ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
И СТАТИСТИКА

И.Р. Высоцкий

# КРУЖОК ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

8–11 классы

УДК 372.851
ББК 22.17я72
В93

Высоцкий И. Р.
Кружок по теории вероятностей.
Электронное издание.
М.: МЦНМО, 2018.
128 с.
ISBN 978-5-4439-3167-8

Сборник составлен по материалам кружка МЦНМО, который проводился в 2015—2017 годах для школьников 8—9 классов. Задачи сгруппированы по занятиям, а занятия — по темам. Последовательность занятий устроена так, что сборник имеет обучающий характер. Большинство новых терминов и методов вводится через задачи. В конце сборника даны ответы и указания к решению, а также алфавитный справочник. В справочник вошли разъяснения многих терминов, формул и методов с примерами, иногда — с доказательствами. При этом предполагается, что у читателя имеются базовые знания теории вероятностей, хотя бы в объеме школьного учебника 7—8 классов.

Сборник предназначен для мотивированных школьников, интересующихся студентов, а также для руководителей кружков по теории вероятностей. Может быть использован для подготовки к олимпиадам по теории вероятностей и статистике.

Подготовлено на основе книги:
*Высоцкий И. Р.* Кружок по теории вероятностей. —
М.: МЦНМО, 2017. — 128 с. — ISBN 978-5-4439-1167-0

12+

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования
119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11,
тел. (499)241-08-04.
`http://www.mccme.ru`



**ISBN 978-5-4439-3167-8**

## Занятие 1

# Зачем нужна теория вероятностей?

*Перчатки в ящике. «Верю — не верю». Закон больших чисел*

### Перчатки в ящике

Теория вероятностей важна, поскольку она часто *предлагает разумные решения «практически наверняка» там, где алгебра и арифметика решений не дают вовсе или дают непрактичные решения.*

Возьмём шуточный пример. Известна задача: в ящике 100 левых и 100 правых перчаток. Сколько нужно вынуть перчаток (наугад), чтобы наверняка получилась пара? Ответ получается из принципа Дирихле: нужно достать 101 перчатку.

Если заменить требование «наверняка» требованием «практически наверняка», то оказывается, что достаточно взять всего 6 перчаток и тогда с очень высокой вероятностью (больше 0,96) среди них будет пара. Проверим.

Первая вынутая перчатка будет либо левой, либо правой. Для определённости предположим, что она левая. Какова теперь вероятность того, что следующие пять тоже будут левыми?

$$\frac{99}{199}\cdot\frac{98}{198}\cdot\frac{97}{197}\cdot\frac{96}{196}\cdot\frac{95}{195} < \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32} = 0{,}03125.$$

То есть с вероятностью больше, чем

$$1 - 0{,}03125 = 0{,}96875$$

не все перчатки будут левыми, и среди них найдётся пара.

Это нас устраивает, *если мы верим в событие*, имеющее вероятность 0,96 или больше. Считаем его очень *правдоподобным*, т. е. таким, которое случается *практически наверняка*. А событие с вероятностью менее 0,04 считаем *неправдоподобным* и не принимаем его в расчёт. Если кто-то так не считает, пусть возьмёт не шесть перчаток, а семь.

Принцип «верю-не верю» — один из основополагающих в математической статистике. Если теория говорит, что в однократном опыте событие очень маловероятно, то к нему нужно относиться как к невозможному. А если оно всё же происходит, то мы вправе удивиться. Или задать себе вопрос — а верно ли мы оценили вероятность?

*В однократном эксперименте к маловероятному событию следует относиться как к практически невозможному, не рассчитывая на его осуществление. Напротив, очень вероятное событие можно считать практически достоверным, полагаясь на то, что такое событие наступит*[1].

Где же граница маловероятности, начиная с которой мы не верим в практически невероятное событие? Чему равна эта *решающая вероятность?* Это зависит от того, насколько значительны последствия наступившего события. В примере с перчатками мы решили, что смиримся с малой вероятностью 0,032 события «Все перчатки на одну руку». Но если это всё же случится, большой беды не будет. Цена ошибки невелика.

А в медицине, авиации цена ошибки очень велика, поэтому в этих областях нежелательные события должны иметь крайне низкую вероятность. Чем ответственней эксперимент, тем ниже должна быть вероятность ошибочного решения или вывода.

Вот примеры задач, которые нельзя решить наверняка, зато можно решить практически наверняка:

1. Сколько нужно запасти саженцев, чтобы не менее 100 из них прижилось, если вероятность гибели одного саженца равна 0,05?

2. Сколько нужно иметь в запасе одеял в городском убежище на случай землетрясения или наводнения?

3. Сколько нужно иметь в запасе бумаги, чтобы хватило всем участникам ЕГЭ по математике?

Ни одна из этих задач не может быть решена точно, поскольку число погибших саженцев заранее неизвестно, школьники могут исписать немыслимую гору бумаги и т. п. Но все эти задачи разумно решаются с помощью теории вероятностей.

Попробуйте сами оценить допустимую вероятность ошибки в каждом из этих трёх случаев. Это будет ваше решающее правило.

[1] Обратите внимание: речь идёт об однократном опыте. Если такой опыт проводить множество раз, то рано или поздно случится и самое невероятное. Пословица гласит, что раз в жизни стреляет незаряженное ружьё.

## Рыба или курица — статистическая устойчивость на борту самолёта

Пример вероятностной задачи. В самолёте 200 пассажиров, и авиакомпания загрузила на борт 100 порций обедов с курицей и 100 порций с рыбой. Не все любят курицу, не все любят рыбу. Бывает, что некоторые пассажиры недовольны.

Авиакомпания провела исследование и выяснила, что на 100 последних одинаковых рейсах всего оказалось 338 недовольных пассажиров. Значит, среднее число недовольных в расчёте на один рейс равно 3,38.

Можно ли опираться на это среднее значение при дальнейших прогнозах?

Мнения участников кружка разделились. После обсуждения мы пришли к следующим утверждениям.

1. Среднее число недовольных пассажиров 338 — это ***статистика***, которая в дальнейшем может меняться (на других 100 таких же рейсах среднее число недовольных может быть другим). То есть, среднее число — величина случайная и изменчивая.

2. Резкое изменение среднего очень маловероятно. Мы готовы поверить в то, что в среднем будет 2, 3 или 5 недовольных пассажиров, но не готовы поверить в 20 или 50. Нам представляется *неправдоподобным* такое резкое изменение среднего. Почему? Пока мы это просто чувствуем.

3. Если среднее всё же сильно меняется, это значит, что изменились условия эксперимента (например, изменилось число пассажиров на рейсе или вдруг среди них стало много японцев, которые чаще предпочитают рыбу).

Иными словами, если мы наблюдали много значений случайной величины, а условия эксперимента (полёта) не меняются, то можно надеятся, что среднее значение величины «Число недовольных» в дальнейшем значительно меняться не будет — наблюдается статистическая устойчивость. Это — проявление ***закона больших чисел***, который связывает теорию вероятности и статистику. Собственно, закон больших чисел и делает теорию вероятности жизненной наукой.

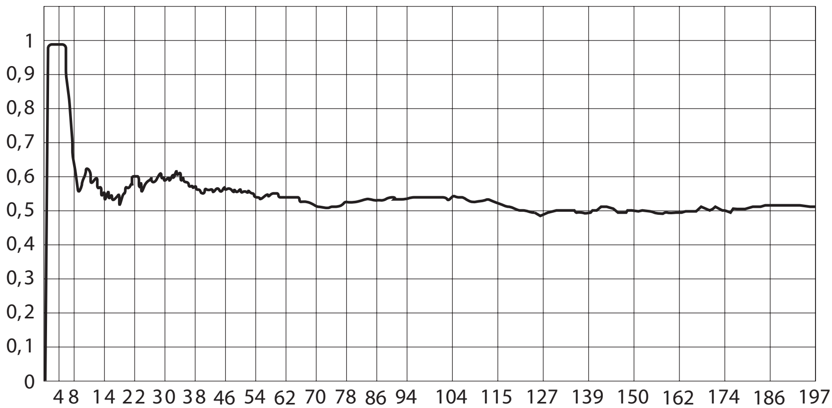
## Наблюдение устойчивости с помощью монеты

***Монета*** симметрична, поэтому мы считаем, что при бросании монеты решка и орёл имеют равные шансы. По этой причине мы ждём, что из 10 брошенных монет в среднем 5 выпадет орлом вверх. Попробуйте, опираясь только на опыт и интуицию, оценить, сколько орлов следует ждать в реальности.

Почти все участники кружка согласились, что очень трудно поверить в 0 и в 10 орлов, слабо верится в 1, 2, 8 или 9, но вполне можно допустить, что орлов случится от 3 до 7.

А если бросить монету 20 раз? Примем ли мы за вероятное число орлов от 6 до 14? Или придётся сузить границы? А если 30 раз? 100 раз?

Каждый из участников кружка бросил монету 200 раз. По одной из таких серий был построен график. Он получился примерно таким.




Получившийся график частоты события «Орёл» при 200 бросках монеты. Видно, что колебания частоты постепенно затухают

Можно видеть закономерность: колебания частоты вначале очень большие, а затем наступает стабилизация — колебания всё меньше и меньше, *частота стабилизуется около вероятности* 0,5.

К концу эксперимента с 200 монетами частота выпадения орла, конечно, отличается от 0,5, но чем больше отличие, тем реже оно встречается. Частота может оказаться 0,55 или 0,43, но чаще встречаются значения 0,51 или 0,49.

1. Почему колебания частоты постепенно затухают?

2. Почему частота стабилизируется около вероятности 0,5?

3. Почему вероятности больших отличий частоты от вероятности малы?

4. Можно ли считать правдоподобным, что частота отклонится от вероятности больше чем на 0,01? Больше чем на 0,1? Больше чем на 0,2?

Закон больших чисел проявляется по-разному. Например, так.

*При росте числа наблюдаемых значений случайной величины их среднее арифметическое испытывает всё меньшие колебания и постепенно приближается к математическому ожиданию этой величины.*

Важный частный случай этого утверждения относится к частотам событий. *При росте числа одинаковых экспериментов частота события испытывает всё меньшие колебания и постепенно приближается к вероятности этого события.*

Закон больших чисел даёт нам в руки мощное оружие.

Во-первых, *зная вероятность события, можно прогнозировать его частоту* и даже правдоподобные отклонения.

Во-вторых, *можно известной частотой события оценивать его вероятность,* полагаясь на то, что большое отклонение частоты от вероятности само по себе — событие маловероятное.

Проведите эксперимент с монетами самостоятельно с помощью программы `coins.exe` (`http://ptlab.mccme.ru/node/187`). Попробуйте определить, когда начинает заметно сказывается закон больших чисел, т. е. оцените на глаз момент (число бросаний), когда с вашей точки зрения, колебания частоты орла перестают быть резкими и график частоты стабилизируется.

А если использовать не монету, а другую модель? Например, фиксировать частоту выпадения шестёрки на игральной кости. Будет ли стабилизация частоты наступать в этом случае раньше или позже? Для бросания кости используйте другую программу dice.exe, которая доступна на той же странице.

## Занятие 2

# Простые задачи

*Случайные опыты с равновозможными элементарными событиями*

**2.1**. Бросают одну ***правильную кость***. Найдите вероятность того, что:

а) выпадет чётное число очков;

б) выпадет число, не превосходящее четырёх.

**2.2**. а) На клавиатуре телефона 10 клавиш с цифрами. Какова вероятность того, что случайно нажатая цифра будет чётной?

б) Из множества натуральных чисел от 10 до 29 наудачу выбирают одно число. Какова вероятность того, что оно делится на 3?

**2.3**. В городе, где живёт Рассеянный Учёный, телефонные номера состоят из 7 цифр. Учёный легко запоминает телефонный номер, если этот номер — палиндром, т. е. он одинаково читается слева направо и справа налево. Например, номер 443 53 44 Учёный запоминает легко, а номер 372 36 27 — с трудом. Найдите вероятность того, что телефонный номер нового случайного знакомого Учёный запомнит легко.

**2.4**. а) В ящике лежат 4 чёрных шара и 1 белый. Из ящика случайным образом достали один шар. Чему равна вероятность того, что он будет белым? Если первый шар оказался белым, то чему равна вероятность того, что следующий вынутый шар тоже окажется белым?

б) Та же задача, но в начале в ящике лежат 8 чёрных шаров и 2 белых.

**2.5**. Дима подбросил ***монету*** три раза. Чему равна вероятность того, что:

а) первая монета выпадет орлом вверх;

б) выпадет ровно два орла;

в) выпадет ровно одна решка;

г) выпадет не более двух решек?

**2.6**. Учитель нарисовал на доске квадрат $ABCD$ и предлагает ученику выбрать две любые вершины. Чему равна вероятность того, что при ***случайном выборе*** ученик выберет вершины $A$ и $B$?

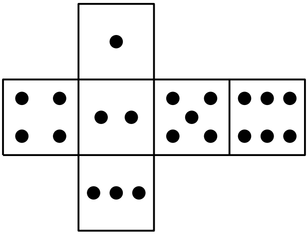
**2.7**. Три усталых ковбоя зашли в салун и повесили свои шляпы на бизоний рог при входе. Когда глубокой ночью ковбои уходили, они были не в состоянии отличить одну шляпу от другой и поэтому разобрали шляпы наугад. Найдите вероятность того, что никто из них не взял свою собственную шляпу.

**2.8**. Вася сложил прямоугольный листок бумаги вчетверо и поставил сверху крестик. Затем он развернул листок, после этого снова сложил его по прежним линиям сгиба случайным образом (не обязательно, как раньше) и оставил на столе, положив случайной стороной вверх. Найдите вероятность того, что крестик опять оказался сверху.

**2.9**. Бросают две игральные кости. Какова вероятность того, что на костях выпадет одно и то же число очков?

**2.10**. Трое друзей хотят пить. Неподалёку — палатка с квасом, но туда лень идти. Тогда решили бросить жребий, кому идти за квасом, но у них нашлась только одна монета. Как им устроить честный жребий так, чтобы у всех получились равные шансы?

**2.11**. Что странного в развёртке игрального кубика?



## Занятие 3

# Диаграммы Эйлера

*Изображение событий с помощью диаграмм. Решение задач. Формула сложения вероятностей*

**3.1**. Покажите на ***диаграмме Эйлера*** (рис. 3.1) событие:

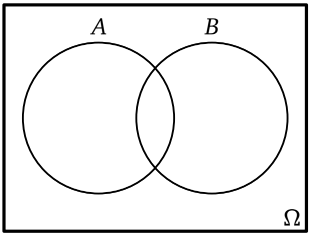



Рис. 3.1

а) ***пересечение*** $A \cap B$; б) ***объединение*** $A \cup B$;
в) событие $\overline{A}$, ***противоположное*** событию $A$; г) $A \cap \overline{B}$.

**3.2**. Покажите на диаграмме Эйлера событие:
а) $A \cap B \cap C$; б) $A \cup B \cap C$; в) $A \cap \overline{B \cap C}$; г) $\bar{A} \cap (B \cup \bar{C})$.

**3.3**. Нарисуйте диаграмму Эйлера для ***несовместных событий*** $A$ и $B$.

**3.4**. Нарисуйте диаграмму Эйлера, если событие $B$ целиком содержится в событии $A$.

**3.5**. Известно, что событие $A$ имеет вероятность 0,8, событие $B$ — вероятность 0,6. Могут ли они быть несовместными? Изобразите события на диаграмме Эйлера. Найдите наименьшую возможную вероятность события $A \cap B$.

**3.6**. Известно, что событие $A$ имеет вероятность 0,8, событие $B$ — вероятность 0,6, а их пересечение $A \cap B$ имеет вероятность 0,45. Найдите вероятность объединения событий $A$ и $B$.

**3.7**. В классе 30 учеников. Вероятность того, что случайно выбранный ученик — мальчик, равна 0,6, вероятность того, что случайно выбранный ученик имеет тёмные волосы, равна 0,3, а всего в классе 6 темноволосых мальчиков.

Найдите вероятность того, что случайно выбранный ученик:

а) светловолосая девочка; б) светловолосый мальчик.

**3.8**. В торговом центре установлены два кофейных автомата. Вероятность того, что в первом автомате к концу дня кофе закончится, равна 0,2. То же самое верно и для второго автомата. А вероятность того, что кофе закончится в обоих автоматах, равна 0,12. Найдите вероятность того, что к концу дня:

а) кофе останется в обоих автоматах;

б) кофе закончится ровно в одном автомате;

в) кофе закончится хотя бы в одном автомате.

**3.9**. Выведите ***формулу сложения вероятностей*** для двух событий:

$$\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cap B).$$

## Занятие 4

# Геометрическая вероятность

*Случайный выбор точки внутри отрезка или фигуры*

**4.1**. В квадрате выбирается случайная точка. Найдите вероятность того, что выбранная точка принадлежит кругу, вписанному в квадрат.

**4.2**. Буратино посадил в центре прямоугольного лиса бумаги размером 20 см на 30 см круглую кляксу радиусом 1 см. Сразу после этого Буратино посадил ещё одну такую же кляксу, которая также целиком оказалась на листе. Найдите вероятность того, что эти две кляксы не соприкасаются.

**4.3**. На бесконечную шахматную доску, у которой все поля — квадраты со стороной 4, наудачу бросают монету радиусом 1.

а) Найдите вероятность того, что монета целиком попадёт в один квадрат.

б) Найдите вероятность того, что монета пересечёт не более одной стороны квадрата.

**4.4**. Стрелок производит выстрел в центр квадратной мишени с диагональю 2 м. Какова вероятность попасть в мишень, если пуля может отклониться от центра в случайном направлении и попасть в случайную точку квадрата или рядом с ним, но не дальше 1 метра от центра мишени?

**4.5**. Хрупкий карандашный грифель ломают в двух случайных точках. Найдите вероятность того, что из трёх получившихся частей можно составить треугольник.

**4.6**. Коля и Женя договорились встретиться в метро в первом часу дня. Коля приходит на место встречи между полуднем и часом дня, ждёт 10 минут и уходит. Женя поступает точно так же. Какова вероятность того, что они встретятся?

**4.7**. На кольцевой линии первый поезд отходит от станции в направлении по часовой стрелке в 6:00. В 6:01 от этой же станции отходит первый поезд в противоположном направлении. Далее поезда

# Оглавление