}\,dx =$$
$$= \int \left(\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x\,\sin^2 x} + \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x\,\sin^2 x}\right) dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} + \int \frac{dx}{\sin^2 x} =$$
$$= \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x + C \quad \text{(табличные интегралы } \mathbf{13}, \mathbf{14}\text{)}.$$

г) Используя тригонометрическую формулу разности косинусов

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\,\sin\frac{\alpha+\beta}{2},$$

получим

$$\int \frac{\cos 3x - \cos x}{\sin 2x}\,dx = -\int \frac{2\sin x\,\sin 2x}{\sin 2x}\,dx = -2\int \sin x\,dx = 2\cos x + C.$$

Пример 9.4. Найти интегралы и проверить результаты дифференцированием:

а) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{25-x^2}}$; б) $\displaystyle\int \left(\frac{6}{x^2-9} - \frac{1}{x^2+9}\right) dx.$

Решение. а) Если обозначить $25 = a^2$, то получим табличный интеграл **18**. Следовательно,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{25-x^2}} = \arcsin\frac{x}{5} + C.$$

Дифференцируя результат

$$\left(\arcsin\frac{x}{5}+C\right)'=\frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{x^2}{25}}}\ \left(\frac{x}{5}\right)'=\frac{5}{\sqrt{25-x^2}}\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{\sqrt{25-x^2}},$$

получаем исходную подынтегральную функцию.

б) Сводя интеграл от алгебраической суммы к алгебраической сумме интегралов, получим соответственно табличные интегралы **20** и **17**, где $a^2=9$:

$$\int\left(\frac{6}{x^2-9}-\frac{1}{x^2+9}\right)dx=6\int\frac{dx}{x^2-9}-\int\frac{dx}{x^2+9}=$$

$$=6\,\frac{1}{2\cdot 3}\ln\left|\frac{x-3}{x+3}\right|-\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{3}+C=\ln\left|\frac{x-3}{x+3}\right|-\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{3}+C.$$

Убедимся в правильности полученного результата:

$$\left(\ln\left|\frac{x-3}{x+3}\right|-\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{3}+C\right)'=\frac{x+3}{x-3}\left(\frac{x-3}{x+3}\right)'-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1+\dfrac{x^2}{9}}\cdot\left(\frac{x}{3}\right)'=$$

$$=\frac{x+3}{x-3}\cdot\frac{x+3-(x-3)}{(x+3)^2}-\frac{1}{3}\cdot\frac{9}{9+x^2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{6}{(x-3)(x+3)}-\frac{1}{9+x^2}=$$

$$=\frac{6}{x^2-9}-\frac{1}{9+x^2}.$$

Рассмотрим *более сложные* примеры. Чтобы найти неопределенные интегралы от предложенных функций, необходимо предварительно выполнить тождественные преобразования, приводящие заданные интегралы к табличным.

Пример 9.5. Найти интегралы:

а) $\displaystyle\int\frac{dx}{10x^2+9}$; б) $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}}$; в) $\displaystyle\int\frac{dx}{3-2x^2}$.

Решение. Наличие в подынтегральных выражениях коэффициента при x^2 не позволяет отождествить заданные интегралы соответственно с табличными интегралами **17**, **18** и **20**. Следует вынести этот коэффициент за знак интеграла:

а) $$\int\frac{dx}{10x^2+9}=\frac{1}{10}\int\frac{dx}{x^2+\dfrac{9}{10}}=\frac{1}{10}\int\frac{dx}{x^2+\left(\dfrac{3}{\sqrt{10}}\right)^2}=$$

$$=\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{\dfrac{3}{\sqrt{10}}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\dfrac{3}{\sqrt{10}}}+C=\frac{1}{\sqrt{10}}\cdot\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{10}\,x}{3}+C$$

(табличный интеграл **17**, где $a=\dfrac{3}{\sqrt{10}}$);

б) $$\int \frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{\frac{1}{4}-x^2}} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - x^2}} = =$$

$$= \frac{1}{2}\arcsin\frac{x}{\frac{1}{2}} + C = \frac{1}{2}\arcsin 2x + C$$

(табличный интеграл **18**, где $a = \frac{1}{2}$);

в) $$\int \frac{dx}{3-2x^2} = -\frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\frac{3}{2}}}\ \ln\left|\frac{x-\sqrt{\frac{3}{2}}}{x+\sqrt{\frac{3}{2}}}\right| + C =$$

$$= -\frac{1}{4}\sqrt{\frac{2}{3}}\ \ln\left|\frac{\sqrt{2}\,x-\sqrt{3}}{\sqrt{2}\,x+\sqrt{3}}\right| + C$$ (табличный интеграл **20**, где $a = \sqrt{\frac{3}{2}}$).

Пример 9.6. Найти интегралы от алгебраических функций:

а) $\displaystyle\int \frac{1+3x^2}{\left(x^2+1\right)x^2}dx$; б) $\displaystyle\int \left(1+\frac{1}{\sqrt{4+x^2}}\right)^2 dx$;

в) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{2+x^2} - 5\sqrt{2-x^2}}{\sqrt{4-x^4}}\, dx$; г) $\displaystyle\int \frac{dx}{1-x^4}$.

Решение. а) Выделим в числителе слагаемое $1+x^2$ и выполним почленное деление:

$$\int \frac{1+3x^2}{\left(x^2+1\right)x^2}\,dx = \int \frac{\left(1+x^2\right)+2x^2}{\left(1+x^2\right)x^2}\,dx =$$

$$= \int \left(\frac{1+x^2}{\left(1+x^2\right)x^2} + \frac{2x^2}{\left(1+x^2\right)x^2}\right)dx = \int \left(\frac{1}{x^2}+\frac{2}{1+x^2}\right)dx =$$

$$= \int \frac{dx}{x^2} + 2\int \frac{dx}{1+x^2} = -\frac{1}{x} + 2\operatorname{arctg} x + C$$ (табличные интегралы **1**, **17**);

б) Возведем двучлен в квадрат и перейдем к сумме интегралов:

$$\int \left(1+\frac{1}{\sqrt{4+x^2}}\right)^2 dx = \int \left(1+\frac{2}{\sqrt{4+x^2}}+\frac{1}{4+x^2}\right)dx =$$

$$= \int dx + 2\int \frac{dx}{\sqrt{4+x^2}} + \int \frac{dx}{4+x^2} = x + 2\ln\left(x+\sqrt{x^2+4}\right) +$$

$$+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}+C \quad \text{(табличные интегралы } \mathbf{1}, \mathbf{19}, \mathbf{17}\text{);}$$

Здесь аргумент логарифма положителен, поэтому знак модуля опускаем.

в) Раскроем разность квадратов в знаменателе и выполним почленное деление:

$$\int \frac{\sqrt{2+x^2}-5\sqrt{2-x^2}}{\sqrt{4-x^4}}\,dx = \int \frac{\sqrt{2+x^2}-5\sqrt{2-x^2}}{\sqrt{(2-x^2)(2+x^2)}}\,dx =$$

$$= \int \frac{dx}{\sqrt{2-x^2}} - 5\int \frac{dx}{\sqrt{2+x^2}} = \arcsin\frac{x}{\sqrt{2}} - 5\ln\left(x+\sqrt{2+x^2}\right)+C$$

(табличные интегралы **18**, **19**)

г) Знаменатель подынтегральной функции разложим на множители, числитель умножим на 2 и, чтобы выражение не изменилось, умножим интеграл на $\frac{1}{2}$:

$$\int \frac{dx}{1-x^4} = \int \frac{dx}{\left(1-x^2\right)\left(1+x^2\right)} = \frac{1}{2}\int \frac{2\,dx}{\left(1-x^2\right)\left(1+x^2\right)}.$$

Теперь прибавим и вычтем в числителе x^2 и почленно разделим числитель на знаменатель:

$$\frac{1}{2}\int \frac{\left(1+x^2\right)+\left(1-x^2\right)}{\left(1-x^2\right)\left(1+x^2\right)}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{1-x^2} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{1+x^2} =$$

$$= -\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + C \quad \text{(табличные интегралы } \mathbf{17}, \mathbf{20}\text{).}$$

Замечание. В некоторых случаях полезно записать в числителе подынтегральной функции взаимно уничтожающиеся слагаемые, имея в виду последующее почленное деление числителя на знаменатель. Этот прием и продемонстрирован в последнем примере.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Что служит *первообразной* для функции $f(x)$, заданной на множестве X?
2. Можно ли утверждать, что всякая непрерывная функция имеет бесчисленное множество первообразных, причем любые две из них отличаются друг от друга только постоянным слагаемым? Докажите.
3. Что называется *неопределенным интегралом* от функции $f(x)$ на некотором множестве?

4. Имеет ли геометрическое истолкование неопределенный интеграл?
5. Сформулировать и доказать *основные свойства* неопределенного интеграла.
6. Проверить справедливость *таблицы основных интегралов* дифференцированием.
7. Почему в первообразной табличного интеграла
$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$$
переменная x берется по модулю?
8. Известно, что
$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C = F(x) + C$$
и в то же время
$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\arccos x + C^* = \Phi(x) + C^*,$$
где $F(x) \neq \Phi(x)$. Как это объяснить? Не противоречит ли это теореме о виде первообразной?
9. Известно, что
$$\int \frac{du}{a^2+u^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{u}{a} + C = F(x) + C,$$
тогда как
$$\int \frac{du}{a^2+u^2} = -\frac{1}{a}\operatorname{arcctg}\frac{u}{a} + C^* = \Phi(x) + C^*,$$
где $F(x) \neq \Phi(x)$. С чем это связано? Не противоречит ли это теореме о виде первообразной?
10. Дана непрерывная периодическая функция $f(x)$, где $x \in R$. Можно ли утверждать, что первообразная этой функции также будет периодической функцией? Привести пример.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Найти интегралы:

1. $\int (x^2 - 3x + 15)\, dx$, **2**. $\int x\sqrt[3]{x}\, dx$,

3. $\int \left(4^x - \frac{2}{1+x^2}\right) dx$, **4**. $\int \frac{(x+2)^2}{x^2} dx$,

5. $\int \frac{4x - 2\sqrt{x} + 1}{x}\, dx$, **6**. $\int (\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)\, dx$,

7. $\int (2-5e^x)\,dx$, **8**. $\int \frac{1+\cos 2x}{\cos x}\,dx$,

9. $\int \frac{\sin 2x}{\cos x}\,dx$, **10**. $\int \left(3\operatorname{tg} x - \frac{1}{\operatorname{tg} x}\right)dx$,

11. $\int \frac{dx}{1-\cos 2x}$, **12**. $\int \frac{\sin x - \sin 3x}{\cos 2x}\,dx$,

13. $\int \frac{2\cos^3 x}{1+\cos 2x}\,dx$, **14**. $\int \frac{1+\cos^2 x}{1+\cos 2x}\,dx$,

15. $\int \frac{\cos 4x}{\cos 2x + \sin 2x}\,dx$, **16**. $\int \frac{5+\sqrt{2-x^2}}{\sqrt{2-x^2}}\,dx$,

17. $\int \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$, **18**. $\int \frac{\sqrt{4+x^2}-\sqrt{4-x^2}}{\sqrt{16-x^4}}\,dx$,

19. $\int \frac{4\sqrt{x^2-4}+1}{x^2-4}\,dx$, **20**. $\int \frac{2x^2-1}{x^2\left(x^2-1\right)}\,dx$,

21. $\int \frac{dx}{2+x^2}$, **22**. $\int \frac{dx}{9x^2+2}$,

23. $\int \frac{5+2\operatorname{tg}^2 x}{\sin^2 x}\,dx$, **24**. $\int \frac{dx}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}}$,

25. $\int \frac{x+\sqrt{1+x^2}}{x\sqrt{1+x^2}}\,dx$, **26**. $\int \left(1-\frac{x^2}{1+x^2}\right)dx$,

27. $\int \frac{5+x^2}{25-x^4}\,dx$, **28**. $\int \frac{dx}{x^2-x^4}$,

29. $\int \frac{dx}{\sqrt[6]{1-3x^2+3x^4-x^6}}$, **30**. $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1-2x^2+x^4}}$,

31. $\int \frac{x\,dx}{x-2}$, 32. $\int \frac{x^2+1}{x-1}\,dx$.

ОТВЕТЫ

1. $\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 15x + C$. **2.** $\frac{3}{7}\sqrt[3]{x^7} + C$.

3. $\frac{4^x}{\ln 4} + 2\operatorname{arcctg} x + C$. **4.** $x + 4\ln|x| - \frac{4}{x} + C$.

5. $4x - 4\sqrt{x} + \ln|x| + C$. **6.** $\frac{2x^2\sqrt{x}}{5} + x + C$.

7. $2x - 5e^x + C$. **8.** $2\sin x + C$.

9. $C - 2\cos x$. **10.** $C - 3\ln|\cos x| - \ln|\sin x|$.

11. $C - \dfrac{1}{2}\operatorname{ctg} x$. **12.** $2\cos x + C$.

13. $\sin x + C$. **14.** $\dfrac{1}{2}\operatorname{tg} x + \dfrac{1}{2}x + C$.

15. $\dfrac{1}{2}(\sin 2x + \cos 2x) + C$. **16.** $5\arcsin\dfrac{x}{\sqrt{2}} + x + C$.

17. $\arcsin\dfrac{x}{3} + C$. **18.** $\arcsin\dfrac{x}{2} - \ln\left(x + \sqrt{4 + x^2}\right) + C$.

19. $4\ln\left|x + \sqrt{x^2 - 4}\right| + \dfrac{1}{4}\ln\left|\dfrac{x-2}{x+2}\right| + C$.

20. $\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right| - \dfrac{1}{x} + C$. **21.** $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{\sqrt{2}} + C$.

22. $\dfrac{1}{3\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\dfrac{3x}{\sqrt{2}} + C$. **23.** $C - 5\operatorname{ctg} x + 2\operatorname{tg} x$.

24. $\sin x + C$. **25.** $\ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right) + \ln|x| + C$.

26. $\operatorname{arctg} x + C$. **27.** $C - \dfrac{1}{2\sqrt{5}}\ln\left|\dfrac{x - \sqrt{5}}{x + \sqrt{5}}\right|$.

28. $C - \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|$. **29.** $\arcsin x + C$.

30. $\arcsin x + C$, если $|x| < 1,\ x \neq 0$

$\ln\left|x + \sqrt{x^2 - 1}\right| + C$, если $|x| > 1$.

31. $x + 2\ln|x - 2| + C$. **32.** $\dfrac{x^2}{2} + x + 2\ln|x - 1| + C$.

§ 9.2. Метод замены переменной

Введение новой переменной, называемое *заменой переменной* или *подстановкой*, позволяет в некоторых случаях свести интеграл, который непосредственно не вычисляется, к табличному интегралу.

Теорема (*о замене переменной*).

Пусть функция $x = \varphi(t)$ непрерывно дифференцируема на некотором промежутке T (конечном или бесконечном), а функция $f(x)$ — на промежутке X. Если на промежутке X функция $f(x)$ имеет первообразную, то на промежутке T справедлива формула:

$$\int f(x)\,dx\,\bigg|_{x=\varphi(t)} = \int f\left[\varphi(t)\right]\varphi'(t)dt. \tag{9.2.1}$$

Замена переменной в неопределенном интеграле иногда выполняется по формуле (9.2.1), прочитанной справа налево:

$$\int f\left[\varphi(t)\right]\varphi'(t)dt\,\bigg|_{t=\varphi^{-1}(x)} = \int f(x)dx, \tag{9.2.2}$$

где функция $\varphi(x)$ строго монотонная.

I. Если $\displaystyle\int f(x)dx = F(x) + C$, то справедливы следующие равенства, представляющие собой *простейшие* случаи замены переменной:

$$\int f\left(kx\right)dx = \frac{1}{k}F\left(kx\right) + C,$$

подразумевается замена переменных: $kx = t \quad \Rightarrow \quad dx = \dfrac{dt}{k}$;

$$\int f\left(x+b\right)dx = F\left(x+b\right) + C,$$

подразумевается замена переменных: $x + b = t \quad \Rightarrow \quad dx = dt$;

$$\int f\left(kx+b\right)dx = \frac{1}{k}F\left(kx+b\right) + C,$$

подразумевается замена переменных: $kx + b = t \quad \Rightarrow \quad dx = \dfrac{dt}{k}$.

Пример 9.7. Найти интегралы:

а) $\displaystyle\int \cos 5x\,dx$; б) $\displaystyle\int \frac{dx}{x+4}$;

в) $\displaystyle\int \sin\left(3x+4\right)dx$; г) $\displaystyle\int \sqrt[3]{1-7x}\;dx$.

Решение. Все интегралы принадлежат указанному типу **I**. Поэтому их первообразные могут быть записаны непосредственно. Укажем, однако, для каждого случая соответствующую замену переменной:

а) $$\int \cos 5x\, dx = \begin{bmatrix} 5x = t \\ dx = \dfrac{dt}{5} \end{bmatrix} = \frac{1}{5}\int \cos t\, dt = \frac{1}{5}\, \sin 5x + C;$$

б) $$\int \frac{dx}{x+4} = \begin{bmatrix} x+4 = t \\ dx = dt \end{bmatrix} = \int \frac{dt}{t} = \ln|\, x+4\,| + C;$$

в) $$\int \sin(3x+4)\, dx = \begin{bmatrix} 3x+4 = t \\ dx = \dfrac{dt}{3} \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\int \sin t\, dt = -\frac{1}{3}\, \cos(3x+4) + C;$$

г) $$\int \sqrt[3]{1-7x}\; dx = \int (1-7x)^{1/3}\, dx = \begin{bmatrix} 1-7x = t \\ dx = -\dfrac{dt}{7} \end{bmatrix} = -\frac{1}{7}\int t^{1/3}\, dt = -\frac{3}{28}\, \sqrt[3]{(1-7x)^4} + C.$$

Пример 9.8. Найти интегралы:

а) $\displaystyle\int e^{-2u}\, du$; б) $\displaystyle\int 10^{3-4x}\, dx$;

в) $\displaystyle\int \operatorname{tg}\frac{x}{3}\, dx$; г) $\displaystyle\int \frac{dt}{\sin^2\left(\frac{t}{2} - \frac{\pi}{3}\right)}$.

Решение. Данные интегралы также вычисляются с помощью простейшей замены переменной типа **I**. Не выполняя фактической замены переменной, а лишь подразумевая ее в каждом отдельном случае, получаем:

а) $$\int e^{-2u}\, du = -\frac{1}{2}\, e^{-2u} + C;$$

б) $$\int 10^{3-4x}\, dx = -\frac{1}{4} \cdot \frac{10^{3-4x}}{\ln 10} + C;$$

в) $$\int \operatorname{tg}\frac{x}{3}\, dx = -3\ln\left|\cos\frac{x}{3}\right| + C;$$

г) $$\int \frac{dt}{\sin^2\left(\frac{t}{2} - \frac{\pi}{3}\right)} = -2\operatorname{ctg}\left(\frac{t}{2} - \frac{\pi}{3}\right) + C.$$

Рекомендуем проверить правильность полученных результатов дифференцированием.

Пример 9.9. Найти интеграл $\int (1-2x)^3\,dx$.

Р е ш е н и е. *Первый способ*. Интеграл принадлежит типу **I**, поэтому можно сразу записать результат

$$\int (1-2x)^3\,dx = -\frac{1}{2}\cdot\frac{(1-2x)^4}{4} + C = C - \frac{1}{8}(1-2x)^4\,.$$

Второй способ. Возведем двучлен $1-2x$ в куб и проинтегрируем полученный многочлен:

$$\int (1-2x)^3\,dx = \int \left(1 - 3\cdot 2x + 3\cdot 4x^2 - 8x^3\right)dx = \\ = x - 3x^2 + 4x^3 - 2x^4 + C.$$

Легко убедиться, что первообразные отличаются только константой. Действительно,

$$-\frac{1}{8}(1-2x)^4 + C = -\frac{1}{8}\left(1 - 8x + 24x^2 - 32x^3 + 16x^4\right) + C = \\ = x - 3x^2 + 4x^3 - 2x^4 + C_1,$$

где обозначено $-\dfrac{1}{8} + C = C_1$.

Аналогично можно найти любой интеграл вида $\int (kx+b)^n\,dx$. Заметим, что первый способ при $n \geqslant 3$ предпочтительнее.

II. Интегралы вида

(а) $\displaystyle\int f^n(x)f'(x)\,dx$, **(б)** $\displaystyle\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx$, **(в)** $\displaystyle\int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}\,dx$ и т.п.

характеризуются наличием в подынтегральном выражении *и функции* $f(x)$, *и ее дифференциала* $df(x) = f'(x)dx$. Эффективным приемом вычисления таких интегралов является *внесение функции под знак дифференциала*.

(а) Опираясь на теорему *об инвариантности формул интегрирования*, вносим функцию $f(x)$ под знак дифференциала и воспринимаем ее как независимую переменную (что равносильно замене $f(x) = t$):

$$\int f^n(x)f'(x)dx = \int f^n(x)df(x) = \left[\int t^n du = \frac{t^{n+1}}{n+1} + C\right] = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} + C.$$

Например,

$$\int \sin^5 x\cos x\,dx = \int \sin^5 x\,(\sin x)'\,dx = \int \sin^5 x d\,(\sin x) = \left[\int t^5\,dt\right] = \frac{\sin^6 x}{6} + C.$$

(б) Применяя аналогичный прием, запишем:

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \int \frac{df(x)}{f(x)} = \left[\int \frac{dt}{t} = \ln|\,t\,| + C\right] = \ln|\,f(x)\,| + C.$$

Например,

$$\int \frac{e^x}{e^x+4}dx = \int \frac{(e^x+4)'}{e^x+4}dx = \int \frac{d\,(e^x+4)}{e^x+4} = \left[\int \frac{dt}{t}\right] = \ln\,(e^x+4)+C\,.$$

Здесь аргумент логарифма положителен, поэтому знак модуля опущен.
(в) Подобно предыдущему, получаем:

$$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}dx = \int \frac{df(x)}{\sqrt{f(x)}} = \left[\int \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2\sqrt{t}+C\right] = 2\sqrt{f(x)}+C.$$

Например,

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}} = \int \frac{(\ln x)'}{\sqrt{\ln x}}\,dx = \int \frac{d\,(\ln x)}{\sqrt{\ln x}} = \left[\int \frac{dt}{\sqrt{t}}\right] = 2\sqrt{\ln x}+C.$$

Пример 9.10. Вывести формулы:

а) $\displaystyle\int \operatorname{ctg} x\,dx = \ln|\sin x|+C$; б) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+C.$

Решение. а) Представим заданный интеграл в виде

$$\int \operatorname{ctg} x\;dx = \int \frac{\cos x}{\sin x}\;dx.$$

Учитывая, что $(\sin x)' = \cos x$, т. е. $d\,(\sin x) = \cos x\;dx$, внесем функцию $\sin x = t$ *под знак дифференциала*. При этом уже функция $\sin x$ выполняет роль независимой переменной, а интеграл относительно этой функции становится табличным:

$$\int \frac{\cos x\,dx}{\sin x} = \int \frac{d\,(\sin x)}{\sin x} = \left[\int \frac{dt}{t}\right] = \ln|\sin x|+C.$$

б) Сначала выполним тригонометрические преобразования

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{dx}{2\sin\frac{x}{2}\,\cos\frac{x}{2}} = \int \frac{dx}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}\cdot 2\cos^2\frac{x}{2}}.$$

Так как $\left(\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\right)' = \dfrac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}}$, т. е. $d\left(\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\right) = \dfrac{dx}{2\cos^2\frac{x}{2}}$, то внесем функцию $\operatorname{tg}\dfrac{x}{2} = t$ *под знак дифференциала*, сводя тем самым интеграл к табличному:

$$\int \frac{d\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}} = \left[\int \frac{dt}{t}\right] = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+C.$$

Пример 9.11. Найти интеграл $\displaystyle\int x\,(1-x)^{10}\,dx.$

Решение. Подынтегральная функция определена на всей числовой оси. Выполним замену переменной $x = 1 - t$. Функция $x = 1 - t$ монотонна и имеет непрерывную производную $x'_t = -1$, значит, $dx = -dt$. В результате замены заданный интеграл преобразуется к виду

$$\int x\,(1-x)^{10}\,dx = -\int (1-t)\,t^{10}\,dt = -\int t^{10}\,dt + \int t^{11}\,dt = \frac{t^{12}}{12} - \frac{t^{11}}{11} + C.$$

В заключение следует вернуться к переменной x, подставив вместо переменной t выражение $(1 - x)$:

$$\int x\,(1-x)^{10}\,dx = \frac{(1-x)^{12}}{12} - \frac{(1-x)^{11}}{11} + C.$$

Заметим, что введенная нами переменная t, выполнив свою задачу, в конечном результате отсутствует.

Пример 9.12. Найти интегралы:

$$\text{а)}\ \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}; \qquad \text{б)}\ \int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}}.$$

Решение. а) Подынтегральная функция определена для всех $x \in (-\infty;\ -1) \cup (1;\ +\infty)$. Выполним замену переменной: $x = \dfrac{1}{t}$. Эта функция монотонна и имеет непрерывную производную $x'_t = -\dfrac{1}{t^2}$ при $t \in (-1; 0) \cup (0; 1)$, значит, $dx = -\dfrac{dt}{t^2}$. Полагая для определенности $x > 1$, запишем процедуру интегрирования:

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \left[\begin{array}{c} x = \dfrac{1}{t} \\ dx = -\dfrac{dt}{t^2} \end{array}\right] = \int \frac{-\dfrac{1}{t^2}\,dt}{\dfrac{1}{t}\sqrt{\dfrac{1}{t^2}-1}} = \int \frac{-dt}{t\sqrt{\dfrac{1-t^2}{t^2}}} =$$

$$= -\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = -\arcsin t + C.$$

В результате обратной замены $t = \dfrac{1}{x}$ получаем

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = -\arcsin\frac{1}{x} + C, \quad x > 1.$$

б) Подынтегральная функция определена на интервале $(0; \infty)$. Чтобы избавиться от иррациональности, выполним подстановку $x = t^2$, $t > 0$. Функция $x(t)$ монотонна и имеет непрерывную производную $x'_t = 2t$ в области определения функции, $dx = 2t\ dt$. Подставляя в заданный интеграл вместо x и dx их выражения, перейдем к новой переменной:

$$\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}} = \int \frac{2t\,dt}{\left(t^2+1\right)\sqrt{t^2}} = 2\int \frac{dt}{t^2+1} = 2\operatorname{arctg} t + C.$$

Полученную первообразную выразим через исходную переменную x, выполняя обратную замену $t = \sqrt{x} \quad (x > 0)$:

$$\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}} = 2\operatorname{arctg}\sqrt{x} + C.$$

Замечание 1. В последующих примерах мы не будем столь подробно останавливаться на обосновании законности той или иной подстановки, предоставляя это читателю.

Замечание 2. Если подынтегральная функция представляет собой произведение двух множителей, один из которых зависит от некоторой функции $\psi(x)$, а другой является производной от этой функции (с точностью до постоянного множителя), то целесообразно выполнить замену переменной по формуле $\psi(x) = t$ (9.2.2).

Пример 9.13. Найти интегралы:

а) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2}\,dx$; б) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\,(5\ln x + 1)}$.

Решение. а) Перепишем данный интеграл в виде:

$$\int \frac{\sqrt{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2}\,dx = \int \sqrt{\operatorname{arctg} x}\cdot\frac{dx}{1+x^2}.$$

Производная функции $\operatorname{arctg} x$ равна $\dfrac{1}{1+x^2}$, поэтому введем новую переменную:

$$\operatorname{arctg} x = t \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{1+x^2} = dt.$$

В результате интеграл сводится к табличному:

$$\int \sqrt{\operatorname{arctg} x}\cdot\frac{dx}{1+x^2} = \int \sqrt{t}\;dt = \frac{2}{3}\sqrt{t^3} + C.$$

Возвращаясь к переменной x, получаем

$$\int \sqrt{\operatorname{arctg} x}\cdot\frac{dx}{1+x^2} = \frac{2}{3}\sqrt{\operatorname{arctg}^3 x} + C.$$

Процедура *внесения под знак дифференциала* позволяет записать решение данного примера, в соответствии с **II(а)**, следующим образом:

$$\int \sqrt{\operatorname{arctg} x} \cdot \frac{dx}{1+x^2} = \int \sqrt{\operatorname{arctg} x}\; d\,(\operatorname{arctg} x) =$$

$$= \frac{(\operatorname{arctg} x)^{3/2}}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}\sqrt{\operatorname{arctg}^3 x} + C.$$

б) Множитель $\dfrac{1}{x}$ является производной функции $\ln x$. Значит, можно сделать замену переменной

$$\ln x = t \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{x} = dt.$$

Тогда

$$\int \frac{dx}{x\,(5\ln x+1)} = \int \frac{1}{5\ln x + 1} \cdot \frac{dx}{x} = \int \frac{dt}{5t+1}.$$

Пользуясь формулой $\int f\,(kx+b)\,dx = \dfrac{1}{k}\,F\,(kx+b) + C$, получаем

$$\int \frac{dt}{5t+1} = \frac{1}{5}\,\ln|\,5t+1\,| + C = \frac{1}{5}\,\ln|\,5\ln x + 1\,| + C.$$

Интеграл вычисляется еще проще, если в качестве новой переменной принять функцию $5\ln x + 1 = u$. Продифференцируем обе части этого равенства:

$$du = 5\,\frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{x} = \frac{du}{5}.$$

Переходя к новой переменной, получаем

$$\int \frac{dx}{x\,(5\ln x+1)} = \int \frac{1}{5\ln x+1} \cdot \frac{dx}{x} = \int \frac{1}{u} \cdot \frac{du}{5} = \frac{1}{5}\int \frac{du}{u} =$$

$$= \frac{1}{5}\,\ln|\,u\,| + C = \frac{1}{5}\,\ln|\,5\ln x + 1\,| + C.$$

Замечание 3. Отсюда, в частности, следует, что метод замены переменной допускает различные варианты замены. Удачный выбор новой переменной на первых порах вызывает определенные затруднения. Для их преодоления необходимо, во-первых, хорошо владеть техникой дифференцирования, во-вторых, твердо знать табличные интегралы. Со временем появится умение анализировать и яснее представлять, что дает та или иная подстановка.

Пример 9.14. Найти интегралы:

а) $\displaystyle\int \frac{\cos x\,dx}{\sin^2 x}$; б) $\displaystyle\int \frac{\sin x\,dx}{\sqrt{3-\cos^2 x}}$.

Решение. а) Так как $\cos x\, dx = d(\sin x)$, то интеграл можно записать в виде

$$\int \frac{\cos x\, dx}{\sin^2 x} = \int \frac{d(\sin x)}{\sin^2 x},$$

откуда легко угадывается замена: $\sin x = t$. Тогда

$$\int \frac{\cos x\, dx}{\sin^2 x} = \int \frac{d(\sin x)}{\sin^2 x} = \int \frac{dt}{t^2} = -\frac{1}{t} + C = C - \frac{1}{\sin x}.$$

б) Здесь удобно сделать замену:

$$\cos x = t \quad \Rightarrow \quad -\sin x\, dx = dt.$$

В результате:

$$\int \frac{\sin x\, dx}{\sqrt{3-\cos^2 x}} = -\int \frac{dt}{\sqrt{3-t^2}} = -\arcsin\frac{t}{\sqrt{3}} + C = C - \arcsin\left(\frac{\cos x}{\sqrt{3}}\right).$$

Пример 9.15. Найти интегралы:

а) $\displaystyle\int \frac{x^2dx}{1-x^3}$; б) $\displaystyle\int \frac{10^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\, dx$.

Решение. Здесь и в дальнейшем без лишних слов замену переменной в расчетной части интеграла будем оформлять следующим образом:

а) $$\int \frac{x^2dx}{1-x^3} = \left[\begin{array}{c} 1-x^3=t \\ -3x^2dx = dt \\ x^2dx = -\dfrac{1}{3}\, dt \end{array}\right] = -\frac{1}{3}\int \frac{dt}{t} =$$

$$= -\frac{1}{3}\ln|t| + C = C - \frac{1}{3}\ln\left|1-x^3\right|;$$

б) $$\int \frac{10^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\, dx = 2\int 10^{\sqrt{x}} \cdot \frac{dx}{2\sqrt{x}} = \left[\begin{array}{c} \sqrt{x} = t \\ \dfrac{dx}{2\sqrt{x}} = dt \end{array}\right] =$$

$$= 2\int 10^t\, dt = 2\frac{10^t}{\ln 10} + C = 2\,\frac{10^{\sqrt{x}}}{\ln 10} + C.$$

Пример 9.16. Найти интегралы:

а) $\displaystyle\int \frac{dx}{e^x+e^{-x}}$; б) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^{2x}}}$;

в) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\ln x\ln(\ln x)}$; г) $\displaystyle\int \frac{\sin 2x}{1+\sin^2 x}\, dx$.

Решение. Выполняя преобразования подынтегральных выражений, сведем интеграл (а) к табличному интегралу **17** относительно функции e^x, интеграл (б) к табличному интегралу **19** относительно функции e^{-x}:

а) $$\int \frac{dx}{e^x + e^{-x}} = \int \frac{dx}{e^x + \dfrac{1}{e^x}} = \int \frac{e^x dx}{e^{2x} + 1} = \begin{bmatrix} t = e^x \\ dt = e^x\, dx \end{bmatrix} =$$

$$= \int \frac{dt}{t^2 + 1} = \operatorname{arctg} t + C = \operatorname{arctg} e^x + C.$$

б) $$\int \frac{dx}{\sqrt{1 + e^{2x}}} = \int \frac{dx}{\sqrt{e^{2x}\left(e^{-2x} + 1\right)}} = \int \frac{dx}{e^x\sqrt{e^{-2x} + 1}} =$$

$$= \int \frac{e^{-x}\, dx}{\sqrt{e^{-2x} + 1}} = \begin{bmatrix} t = e^{-x} \\ dt = -e^{-x}\, dx \end{bmatrix} = -\int \frac{dt}{\sqrt{t^2 + 1}} =$$

$$= -\ln\left| t + \sqrt{t^2 + 1} \right| + C = C - \ln\left| e^{-x} + \sqrt{e^{-2x} + 1} \right|.$$

Интегралы (в) и (г) сводятся к одному и тому же табличному интегралу **2** относительно функций $\ln(\ln x)$ и $1 + \sin^2 x$:

в) $$\int \frac{dx}{x \ln x \ln(\ln x)} = \int \frac{1}{\ln|\ln x|} \cdot \frac{dx}{x \ln x} = \begin{bmatrix} t = \ln(\ln x) \\ dt = \dfrac{dx}{x \ln x} \end{bmatrix} =$$

$$= \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln\big|\ln|\ln x|\big| + C.$$

г) $$\int \frac{\sin 2x}{1 + \sin^2 x}\, dx = \begin{bmatrix} t = 1 + \sin^2 x \\ dt = 2 \sin x \cos x\, dx = \sin 2x\, dx \end{bmatrix} =$$

$$= \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln\left|1 + \sin^2 x\right| + C.$$

Пример 9.17. Найти интегралы:

а) $\displaystyle\int \frac{5x^2}{4 + x^6}\, dx;$ б) $\displaystyle\int \frac{3 - 2x}{5x^2 + 7}\, dx.$

Решение. а) Легко видеть, что x^2 является производной от функции x^3 с точностью до коэффициента. Это побуждает записать x^6 в виде $\left(x^3\right)^2$. Тогда

$$\int \frac{5x^2}{4+x^6}\,dx = 5\int \frac{x^2dx}{4+\left(x^3\right)^2} = \frac{5}{3}\int \frac{3x^2dx}{4+\left(x^3\right)^2} = \frac{5}{3}\int \frac{d\left(x^3\right)}{4+\left(x^3\right)^2} =$$

$$= \left[\begin{array}{c} t = x^3 \\ dt = 3x^2\,dx \end{array}\right] = \frac{5}{3}\int \frac{dt}{4+t^2} = \frac{5}{3}\cdot\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{t}{2} + C = \frac{5}{6}\operatorname{arctg}\frac{x^3}{2} + C.$$

б) Если числитель дроби почленно разделить на знаменатель, то заданный интеграл сводится к алгебраической сумме интегралов:

$$\int \frac{3-2x}{5x^2+7}\,dx = 3\int \frac{dx}{5x^2+7} - 2\int \frac{xdx}{5x^2+7},$$

первый из которых вычисляется непосредственно,

$$\int \frac{dx}{5x^2+7} = \frac{1}{5}\int \frac{dx}{x^2+\frac{7}{5}} = \frac{1}{5}\cdot\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{5}\,x}{\sqrt{7}} + C,$$

а второй берется заменой переменной:

$$\int \frac{x\,dx}{5x^2+7} = \left[\begin{array}{c} t = 5x^2+7 \\ dt = 10x\,dx \end{array}\right] = \frac{1}{10}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{10}\ln|\,t\,| + C =$$

$$= \frac{1}{10}\ln\left(5x^2+7\right) + C.$$

Таким образом,

$$\int \frac{3-2x}{5x^2+7}\,dx = 3\int \frac{dx}{5x^2+7} - 2\int \frac{x\,dx}{5x^2+7} =$$

$$= \frac{3}{\sqrt{35}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{5}\,x}{\sqrt{7}} - \frac{1}{5}\ln\left(5x^2+7\right) + C.$$

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Какова цель *метода замены переменной*?
2. В чем заключается метод замены переменной (метод подстановки)?
3. Почему при выполнении замены переменной $x = \varphi(t)$ функция $\varphi(t)$ должна быть *монотонной*?
4. В чем заключается прием «*внесения под знак дифференциала*»?

5. Неопределенный интеграл $I = \int \sin x \cdot \cos x \, dx$ можно вычислить тремя способами:
а) с помощью подстановки $x = \sin t$; получим
$$I = \frac{\sin^2 x}{2} + C;$$
б) с помощью подстановки $x = \cos t$; получим
$$I = -\frac{\cos^2 x}{2} + C;$$
в) с помощью преобразования $\sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$; получим
$$I = -\frac{\cos 2x}{4} + C.$$
Показать, что все эти результаты отличаются лишь видом произвольной постоянной.
6. Указать *наиболее рациональный* способ нахождения интегралов:
а) $\int \frac{f'(x)}{f^2(x)} \, dx$; б) $\int f'(x) \cdot f^n(x) \, dx$.
7. Есть ли разница между выражениями $d \int f(x)dx$ и $\int dF(x)$? Если да, то в чем она заключается?
8. На каком *свойстве дифференциала* основан метод замены переменной?
9. При каких значениях m и n интегралы $\int \frac{x^m \, dx}{\sqrt{1-x^2}}$ и $\int \frac{x^3 \, dx}{\sqrt{1-x^n}}$ находятся непосредственно?
10. Доказать, что если $\int f(x)dx = F(x) + C$, то $\int f(ax+b) \, dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + C \quad (a \neq 0)$.

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Найти интегралы:

1. $\int \sin \frac{x}{2} \, dx$, **2.** $\int 7^{-x/3} \, dx$,

3. $\int e^{2-5x} \, dx$, **4.** $\int \frac{dx}{4x+3}$,

5. $\int \sqrt{\frac{\arcsin x}{1-x^2}} \, dx$, **6.** $\int \frac{dx}{\left(1+x^2\right) \operatorname{arctg} x}$,

7. $\displaystyle\int \frac{e^{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x}\,dx$,

8. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sin^2(\ln x)}$,

9. $\displaystyle\int \frac{\sin\frac{1}{x}}{x^2}\,dx$,

10. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^2 x\cdot\sqrt[4]{\operatorname{ctg} x}}$,

11. $\displaystyle\int \frac{(\operatorname{arctg} x)^4}{1+x^2}dx$,

12. $\displaystyle\int \frac{\sin(\operatorname{tg} x)}{\cos^2 x}\,dx$,

13. $\displaystyle\int e^x\ \operatorname{tg} e^x\,dx$,

14. $\displaystyle\int \sqrt[3]{\sin^2 2x}\ \cos 2x\,dx$,

15. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}\ \arcsin^3 2x}$,

16. $\displaystyle\int e^{-x^2}x\,dx$,

17. $\displaystyle\int 3x\ \cos\left(1-6x^2\right)dx$,

18. $\displaystyle\int x\ \sin\left(4-x^2\right)dx$,

19. $\displaystyle\int \frac{\sin x}{\cos^5 x}\,dx$,

20. $\displaystyle\int \operatorname{tg} 4x\,dx$,

21. $\displaystyle\int \frac{\cos x}{1+2\sin x}\,dx$,

22. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\cos^2\left(x^2+1\right)}$,

23. $\displaystyle\int \frac{2^x\,dx}{\sqrt{4^x-1}}$,

24. $\displaystyle\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{1-e^{2x}}}\,dx$,

25. $\displaystyle\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$,

26. $\displaystyle\int x\sqrt[3]{a-x^2}\,dx$,

Замена $\sqrt{a-x^2}=t$.

27. $\displaystyle\int \frac{5x^3\,dx}{\sqrt{1+x^8}}$,

28. $\displaystyle\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^6-4}}$,

29. $\displaystyle\int \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$,

30. $\displaystyle\int \frac{\ln x-3}{x\sqrt{\ln x}}\,dx$,

31. $\displaystyle\int e^{2x^2+\ln x}\,dx$,

32. $\displaystyle\int \frac{x^2-x}{(x-2)^3}\,dx$,

Замена $x-2=t$.

33. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{2x-9}}$,

34. $\displaystyle\int \frac{\sin x-\cos x}{(\cos x+\sin x)^5}\,dx$,

Замена $\sqrt{2x-9}=t$.

35. $\displaystyle\int \frac{e^x\,dx}{\sqrt{16-e^{2x}}}$,

36. $\displaystyle\int \frac{3^x\,dx}{1+3^{2x}}$,

37. $\displaystyle\int \operatorname{sh} x\operatorname{sh} 2x\,dx$,

38. $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x\ \operatorname{ch}^2 x}$.

ОТВЕТЫ

1. $C - 2\cos\dfrac{x}{2}$.

2. $C - 3\dfrac{7^{-x/3}}{\ln 7}$.

3. $C - \dfrac{1}{5}\, e^{2-5x}$.

4. $\dfrac{1}{4}\,\ln|\,4x+3\,| + C$.

5. $\dfrac{2}{3}\,\arcsin x\sqrt{\arcsin x} + C$.

6. $\ln|\,\mathrm{arctg}\; x\,| + C$.

7. $e^{\mathrm{tg}\, x} + C$.

8. $C - \mathrm{ctg}\,(\ln x)$.

9. $\cos\dfrac{1}{x} + C$.

10. $C - \dfrac{4}{3}\sqrt[4]{\mathrm{ctg}^3\, x}$.

11. $\dfrac{(\mathrm{arctg}\, x)^5}{5} + C$.

12. $C - \cos\,(\mathrm{tg}\, x)$.

13. $C - \ln|\cos\, e^x\,|$.

14. $\dfrac{3}{10}\,\sin 2x\sqrt[3]{\sin^2 2x} + C$.

15. $C - \dfrac{1}{4\arcsin^2 2x}$.

16. $C - \dfrac{1}{2}\, e^{-x^2}$.

17. $C - \dfrac{1}{4}\sin\left(1 - 6x^2\right)$.

18. $\dfrac{1}{2}\,\cos\left(4 - x^2\right) + C$.

19. $\dfrac{1}{4\cos^4 x} + C$.

20. $C - \dfrac{1}{4}\,\ln|\cos 4x\,|$.

21. $\dfrac{1}{2}\,\ln|\,1 + 2\sin x\,| + C$.

22. $\dfrac{1}{2}\,\mathrm{tg}\left(x^2 + 1\right) + C$.

23. $\dfrac{1}{\ln 2}\cdot\ln\left(2^x + \sqrt{4^x - 1}\right) + C$.

24. $C - \sqrt{1 - e^{2x}}$.

25. $C - 2\cos\sqrt{x}$.

26. $C - \dfrac{3}{8}\sqrt[3]{\left(a - x^2\right)^4}$.

27. $\dfrac{5}{4}\,\ln\left(x^4 + \sqrt{x^8 + 1}\right) + C$.

28. $\dfrac{1}{3}\,\ln\left|\,x^3 + \sqrt{x^6 - 4}\,\right| + C$.

29. $\sqrt{x^2 + 1} + \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right) + C$.

30. $\dfrac{2}{3}\,\ln x\sqrt{\ln x} - 6\sqrt{\ln x} + C$.

31. $\dfrac{1}{4}\, e^{2x^2} + C$.

32. $\ln|\,x - 2\,| - \dfrac{3}{x - 2} - \dfrac{1}{(x - 2)^2} + C$.

33. $\dfrac{2}{3}\,\mathrm{arctg}\,\dfrac{\sqrt{2x - 9}}{3} + C$.

34. $\dfrac{1}{4\,(\cos x + \sin x)^4} + C$.

35. $\arcsin\dfrac{e^x}{4} + C$.

36. $\dfrac{1}{\ln 3}\cdot\mathrm{arctg}\, 3^x + C$.

37. $\dfrac{2}{3}\,\mathrm{sh}^3\, x + C$.

38. $C - (\mathrm{th}\, x + \mathrm{cth}\, x)$.

§ 9.3. Метод интегрирования по частям

I. Если $u(x)$ и $v(x)$ — дифференцируемые на некотором промежутке функции, то имеет место *формула интегрирования по частям*

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du, \tag{9.3.1}$$

которая позволяет вычисление интеграла $\int u\,dv$ свести к вычислению интеграла $\int v\,du$.

Суть метода состоит в том, чтобы интегрирование *непростого* дифференциального выражения $u\,dv$ заменить интегрированием *более простых* дифференциальных выражений dv и $v\,du$.

Чтобы воспользоваться данным методом, необходимо в заданном подынтегральном выражении выделить два множителя, приняв один из них за u, а второй — за dv. При этом следует исходить из того, что часть u в дальнейшем дифференцируется, а часть dv — интегрируется.

II. Не существует общих правил, указывающих какой именно сомножитель подынтегрального выражения следует принять за u, а какой за dv.

Основные классы интегралов, к которым применим метод интегрирования по частям и рекомендуемые приемы выбора частей:

(а) $$\int P_n(x)e^{\alpha x}\,dx, \quad \int P_n(x)\sin\alpha x\,dx, \quad \int P_n(x)\cos\alpha x\,dx,$$

где $P_n(x)$ — многочлен n-й степени от x, $\alpha \neq 0$ — действительное число. В качестве $u(x)$ принимают *многочлен* $P_n(x)$, степень которого при дифференцировании понижается.

(б) $$\int R(x)\ln\alpha x\,dx, \quad \int R(x)\arcsin\alpha x\,dx, \quad \int R(x)\arccos\alpha x\,dx,$$

$$\int R(x)\,\mathrm{arctg}\,\alpha x\,dx, \quad \int R(x)\,\mathrm{arcctg}\,\alpha x\,dx,$$

где $R(x)$ — алгебраическая функция, $\alpha \neq 0$. За множитель $u(x)$ принимают *трансцендентную функцию* ($\ln\alpha x$, $\arcsin\alpha x$ и т.п.).

(в) $$\int \ln x\,dx, \quad \int \arcsin x\,dx, \quad \int \arccos x\,dx,$$

$$\int \mathrm{arctg}\;dx, \quad \int \mathrm{arcctg}\,x\,dx.$$

В качестве $u(x)$ принимают *подынтегральную функцию*, полагая $dv = dx$.

Метод интегрирования по частям можно применять столько раз, сколько необходимо для нахождения первообразной.

III. При вычислении так называемых *циклических* интегралов (в первом и втором интегралах $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$)

$$\int e^{\alpha x}\cos\beta x\,dx, \quad \int e^{\alpha x}\sin\beta x\,dx, \quad \int \sin(\ln x)\;dx, \quad \int \cos(\ln x)\;dx$$

безразлично, какой именно сомножитель принимать за u, а какой за dv. После двукратного интегрирования по частям (во второй раз части выбирают так же, как и в первый) получают линейное уравнение относительно заданного интеграла, из которого и находят искомую первообразную.

Пример 9.18 Найти интегралы:

$$\text{а)}\ \int x\,\sin x\,dx; \qquad \text{б)}\ \int (3x-1)\cos 2x\,dx.$$

Решение. а) Представим подынтегральное выражение в виде произведения множителей x и $\sin x\,dx$. Примем $u = x$ и $dv = \sin x\,dx$. Продифференцируем часть $u(x)$ и проинтегрируем часть dv:

$$du = dx, \quad v = \int \sin x\,dx = -\cos x$$

(здесь принято, что постоянная интегрирования $C = 0$).

Подставляя в формулу (9.3.1), получим:

$$\int \overbrace{x}^{u}\,\overbrace{\sin x\,dx}^{dv} = \overbrace{x}^{u}\,\overbrace{(-\cos x)}^{v} - \int \overbrace{(-\cos x)}^{v}\,\overbrace{dx}^{du} =$$

$$= -x\,\cos x + \sin x + C.$$

б) Выбрав части $u = 3x - 1$ и $dv = \cos 2x\,dx$, найдем

$$du = 3\,dx, \quad v = \int \cos 2x\,dx = \frac{1}{2}\,\sin 2x.$$

По формуле (9.3.1) получаем

$$\int \overbrace{(3x-1)}^{u}\,\overbrace{\cos 2x\,dx}^{dv} = \overbrace{(3x-1)}^{u}\,\overbrace{\frac{\sin 2x}{2}}^{v} - \int \overbrace{\frac{\sin 2x}{2}}^{v}\,\overbrace{3dx}^{du} =$$

$$= \frac{3x-1}{2}\,\sin 2x + \frac{3}{4}\,\cos 2x + C.$$

В качестве $v(x)$ можно было взять любую функцию вида $\frac{1}{2}\,\sin 2x + C$, где C — произвольная постоянная. Положив $v = \frac{1}{2}\,\sin 2x$, мы приняли, как и в примере 9.18(а), $C = 0$. Покажем, что учет произвольной постоянной $C \neq 0$ не влияет на конечный результат:

$$\int (3x-1)\cos 2x\,dx = \left[\begin{array}{ll} u = 3x-1, & dv = \cos 2x\,dx, \\ du = 3dx, & v = \frac{1}{2}\,\sin 2x + C \end{array}\right] =$$

$$= (3x-1)\left(\frac{1}{2}\,\sin 2x + C\right) - 3\int \left(\frac{1}{2}\,\sin 2x + C\right) dx =$$

$$= (3x-1)\left(\frac{1}{2}\,\sin 2x + C\right) - 3\left(-\frac{1}{4}\,\cos 2x + Cx\right) + C_1 =$$

$$= \frac{3x-1}{2}\sin 2x + 3xC - C + \frac{3}{4}\,\cos 2x - 3Cx + C_1 =$$

$$= \frac{3x-1}{2}\sin 2x + \frac{3}{4}\,\cos 2x + C_1 - C.$$

Очевидно, что вместо разности $C_1 - C$ можно ввести постоянную $C_2 = C_1 - C$, откуда и следует, что в конечный результат входит только одна произвольная постоянная.

Поэтому при нахождении функции $v(x)$ в расчетной части метода интегрирования по частям постоянную интегрирования можно не учитывать.

Замечание 1. При оформлении решения методом интегрирования по частям вспомогательные записи принято выделять квадратными скобками.

Пример 9.19. Найти интегралы:

а) $\displaystyle\int x\,3^x\,dx$; б) $\displaystyle\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx$.

Решение. а) Следуя рекомендациям пункта **II(а)**, примем за $u(x)$ степенную функцию, полагая $u = x$ и $dv = 3^x dx$:

$$\int x\,3^x\,dx = \left[\begin{array}{ll} u = x, & dv = 3^x\,dx, \\ du = dx, & v = \displaystyle\int 3^x\,dx = \frac{3^x}{\ln 3} \end{array}\right] = x\,\frac{3^x}{\ln 3} - \frac{1}{\ln 3}\int 3^x d\,x =$$

$$= x\,\frac{3^x}{\ln 3} - \frac{3^x}{\ln^2 3} + C = \frac{3^x}{\ln 3}\left(x - \frac{1}{\ln 3}\right) + C.$$

б) Здесь, в соответствии с пунктом **II(б)**, в качестве $u(x)$ следует взять логарифмическую функцию, т. е. положить $u = \ln x$ и $dv = \dfrac{dx}{\sqrt{x}}$:

$$\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx = \left[\begin{array}{ll} u = \ln x, & dv = \dfrac{dx}{\sqrt{x}}, \\ du = \dfrac{dx}{x}, & v = \displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} \end{array}\right] =$$

$$= 2\left(\sqrt{x}\,\ln x - \int \sqrt{x}\,\frac{dx}{x}\right) = 2\left(\sqrt{x}\,\ln x - \int \frac{dx}{\sqrt{x}}\right) =$$

$$= 2\left(\sqrt{x}\,\ln x - 2\sqrt{x}\right) + C = 2\sqrt{x}\,(\ln x - 2) + C.$$

Пример 9.20. Найти интегралы:

а) $\displaystyle\int x\ \mathrm{tg}^2\, x\, dx$; б) $\displaystyle\int \frac{x\ \mathrm{arctg}\, x}{\sqrt{1+x^2}}\, dx$.

Решение. а) Непосредственное применение формулы интегрирования по частям дает

$$\int x\,\mathrm{tg}^2\, x\, dx =$$

$$= \left[\begin{array}{ll} u = x, & dv = \mathrm{tg}^2\, x\, dx \\ du = dx, & v = \displaystyle\int \mathrm{tg}^2\, x\, dx = \int\left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right) dx = \mathrm{tg}\, x - x \end{array}\right] =$$

$$= x\,(\mathrm{tg}\, x - x) - \int (\mathrm{tg}\, x - x)\, dx = x\,(\mathrm{tg}\, x - x) + \ln|\cos x| + \frac{x^2}{2} + C =$$

$$= x\,\mathrm{tg}\, x + \ln|\cos x| - \frac{x^2}{2} + C.$$

б) Разобьем подынтегральное выражение на множители и применим метод интегрирования по частям:

$$\int \frac{x\,\mathrm{arctg}\, x}{\sqrt{1+x^2}}\, dx = \left[\begin{array}{ll} u = \mathrm{arctg}\, x, & dv = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\, dx, \\ du = \dfrac{dx}{1+x^2}, & v = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}\, dx = \sqrt{1+x^2} \end{array}\right] =$$

$$= \sqrt{1+x^2}\ \mathrm{arctg}\, x - \int \frac{\sqrt{1+x^2}}{1+x^2}\, dx = \sqrt{1+x^2}\ \mathrm{arctg}\, x - \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} =$$

$$= \sqrt{1+x^2}\ \mathrm{arctg}\, x - \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) + C.$$

Замечание 2. Часто приходится комбинировать различные методы интегрирования. И только опыт покажет, что лучше: сначала сделать замену переменной, а затем интегрировать по частям или наоборот.

Пример 9.21. Найти интегралы:

а) $\displaystyle\int x^3 e^{-x^2} dx$; б) $\displaystyle\int \mathrm{arctg}\,\sqrt{x}\ dx$.

Решение. а) *Первый способ.* Сначала целесообразно сделать замену переменной, полагая $-x^2 = t$. Тогда $-2x\, dx = dt$ и

$$\int x^3\, e^{-x^2} dx = \frac{1}{2}\int t\, e^t\, dt.$$

Теперь применим формулу интегрирования по частям:

$$\int t\,e^t dt = \left[\begin{array}{cc} u=t, & dv=e^t\,dt \\ du=dt, & v=e^t \end{array}\right] = t\,e^t - \int e^t\,dt = t\,e^t - e^t + C.$$

Выполняя обратную замену $t=-x^2$, найдем

$$\int x^3\,e^{-x^2}dx = -\frac{1}{2}\,e^{-x^2}\left(1+x^2\right)+C.$$

Второй способ. Можно интегрировать по частям сразу:

$$\int x^3\,e^{-x^2}\,dx =$$

$$= \left[\begin{array}{ll} u=-\dfrac{x^2}{2}, & dv=-2e^{-x^2}x\,dx \\ du=-x\,dx, & v=-2\displaystyle\int e^{-x^2}x\,dx=\int e^{-x^2}d\left(-x^2\right)=e^{-x^2} \end{array}\right] =$$

$$= -\frac{x^2}{2}\,e^{-x^2} + \int e^{-x^2}x\,dx = -\frac{x^2}{2}\,e^{-x^2} - \frac{1}{2}\,e^{-x^2} + C =$$

$$= -\frac{1}{2}\,e^{-x^2}\left(1+x^2\right)+C.$$

б) *Первый способ.* Прежде, чем применить метод интегрирования по частям, выполним замену переменной: $\sqrt{x}=t$, откуда $x=t^2$, $dx = 2t\,dt$. Тогда:

$$\int \operatorname{arctg}\sqrt{x}\,dx = \left[\begin{array}{c} \sqrt{x}=t \\ dx=2tdt \end{array}\right] = 2\int t\,\operatorname{arctg} t\,dt =$$

$$= \left[\begin{array}{ll} u=\operatorname{arctg} t, & dv=t\,dt, \\ du=\dfrac{dt}{1+t^2}, & v=\displaystyle\int t\,dt=\frac{t^2}{2} \end{array}\right] = 2\left(\frac{t^2}{2}\operatorname{arctg} t - \frac{1}{2}\int\frac{t^2\,dt}{1+t^2}\right) =$$

$$= t^2\,\operatorname{arctg} t - \int\frac{\left(t^2+1\right)-1}{1+t^2}\,dt = t^2\operatorname{arctg} t - \int\left(1-\frac{1}{1+t^2}\right)dt =$$

$$= t^2\operatorname{arctg} t - t + \operatorname{arctg} t + C = (x+1)\operatorname{arctg}\sqrt{x} - \sqrt{x} + C.$$

Второй способ. Если сначала проинтегрировать по частям:

$$\int \operatorname{arctg}\sqrt{x}\,dx = \left[\begin{array}{ll} u=\operatorname{arctg}\sqrt{x}\,, & dv=dx, \\ du=\dfrac{1}{1+x}\cdot\dfrac{dx}{2\sqrt{x}}, & v=x \end{array}\right] =$$

$$= x \operatorname{arctg}\sqrt{x} - \frac{1}{2}\int \frac{x\,dx}{(1+x)\sqrt{x}},$$

то интеграл $\int v\,du$ придется брать с помощью замены переменной:

$$\int \frac{x\,dx}{(1+x)\sqrt{x}} = \int \frac{\sqrt{x}\,dx}{1+x} = \left[\begin{array}{c} \sqrt{x} = t \\ x = t^2 \\ dx = 2tdt \end{array}\right] = 2\int \frac{t^2\,dt}{1+t^2} =$$

$$= 2\int \frac{\left(t^2+1\right)-1}{1+t^2}\,dt = 2\left(\int dt - \int \frac{dt}{1+t^2}\right) = 2\,(t - \operatorname{arctg} t) + C =$$

$$= 2\left(\sqrt{x} - \operatorname{arctg}\sqrt{x}\right) + C.$$

Следовательно,

$$\int \operatorname{arctg}\sqrt{x}\,dx = x \operatorname{arctg}\sqrt{x} + \operatorname{arctg}\sqrt{x} - \sqrt{x} + C =$$

$$= (x+1)\operatorname{arctg}\sqrt{x} - \sqrt{x} + C.$$

Замечание 3. Искусство применения формулы интегрирования по частям состоит в том, чтобы удачно разбить подынтегральное выражение на два множителя u и dv, что, разумеется, требует определенных навыков и опыта. Неудачный выбор функции $u(x)$ приводит к более сложному интегралу $\int v\,du$, чем заданный $\int u\,dv$. В таком случае следует либо принять за $u(x)$ другую функцию, либо применить другой метод интегрирования.

Пример 9.22. Найти интеграл $\int x \sin\left(1-x^2\right) dx$.

Решение. Несмотря на то, что подынтегральная функция представляет собой произведение степенной и тригонометрической функций, метод интегрирования по частям здесь неприменим. Действительно, если выбрать части как в примере 9.18(а), т. е. положить $u = x$, $dv = \sin\left(1-x^2\right) dx$, то $du = dx$ и $v = \int \sin\left(1-x^2\right) dx$. Но последний интеграл не берется в элементарных функциях!

Попробуем наоборот: $u = \sin\left(1-x^2\right)$, $dv = x\,dx$, тогда $du = -2x\cos\left(1-x^2\right)$ и $v = \dfrac{x^2}{2}$. По формуле (9.3.1) получаем

$$\int x \sin\left(1-x^2\right) dx = \frac{x^2}{2}\sin\left(1-x^2\right) + \int x^3 \cos\left(1-x^2\right) dx.$$

Пришли к интегралу $\int v\,du$, который сложнее исходного, поскольку степень многочлена возросла.

Все дело в том, что для вычисления данного интеграла вовсе не требуется метод интегрирования по частям. Замена переменной

$$1 - x^2 = t \quad \Rightarrow \quad -2x\,dx = dt$$

сразу приводит к табличному интегралу:

$$\int x \sin\left(1 - x^2\right) dx = -\frac{1}{2}\int \sin t\,dt = \frac{1}{2}\cos t + C = \frac{1}{2}\cos\left(1 - x^2\right) + C.$$

Пример 9.23. Найти интеграл $\int \ln\left(x + \sqrt{a^2 + x^2}\right) dx$.

Решение. Здесь, следуя пункту **II(в)**, принимаем за $u(x)$ подынтегральную функцию: $u = \ln\left(x + \sqrt{a^2 + x^2}\right)$, остается $dv = dx$. Находим

$$du = \frac{1}{x + \sqrt{a^2 + x^2}}\left(1 + \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}}\right) dx = \frac{1}{\sqrt{a^2 + x^2}}\,dx, \quad v = x.$$

Подставляя в формулу интегрирования по частям, получаем

$$\int \ln\left(x + \sqrt{a^2 + x^2}\right) dx = x\ln\left(x + \sqrt{a^2 + x^2}\right) - \int \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}}\,dx =$$

$$= x\ln\left(x + \sqrt{a^2 + x^2}\right) - \frac{1}{2}\int \frac{d\left(a^2 + x^2\right)}{\sqrt{a^2 + x^2}} =$$

$$= x\ln\left(x + \sqrt{a^2 + x^2}\right) - \sqrt{a^2 + x^2} + C.$$

Пример 9.24. Найти интеграл $\int x^2 \arccos x\,dx$.

Решение. Пусть $u = \arccos x$, $dv = x^2\,dx$. Тогда

$$du = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\,dx, \quad v = \frac{x^3}{3}.$$

Формула (9.3.1) дает

$$\int x^2 \arccos x\,dx = \frac{x^3}{3}\arccos x + \frac{1}{3}\int \frac{x^3}{\sqrt{1 - x^2}}\,dx. \tag{9.3.2}$$

К последнему интегралу можно снова применить формулу интегрирования по частям, разбив подынтегральное выражение на множители:

$$u = x^2, \quad dv = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}\,dx.$$

Однако проще вычислить этот интеграл с помощью замены переменной

$$\sqrt{1-x^2}=t \quad \Rightarrow \quad 1-x^2=t^2 \quad \Rightarrow \quad -2x\,dx=2t\,dt.$$

Тогда

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=\int \frac{x^2\cdot x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}=-\int \frac{\left(1-t^2\right)\,t\,dt}{t}=-\int \left(1-t^2\right)dt=$$

$$=\frac{t^3}{3}-t+C=\frac{1}{3}\sqrt{\left(1-x^2\right)^3}-\sqrt{1-x^2}+C=$$

$$=\sqrt{1-x^2}\left(\frac{1-x^2}{3}-1\right)+C=-\frac{x^2+2}{3}\sqrt{1-x^2}+C.$$

Подставляя этот результат в формулу (9.3.2), получим окончательно

$$\int x^2\arccos x\,dx=\frac{x^3}{3}\arccos x-\frac{1}{9}\left(x^2+2\right)\sqrt{1-x^2}+C.$$

Пример 9.25. Найти интеграл $\int \left(\frac{1}{2}x^2-x+6\right)\cos\frac{x}{3}\,dx.$

Решение. Положим $u=\frac{1}{2}x^2-x+6$ (при дифференцировании этот множитель упростится), $dv=\cos\frac{x}{3}\,dx$. Тогда

$$du=(x-1)\,dx, \quad v=\int \cos\frac{x}{3}\,dx=3\sin\frac{x}{3}$$

и по формуле (9.3.1) получаем:

$$\int \left(\frac{1}{2}x^2-x+6\right)\cos\frac{x}{3}\,dx=$$

$$=3\left(\frac{1}{2}x^2-x+6\right)\sin\frac{x}{3}-3\int (x-1)\sin\frac{x}{3}\,dx. \tag{9.3.3}$$

Чтобы вычислить последний интеграл, снова применим метод интегрирования по частям, положив $u=x-1$, $dv=\sin\frac{x}{3}\,dx$. Теперь

$$du=dx, \quad v=\int \sin\frac{x}{3}\,dx=-3\cos\frac{x}{3}.$$

Следовательно,

$$\int (x-1)\sin\frac{x}{3}\,dx=-3\,(x-1)\cos\frac{x}{3}+3\int \cos\frac{x}{3}\,dx=$$

$$=-3\,(x-1)\cos\frac{x}{3}+9\sin\frac{x}{3}+C.$$

Подставим этот результат в формулу (9.3.3):

$$\int \left(\frac{1}{2}x^2 - x + 6\right) \cos\frac{x}{3}\, dx =$$

$$= 3\left(\frac{1}{2}x^2 - x + 6\right) \sin\frac{x}{3} + 9\,(x-1)\cos\frac{x}{3} - 27\sin\frac{x}{3} + C.$$

Замечание 4. Если для вычисления некоторого интеграла формула интегрирования по частям применяется дважды, то важно проследить, чтобы при ее повторном применении не были проделаны в обратном порядке те выкладки, которые уже выполнены на первом шаге, что привело бы к тождеству.

Пример 9.26. Найти интеграл $\int (\arcsin x)^2\, dx$.

Решение. Полагая $u = (\arcsin x)^2$ и $dv = dx$, получим

$$du = \frac{2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx, \quad v = x.$$

По формуле (9.3.1)

$$\int (\arcsin x)^2\, dx = x\,(\arcsin x)^2 - \int \frac{2x}{\sqrt{1-x^2}} \arcsin x\, dx. \tag{9.3.4}$$

Последний интеграл снова берем по частям:

$$-\int \frac{2x}{\sqrt{1-x^2}} \arcsin x\, dx =$$

$$= \left[\begin{array}{ll} u = \arcsin x, & dv = -\dfrac{2x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx, \\ du = \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, & v = \displaystyle\int \frac{d\left(1-x^2\right)}{\sqrt{1-x^2}} = 2\sqrt{1-x^2} \end{array}\right] =$$

$$= 2\sqrt{1-x^2}\arcsin x - 2\int \sqrt{1-x^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx =$$

$$= 2\sqrt{1-x^2}\arcsin x - 2x + C.$$

Подставляя полученный результат в формулу (9.3.4), найдем искомый интеграл

$$\int (\arcsin x)^2\, dx = x\,(\arcsin x)^2 + 2\sqrt{1-x^2}\arcsin x - 2x + C.$$

Замечание 5. Метод повторного интегрирования по частям позволяет изящно находить так называемые циклические интегралы. Особенностью этих интегралов является то, что повторное интегрирование по *частям приводит к некоторому проинтегрированному выражению и исходному интегралу. В результате получаем линейное уравнение относительно искомого интеграла.*

Пример 9.27. Найти интеграл $I = \int \sqrt{x^2+a}\,dx$.

Решение. Сначала интегрируем по частям, следуя пункту **II(в)**:

$$I = \int \sqrt{x^2+a}\,dx = \left[\begin{array}{ll} u = \sqrt{x^2+a}\,, & dv = dx, \\ du = \dfrac{x\,dx}{\sqrt{x^2+a}}, & v = x \end{array}\right] = \\ = x\sqrt{x^2+a} - \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2+a}}.$$

Интеграл $\int v\,du$ проще исходного. С помощью простых преобразований он сводится к алгебраической сумме интегралов — табличного и искомого:

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2+a}}\,dx = \int \frac{\left(x^2+a\right)-a}{\sqrt{x^2+a}}dx = \int \left(\frac{x^2+a}{\sqrt{x^2+a}} - \frac{a}{\sqrt{x^2+a}}\right)dx = \\ = \int \sqrt{x^2+a}\,dx - a\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = I - a\ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\,\right|.$$

В результате получаем уравнение относительно искомого интеграла:

$$2I = x\sqrt{x^2+a} + a\ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\,\right| + C.$$

Отсюда находим

$$\int \sqrt{x^2+a}\,dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2+a} + a\ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\,\right|\right) + C \qquad (9.3.5)$$

Аналогичным образом вычисляется подобный интеграл

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{a^2-x^2} + a^2\arcsin\frac{x}{|\,a\,|}\right) + C, \quad a \neq 0.$$

Пример 9.28 Найти интеграл $I = \int e^{\alpha x}\cos\beta x\,dx$.

Решение. Применим метод интегрирования по частям (выбор частей роли не играет):

$$I = \int e^{\alpha x}\cos\beta x\,dx = \left[\begin{array}{ll} u = e^{\alpha x}, & dv = \cos\beta x\,dx \\ du = \alpha e^{\alpha x}\,dx, & v = \dfrac{\sin\beta x}{\beta} \end{array}\right] = \\ = \frac{e^{\alpha x}\sin\beta x}{\beta} - \frac{\alpha}{\beta}\int e^{\alpha x}\sin\beta x\,dx.$$

Полученный интеграл $\int v\,du$ не проще, но и не сложнее исходного $\int u\,dv$.

Еще раз воспользуемся формулой интегрированием по частям (теперь непременно следует выбирать части так, как и в первый раз):

$$\int e^{\alpha x}\sin\beta x\,dx = \left[\begin{array}{cc} u = e^{\alpha x}, & dv = \sin\beta x\,dx \\ du = \alpha e^{\alpha x}\,dx, & v = -\dfrac{\cos\beta x}{\beta} \end{array}\right] =$$

$$= -\frac{e^{\alpha x}\cos\beta x}{\beta} + \frac{\alpha}{\beta}\int e^{\alpha x}\cos\beta x\,dx.$$

В результате двукратного интегрирования по частям получаем линейное уравнение относительно заданного интеграла I:

$$I = \frac{e^{\alpha x}\sin\beta x}{\beta} + \frac{\alpha e^{\alpha x}\cos\beta x}{\beta^2} - \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 I \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad I\left(1 + \frac{\alpha^2}{\beta^2}\right) = \frac{e^{\alpha x}}{\beta^2}\left(\alpha\cos\beta x + \beta\sin\beta x\right).$$

Отсюда находим

$$I = \int e^{\alpha x}\cos\beta x\,dx = \frac{\alpha\cos\beta x + \beta\sin\beta x}{\alpha^2 + \beta^2}\,e^{\alpha x}.$$

В частном случае при $\alpha = 1$ и $\beta = 1$ имеем

$$\int e^{x}\cos x\,dx = \frac{e^{x}}{2}\left(\cos x + \sin x\right) + C.$$

Замечание 6. *Метод интегрирования по частям имеет, быть может, более узкую область применимости, нежели метод интегрирования заменой переменной. Однако следует иметь в виду, что некоторые типы интегралов не могут быть вычислены никаким иным способом, кроме как методом интегрирования по частям.*

Пример 9.29. Вывести рекуррентную формулу для вычисления интеграла

$$I_n = \int \frac{dx}{\left(x^2 + a^2\right)^n} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Решение. Применим метод интегрирования по частям:

$$I_n = \int \frac{dx}{\left(x^2 + a^2\right)^n} = \left[\begin{array}{cc} u = \dfrac{1}{\left(x^2 + a^2\right)^n} & dv = dx \\ du = -\dfrac{2n\,x\,dx}{\left(x^2 + a^2\right)^{n+1}} & v = x \end{array}\right] =$$