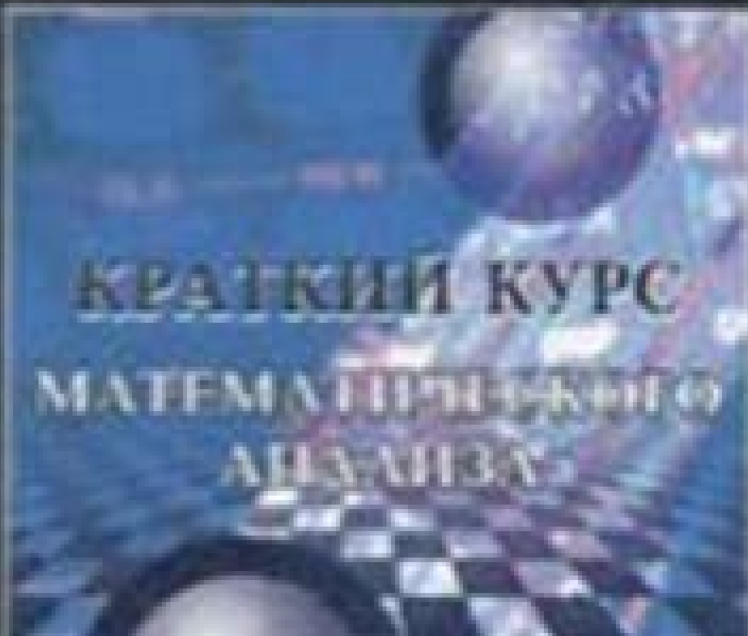
Л.Д. КУДРЯВЦЕВ

КРАТКИЙ КУРС МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА



2

Кудрявцев Л.Д.

Краткий курс математического анализа

МОСКВА
ФИЗМАТЛИТ ®

УДК 517
ББК 22.161.1
К88

Кудрявцев Л. Д. **Краткий курс математического анализа. Т. 2. Дифференциальное и интегральное исчисления функций многих переменных. Гармонический анализ**: Учебник. — 3-е изд., перераб. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. — 424 с. — ISBN 5-9221-0185-4.

Излагаются традиционные разделы математического анализа: дифференциальное и интегральное исчисления функций многих переменных, гармонический анализ. В конце тома помещен краткий исторический очерк развития понятий математического анализа. Нумерация параграфов и рисунков продолжает нумерацию первого тома.

Второе издание — 1998 г.

Для студентов физико-математических и инженерно-физических специальностей.

Ил. 88.

Рецензенты:

заведующий кафедрой общей математики факультета ВМиК МГУ им. М.В. Ломоносова, академик *В.А. Ильин*;

профессор МФТИ, академик *С.М. Никольский*.

Учебное издание

КУДРЯВЦЕВ Лев Дмитриевич

КРАТКИЙ КУРС МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

ТОМ 2

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ И ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЯ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ. ГАРМОНИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Редактор *Е.Ю. Ходан*
Корректор *Л.Т. Варьяш*
Иллюстрации *А.А. Логунова*
Оформление переплета *А.Ю. Алехиной*
Оригинал-макет *Н.Л. Ивановой*

ЛР № 071930 от 06.07.99. Подписано в печать 25.03.02. Формат 60×90/16.
Бумага офсетная. Печать офсетная. Усл. печ. л. 26,5. Уч.-изд. л. 29,7.
Допеч. тиража 3000 экз. Заказ №

Издательская фирма “Физико-математическая литература”
МАИК “Наука/Интерпериодика”
117997 Москва, Профсоюзная, 90
E-mail: fizmat@maik.ru

ISBN 5-9221-0185-4

9 785922 101851

Отпечатано с готовых диапозитивов в ПФ «Полиграфист»
160001, г. Вологда, ул. Челюскинцев, 3
Тел.: (8172) 72-55-31, 72-61-75, факс (8172) 72-60-72
E-mail: form.pfp@votel.ru http://www.vologda/~pfpv

ISBN 5-9221-0185-4 (Т. 2)
ISBN 5-9221-0183-8

ОГЛАВЛЕНИЕ

ГЛАВА 4

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

ГЛАВА 6

ГАРМОНИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

ГЛАВА 4

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

§ 33. Многомерные пространства.

33.1. Определение n-мерного пространства. Если на плоскости R^2 фиксирована прямоугольная система координат, то между точками плоскости и всевозможными парами чисел (x, y) (x и y — координаты точек) существует взаимно однозначное соответствие. Если в пространстве задана аналогичная система координат, то между точками пространства и их координатами — всевозможными тройками (x, y, z) — также существует взаимно однозначное соответствие. С помощью координат точек на плоскости, используя теорему Пифагора, можно выразить расстояние ρ между двумя точками $M_1 = (x_1, y_1)$ и $M_2 = (x_2, y_2)$ формулой

$$\rho = \rho(M_1, M_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}. \tag{33.1}$$

В пространстве R^3 формула для расстояния ρ между точками $M_1 = (x_1, y_1, z_1)$ и $M_2 = (x_2, y_2, z_2)$ имеет аналогичный вид:

$$\rho = \rho(M_1, M_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}. \tag{33.2}$$

Пары (x, y) и тройки (x, y, z) чисел можно рассматривать также и как координаты векторов на плоскости и в пространстве. Как известно, различные операции над векторами можно описывать в терминах их координат. Например, координаты линейной комбинации $\lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b}$ векторов $\mathbf{a} = (x_1, y_1, z_1)$ и $\mathbf{b} = (x_2, y_2, x_2)$ являются соответствующими линейными комбинациями координат данных векторов:

$$\lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b} = (\lambda x_1 + \mu x_2,\ \lambda y_1 + \mu y_2,\ \lambda z_1 + \mu z_2), \tag{33.3}$$

в частности,

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (x_1 + x_2,\ y_1 + y_2,\ z_1 + z_2), \tag{33.4}$$

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = (x_1 - x_2,\ y_1 - y_2,\ z_1 - z_2). \tag{33.5}$$

Скалярное произведение $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ выражается через их координаты следующим образом:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2), \tag{33.6}$$

а для длины $|\mathbf{a}|$ вектора $\mathbf{a}$ имеет место формула

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{(\mathbf{a}, \mathbf{a})} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}. \tag{33.7}$$

Из (33.7) видно, что расстояние (33.2) между точками $M_1 = (x_1, y_1, z_1)$ и $M_2 = (x_2, y_2, z_2)$ есть не что иное, как длина вектор $\mathbf{a}$ с началом в одной из этих точек и концом в другой, т. е. длина разности (33.5) векторов $\mathbf{a} = (x_1, y_1, z_1)$ и $\mathbf{b} = (x_2, y_2, z_2)$:

$$\rho(M_1, M_2) = |\mathbf{a} - \mathbf{b}|. \tag{33.8}$$

Нам понадобится понятие n-мерного пространства (n — натуральное число), элементами x которого являются упорядоченные множества n действительных чисел

$$x = (x_1, x_2, ..., x_n), \quad x_k \in R, \quad k = 1, 2, ..., n.$$

Эти элементы по аналогии с обычным пространством можно рассматривать и как точки, и как векторы (n-мерного пространства). В первом случае для них определяется понятие расстояния, во втором — соответствующие векторные операции.

Линейная комбинация с коэффициентами λ и μ двух элементов $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ и $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ по аналогии с формулой (33.3) определяется равенством

$$\lambda x + \mu y \stackrel{\text{def}}{=} (\lambda x_1 + \mu y_1,\ \lambda x_2 + \mu y_2,\ ...,\ \lambda x_n + \mu y_n). \tag{33.9}$$

В частности,

$$x + y = (x_1 + y_1,\ x_2 + y_2,\ ...,\ x_n + y_n), \tag{33.10}$$

$$x - y = (x_1 - y_1,\ x_2 - y_2,\ ...,\ x_n - y_n), \tag{33.11}$$

$$\lambda x = (\lambda x_1,\ \lambda x_2,\ ...,\ \lambda x_n). \tag{33.12}$$

Скалярное произведение элементов x и y определяется равенством

$$(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} x_1 y_1 + x_2 y_2 + ... + x_n y_n. \tag{33.13}$$

Подчеркнем, что в случае $n = 1, 2, 3$ формулы (33.9) и (33.13) доказываются с помощью свойств геометрии трехмерного пространства, а в случае $n > 3$ они принимаются за определение.

Определение 1. Множество всех упорядоченных систем $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ n действительных чисел, для которых определены линейные комбинации (33.9) и скалярное произведение (33.13), называется *n-мерным арифметическим евклидовым векторным пространством* и обозначается R^n. Его элементы $x = (x_1, ..., x_n)$ называются *векторами*, а числа $x_1, x_2, ..., x_n$ — их *координатами.*

Отметим, что для простоты записи векторы в n-мерном пространстве при произвольном n обычно обозначаются светлым шрифтом.

Вектор $0 = (0, 0, ..., 0)$ называется *нулевым вектором.*

Для любого вектора x вектор $-x \stackrel{\text{def}}{=} (-1)x$ называется *противоположным* вектору x. Очевидно, что $x + (-x) = 0$.

Скалярное произведение (33.13) векторов пространства R^n имеет следующие свойства.

1°. *Симметричность*: $(x, y) = (y, x)$.
2°. *Линейность*: $(\lambda x + \mu y, z) = \lambda(x, z) + \mu(y, z)$.
3°. $(x, x) \geqslant 0$.
4°. *Если* $(x, x) = 0$, *то* $x = 0$.

Все это верно для любых $x \in R^n$, $y \in R^n$, $z \in R^n$ и $\lambda \in R$, $\mu \in R$. Свойства 1°–4° непосредственно следуют из определения (33.13).

Длина $|x|$ вектора x пространства R^n по аналогии с формулой (33.7) определяется равенством

$$|x| \overset{\text{def}}{=} \sqrt{(x, x)}, \tag{33.14}$$

следовательно,

$$|x| \underset{(33.13)}{=} \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}. \tag{33.15}$$

Очевидно, что длина $|x|$ вектора x равна нулю тогда и только тогда, когда $x = 0$.

Длина вектора обладает тем свойством, что для любого числа λ имеет место равенство

$$|\lambda x| = |\lambda||x|. \tag{33.16}$$

В частности, $|-x| = |x|$

Лемма 1. *Для скалярного произведения векторов* $x \in R^n$ *и* $y \in R^n$ *справедливо неравенство*

$$|(x, y)| \leqslant |x||y|. \tag{33.17}$$

Это неравенство называется *неравенством Коши–Шварца**).

$\triangleright$ Если $x = 0$, то неравенство (33.17) очевидно, так как обе части обращаются в нуль.

Пусть $x \neq 0$. Для любого $t \in R$ согласно свойству 3° скалярного произведения выполняется неравенство

$$(tx + y,\ tx + y) \geqslant 0. \tag{33.18}$$

С другой стороны, в силу 1° и 2°

$$(tx + y,\ tx + y) = (x, x)t^2 + 2t(x, y) + (y, y), \tag{33.19}$$

поэтому

$$(x, x)t^2 + 2t(x, y) + (y, y) \underset{(33.18),(33.19)}{\geqslant} 0,$$

где из условия $x \neq 0$ согласно свойству 4° имеем $(x, x) \neq 0$. Но если квадратный трехчлен неотрицателен, то его дискриминант неположителен:

$$(x, y)^2 - (x, x)(y, y) \leqslant 0,$$

а это неравенство равносильно неравенству (33.17). $\triangleleft$

*) Г. Шварц (1843–1921) — немецкий математик.

С л е д с т в и е 1. *Для любых векторов $x \in R^n$ и $y \in R^n$ выполняется неравенство*

$$|x+y| \leqslant |x| + |y|. \tag{33.20}$$

▷ Действительно,

$$|x+y| \underset{(33.14)}{=} \sqrt{(x+y, x+y)} \underset{1^\circ, 2^\circ}{=} \sqrt{(x,x)+2(x,y)+(y,y)} \underset{(33.14),(33.17)}{\leqslant}$$

$$\underset{(33.14),(33.17)}{\leqslant} \sqrt{|x|^2+2|x||y|+|y|^2} \leqslant \sqrt{(|x|+|y|)^2} = |x|+|y|. \lhd$$

В координатной записи неравенства (33.17) и (33.20) имеют вид

$$\Big|\sum_{i=1}^n x_i y_i\Big| \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2},$$

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i+y_i)^2} \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2}.$$

С л е д с т в и е 2. *Для любых векторов $x \in R^n$ и $y \in R^n$ выполняется неравенство*

$$\big||x| - |y|\big| \leqslant |x-y|. \tag{33.21}$$

▷ Это неравенство является непосредственным следствием неравенства (33.20). В самом деле,

$$|x| = |x-y+y| \underset{(33.20)}{\leqslant} |x-y| + |y|,$$

поэтому $|x|-|y| \leqslant |x-y|$. Аналогично, $|y|-|x| \leqslant |y-x| = |x-y|$. Из двух последних неравенств и следует неравенство (33.21). ◁

Два вектора, скалярное произведение которых равно нулю, называются *ортогональными.* Ненулевые ортогональные векторы называются *перпендикулярными.*

Если вектор e_i имеет все координаты равными нулю, кроме i-й, которая равна единице, то множество векторов $x = e_i t$, $-\infty < t < +\infty$, называется *i-й координатной осью арифметического векторного пространства*, $i = 1, 2, ..., n$, а упорядоченное множество векторов $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ — *каноническим базисом* этого пространства.

Векторы канонического базиса ортогональны друг другу, и длины их равны единице.

Всякое упорядоченное множество n единичных векторов e_i', $i = 1, 2, ..., n$ (т. е. длины которых равны единице), попарно ортогональны друг другу:

$$|e_i| = 1, \quad (e_i, e_j) = 0, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, 2, ..., n,$$

называется *базисом пространства* или, более полно, *ортонормированным базисом.*

Из линейной алгебры известно, что каждый вектор раскладывается, и при этом единственным образом, в линейную комбинацию векторов базиса. Коэффициенты этого разложения называются *координатами вектора относительно данного базиса.* Поэтому переход от одного базиса к другому называется *переходом от одной системы координат к другой.*

Из линейной алгебры известно также, что векторы любого ортонормированного базиса $\{e'_1, e'_2, ..., e'_n\}$ выражаются через векторы другого такого базиса $\{e''_1, e''_2, ..., e''_n\}$ (в частности, через векторы канонического базиса $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$):

$$e'_i = \sum_{i=1}^{n} c_{ij} e''_j, \quad i = 1, 2, ..., n,$$

с помощью матрицы $C = (c_{ij})$, $i,j = 1, 2, ..., n$, у которой обратная матрица C^{-1} совпадает с транспонированной C^*:

$$C^{-1} = C^*.$$

Такие матрицы называются *ортогональными.*

Верно и обратное утверждение: если упорядоченная система векторов выражается через некоторый ортонормированный базис с помощью ортогональной матрицы, то эта система также является ортонормированным базисом.

Если $\{e'_1, e'_2, ..., e'_n\}$ — базис, то множество векторов $x = e'_i t$, $-\infty < t < +\infty$, называется i-й координатной осью для рассматриваемого базиса, $i = 1, 2, ..., n$.

Для элементов $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ и $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ можно ввести по аналогии с формулой (33.8) понятие расстояния $\rho(x, y)$ между ними:

$$\rho(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} |x - y|. \tag{33.22}$$

Используя формулы (33.11) и (33.15), расстояние $\rho(x, y)$ можно записать в виде

$$\rho(x,y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + ... + (x_n - y_n)^2}, \tag{33.23}$$

откуда следует, что расстояние, определенное посредством формулы (33.22), в случае $n = 1, 2, 3$ (см. формулы (33.1) и (33.2)) совпадает с обычным расстоянием между точками.

О п р е д е л е н и е 2. Множество всех упорядоченных систем $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ n действительных чисел, для которых определено по формуле (33.23) расстояние, называется *n-мерным арифметическим евклидовым точечным пространством* и также обозначается через R^n. Элементы $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ называются его *точками*, а числа $x_1, x_2, ..., x_n$ — их *координатами.* Точка $O = (0, 0, ..., 0)$ называется *началом координат* этого пространства, а по аналогии с векторным пространством множество точек, все координаты которых равны нулю, кроме стоящей на i-м месте, которая принимает все действительные значения: $-\infty < x_i < +\infty$, называется его *i-й координатной осью*, $i = 1, 2..., n$.

В дальнейшем слова “арифметическое” и “евклидово” будут для краткости опускаться и будет просто говориться о векторных и точечных n-мерных пространствах (в § 52 будет дано дальнейшее развитие понятия пространства).

Как в случае векторного, так и в случае точечного n-мерного пространства число n называется *размерностью* этого пространства.

Расстояние $\rho(x, y)$ между точками x и y n-мерного пространства R^n имеет следующие свойства.

1°. $\rho(x, y) \geqslant 0$, *причем* $\rho(x, y) = 0$ *тогда и только тогда, когда* $x = y$.

2°. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$.

3°. $\rho(x, y) \leqslant \rho(x, z) + \rho(z, y)$. (33.24)

(*Здесь* x, y, z — *произвольные точки* R^n.)

Неравенство (33.24) называется *неравенством треугольника.*

Свойство 1° расстояния следует из формулы (33.22), свойства 3° скалярного произведения и того, что длина $|x - y|$ вектора $x - y$ равна нулю в том и только том случае, когда $x = y$.

Свойство 2° расстояния следует из (33.16):

$$\rho(x, y) = |x - y| = |(-1)(y - x)| = |y - x| = \rho(y, x),$$

а свойство 3° — из следствия леммы 1. В самом деле,

$$\rho(x, y) \underset{(33.22)}{=} |x - y| = |(x - z) + (z - y)| \underset{(33.20)}{\leqslant} |x - z| + |z - y| \underset{(33.22)}{=} \underset{(33.22)}{=} \rho(x, z) + \rho(z, y).$$

В ближайших параграфах в основном будет встречаться точечное n-мерное пространство R^n. Векторная структура, которой его можно наделить, будет мало использоваться (однако именно она позволила нам компактно доказать свойства расстояния в n-мерном пространстве).

33.2. Сходимость последовательностей точек в n-мерном пространстве. Прежде всего определим понятие окрестности в n-мерном пространстве.

Определение 3. Пусть $x \in R^n$ и $\varepsilon > 0$. Совокупность всех таких точек $y \in R^n$, что $\rho(x, y) < \varepsilon$, называется *n-мерным открытым шаром радиуса ε с центром в точке x* или *ε-окрестностью* (а иногда *сферической* или, правильнее, *шаровой окрестностью*) *точки x в пространстве R^n* и обозначается $U(x; \varepsilon)$.

Таким образом,

$$U(x;\varepsilon) \overset{\text{def}}{=} \{y\colon y \in R^n,\ \rho(x,y) < \varepsilon\}. \qquad (33.25)$$

В координатной записи это определение выглядит следующим образом:

$$U(x;\varepsilon) = \left\{y = (y_1, ..., y_n)\colon \sum_{i=1}^{n} (y_i - x_i)^2 < \varepsilon^2\right\},\quad x = (x_1, ..., x_n),\quad \varepsilon > 0.$$

Если $n = 1$, то $U(x;\varepsilon) = (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ — интервал длины 2ε с центром в точке x. Если $n = 2$, то $U(x;\varepsilon)$ — круг радиуса ε с центром в точке (x_1, x_2). Если же $n = 3$, то $U(x;\varepsilon)$ — обычный трехмерный шар радиуса ε с центром в точке (x_1, x_2, x_3).

Иногда бывает полезным также и понятие прямоугольной окрестности.

Определение 4. Множество

$$P(x;\delta_1, ..., \delta_n) = \{y = (y_1, ..., y_n)\colon |y_i - x_i| < \delta_i,\ i = 1, 2, ..., n\} \qquad (33.26)$$

называется *прямоугольной* (или, при $n \geqslant 3$, *параллелепипедальной*) *окрестностью точки* x.

В частном случае $\delta_1 = \delta_2 = ... = \delta_n = \delta$ множество

$$P(x;\delta) \overset{\text{def}}{=} P(x;\delta, ..., \delta) \qquad (33.27)$$

называется *кубической окрестностью точки* x.

Очевидно, что если для чисел $\delta_1, ..., \delta_n$ положить

$$\delta_0 = \min\{\delta_1, ..., \delta_n\},\quad \delta = \max\{\delta_1, ..., \delta_n\},$$

то

$$P(x;\delta_0) \subset P(x;\delta_1, ..., \delta_n) \subset P(x;\delta). \qquad (33.28)$$

Прямоугольную окрестность $P(x;\delta_1, ..., \delta_n)$ называют также *n-мерным открытым параллелепипедом* или, более полно, n-мерным открытым параллелепипедом, ребра которого параллельны координатным осям и имеют длины $2\delta_1, 2\delta_2, ..., 2\delta_n$, а $P(x;\delta)$ — *n-мерным открытым кубом* с ребрами длины 2δ и параллельными координатными осям.

Если $n = 1$, то $P(x;\delta) = (x-\delta, x+\delta)$ — снова интервал; если $n = 2$, то $P(x;\delta_1, \delta_2)$ — прямоугольник, а $P(x;\delta)$ — квадрат, а если $n = 3$, то $P(x;\delta_1, \delta_2, \delta_3)$ — обычный трехмерный параллелепипед, а $P(x;\delta)$ — куб.

Лемма 2. *Любая сферическая окрестность точки пространства R^n содержит прямоугольную окрестность и содержится в прямоугольной окрестности этой точки.*

Любая прямоугольная окрестность точки содержит сферическую окрестность и содержится в сферической окрестности этой точки.

$\triangleright$ Прежде всего отметим, что для любых чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ справедливо неравенство

$$|a_i| \leqslant \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2} \leqslant |a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n|, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{33.29}$$

которое доказывается возведением обеих частей в квадрат. В силу этого неравенства для координат любых двух точек $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ пространства R^n справедливо неравенство

$$\begin{aligned} |y_i - x_i| \underset{(33.29)}{\leqslant} \rho(x, y) \underset{(33.23)}{=} \\ \underset{(33.23)}{=} \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + \ldots + (y_n - x_n)^2} \underset{(33.29)}{\leqslant} \\ \underset{(33.29)}{\leqslant} |y_1 - x_1| + |y_2 - x_2| + \ldots + |y_n - x_n|, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \end{aligned} \tag{33.30}$$

из которого согласно определениям (33.25) и (33.26) сразу следуют оба утверждения леммы 2. $\triangleleft$

Упражнение 1. Доказать, что для любого $\varepsilon > 0$ и любой точки $x \in R^n$ справедливы включения

$$P\left(x;\, \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}\right) \subset U(x; \varepsilon) \subset P(x; \varepsilon) \subset U(x;\, \varepsilon\sqrt{n}.)$$

Мы будем рассматривать последовательности $\{x^{(m)}\}$ точек пространства R^n, т. е. отображения $f\colon N \to R^n$ множества натуральных чисел N в пространство R^n (см. п. 4.6*), где

$$x^{(m)} = f(m), \quad m \in N.$$

По аналогии со случаем числовых последовательностей определяется понятие подпоследовательности. Если из некоторых членов последовательности $\{x^{(m)}\}$ точек n-мерного пространства составлена новая последовательность $\{x^{(m_k)}\}$, в которой порядок следования ее членов совпадает с порядком их следования в исходной последовательности (из $k_1 > k_2$ следует $m_{k_1} > m_{k_2}$), то последовательность $\{x^{(m_k)}\}$ называется *подпоследовательностью* последовательности $\{x^{(m)}\}$.

Определение 5. Точка $x \in R^n$ называется *пределом последовательности* $x^{(m)} \in R^n$, $m = 1, 2, \ldots$, если

$$\lim_{m \to \infty} \rho(x^{(m)}, x) = 0. \tag{33.31}$$

В этом случае пишут

$$\lim_{m \to \infty} x^{(m)} = x$$

и говорят, что последовательность $\{x^{(m)}\}$ *сходится к точке* x.

Последовательность, которая сходится к некоторой точке пространства R^n, называется *сходящейся*.

Условие (33.31) означает, что для любого $\varepsilon > 0$ (и, следовательно, для любой ε-окрестности $U(x;\varepsilon)$ точки x) существует такой номер m_0, что для всех $m > m_0$ выполняется неравенство

$$\rho(x^{(m)}; x) < \varepsilon, \tag{33.33}$$

т. е. включение

$$x^{(m)} \in U(x;\varepsilon). \tag{33.34}$$

Согласно лемме 2 отсюда вытекает, что $\lim\limits_{m\to\infty} x^{(m)} = x$ в том и только том случае, когда для любой кубической окрестности $P(x;\delta)$ существует такой номер m_0, что для всех $m > m_0$ выполняется включение $x^{(m)} \in P(x;\delta)$.

В случае $n = 1$ определение 5 превращается в обычное определение предела числовой последовательности. При $n = 2$ сходимость последовательности $\{x^{(m)}\}$ точек плоскости R^2 к точке x этой плоскости означает, что, каков бы ни был круг с центром в точке x, начиная с некоторого номера, зависящего от радиуса этого круга, все члены данной последовательности находятся внутри указанного круга (рис. 129). Аналогичная ситуация имеет место и при $n = 3$, только там роль круга играет шар. Как и в случае числовых последовательностей, определение 5 означает, что точка x является пределом последовательности $\{x^{(m)}\}$, если вне любой ε-окрестности точки x имеется лишь конечное множество (быть может, пустое) членов этой последовательности.

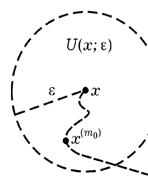


Рис. 129

Определение (33.31) предела последовательности точек в пространстве R^n дано с помощью предела числовой последовательности $\{\rho(x^{(m)}, x)\}$. Оно может быть сведено и к понятию предела числовых последовательностей их координат.

Т е о р е м а 1. *Для того чтобы последовательность*

$$x^{(m)} = (x_1^{(m)}, ..., x_n^{(m)}) \in R^n, \quad m = 1, 2, ...,$$

имела своим пределом точку $x = (x_1, ..., x_n) \in R^n$, *необходимо и достаточно, чтобы*

$$\lim_{m\to\infty} x_i^{(m)} = x_i, \quad i = 1, 2, ..., n. \tag{33.35}$$

▷ Это утверждение сразу следует из неравенства (33.30) при $y = x^{(m)}$, т. е. из неравенства

$$|x_i^{(m)} - x_i| \leqslant \rho(x^{(m)}, x) \leqslant |x_1^{(m)} - x_1| + |x_2^{(m)} - x_2| + ... + |x_n^{(m)} - x_n|,$$
$$i = 1, 2, ..., n. \quad ◁$$

Напомним, что теорема 1 при $n = 2$, т. е. для плоскости, была уже доказана в п. 5.11, когда точки плоскости интерпретировались как комплексные числа.

Из теоремы 1 и свойств пределов числовых последовательностей следует, что если последовательность точек имеет предел, то он единствен, и что всякая подпоследовательность сходится к тому же пределу, что и вся последовательность.

Последовательность $x^{(m)} \in R^n$, $m = 1, 2, \ldots$, называется *фундаментальной* или *последовательностью, удовлетворяющей условию Коши*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер m_0, что для всех $m > m_0$ и всех натуральных p выполняется неравенство

$$\rho(x^{(m)}, x^{(m+p)}) < \varepsilon.$$

Из неравенства (33.30) следует, что для того чтобы последовательность $\{x^{(m)}\}$ была фундаментальной, необходимо и достаточно, чтобы все n числовых последовательностей координат ее точек были фундаментальными. Отсюда согласно теореме 1 и критерию Коши сходимости числовых последовательностей следует, что *для того чтобы последовательность* $x^{(m)} \in R^n$, $n = 1, 2, \ldots$, *была сходящейся, необходимо и достаточно, чтобы она удовлетворяла условию Коши.*

Это утверждение называется *критерием Коши сходимости последовательности точек n-мерного пространства.*

Определение 6. Множество в n-мерном пространстве называется *ограниченным*, если оно содержится в некотором n-мерном кубе.

Согласно лемме 2 множество ограничено тогда и только тогда, когда оно содержится в некотором n-мерном шаре.

Иногда бывает удобным при рассмотрении ограниченных множеств использовать понятие диаметра множества, определяемое следующим образом.

Определение 7. *Диаметром* $\operatorname{diam} X$ множества X называется верхняя грань попарных расстоянии между его точками:

$$\operatorname{diam} X = \sup_{x, y \in X} \rho(x, y).$$

Из определения диаметра множества, очевидно, следует, что для любых двух его точек $x \in X$ и $y \in X$ выполняется неравенство $\rho(x, y) \leqslant \operatorname{diam} X$. Ясно также, что

$$0 \leqslant \operatorname{diam} X \leqslant +\infty.$$

Замечание 1. Множество X ограничено тогда и только тогда, когда его диаметр конечен.

$\triangleright$ В самом деле, если множество X ограничено, то существует такой n-мерный шар Q^n радиуса r с центром в точке $x^{(0)}$, что $X \subset Q^n$. Тогда для любых точек x, y множества X имеем

$$\rho(x, y) \leqslant \rho(x,\, x^{(0)}) + \rho(x^{(0)},\, y) \leqslant 2r.$$

Поэтому

$$\operatorname{diam} X = \sup_{x,y\in X} \rho(x,y) \leqslant 2r,$$

т. е. диаметр множества X конечен.

Наоборот, если диаметр множества X конечен: $\operatorname{diam} X < +\infty$, то возьмем произвольную точку $x^{(0)}$ в этом множестве и рассмотрим n-мерный шар Q^n радиуса $r = \operatorname{diam} X$ с центром в точке $x^{(0)}$. Для любой точки $x \in X$ имеем

$$\rho(x, x^{(0)}) \leqslant \operatorname{diam} X = r.$$

Это означает, что любая точка множества X содержится в шаре Q^n, т. е. существует шар, в котором лежит все множество X. $\triangleleft$

Пример 1. Диаметр n-мерного шара $U(x^{(0)}; r)$ радиуса r равен $2r$.

Действительно, если $x, y \in U(x^{(0)}; r)$ и, следовательно, $\rho(x, x^{(0)}) < \varepsilon$, $\rho(y, x^{(0)}) < \varepsilon$, то

$$\rho(x,y) \leqslant \rho(x, x^{(0)}) + \rho(x^{(0)}, y) \leqslant 2r. \tag{33.36}$$

С другой стороны, если $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, ..., x_n^{(0)})$, $x^{(k)} = \left(x_1^{(0)} - r + \frac{1}{k}, x_2^{(0)}, ..., x_n^{(0)}\right)$, $y^{(k)} = \left(x_1^{(0)} + r - \frac{1}{k}, x_2^{(0)}, ..., x_n^{(0)}\right)$, то

$$\rho(x^{(k)}, x^{(0)}) = \rho(y^{(k)}, x^{(0)}) = r - \frac{1}{k} < r, \quad k = 1, 2, ...,$$

и потому $x^{(k)}, y^{(k)} \in U(x^{(0)}; r)$. Поскольку $\rho(x^{(k)}, y^{(k)}) = 2r - \frac{2}{k}$, то

$$\lim_{k\to\infty} \rho(x^{(k)}, y^{(k)}) = 2r. \tag{33.37}$$

Из (33.36) и (33.37) следует, что

$$\operatorname{diam} U(x^{(0)}; r) = 2r.$$

Пример 2. Диаметр n-мерного куба с ребром длины h равен $h\sqrt{n}$.

Если $P^n = \{x\colon\ a_i < x_i < a_i + h;\ i = 1, 2, ..., n\}$, $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in P^n$, $y = (y_1, y_2, ..., y_n) \in P^n$, то $|x_i - y_i| < h$, $i = 1, 2, ..., n$. Поэтому $\rho(x, y) < h\sqrt{n}$. Если $x^{(k)} = \left(a_1 + \frac{1}{k},\ a_2 + \frac{1}{k}, ..., a_n + \frac{1}{k}\right)$, $y^{(k)} = \left(a_1 + h - \frac{1}{k},\ a_2 + h - \frac{1}{k}, ..., a_n + h - \frac{1}{k}\right)$, то $x^{(k)}, y^{(k)} \in P^n$, а

$$\lim_{k\to\infty} (\rho(x^{(k)}, y^{(k)}) = \lim_{k\to\infty} \left(h - \frac{2}{k}\right)\sqrt{n} = h\sqrt{n}.$$

Поэтому

$$\operatorname{diam} P^n = h\sqrt{n}.$$

Пример 3. Примером неограниченного множества является все пространство R^n.

Замечание 2. Отметим (это нам пригодится в дальнейшем), что если диаметр мно жества X конечен, то оно содержится в замкнутом кубе P^n с ребром длины $h = 2\operatorname{diam} X$, центром которого является произвольно выбранная точка x множества X (рис. 130).

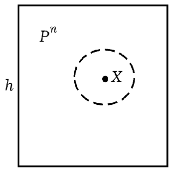


Рис. 130

Действительно, если $y \in X$, то $\rho(x,y) \leqslant \leqslant \operatorname{diam} X = \frac{h}{2}$. Поэтому точка y, находясь от центра x куба P^n на расстоянии, не превышающем половины h ребра этого куба, содержится в нем, т. е. $X \subset P^n$.

Определение 8. Последовательность точек пространства R^n называется *ограниченной*, если множество ее значений ограниченно.

Всякая сходящаяся последовательность ограниченна, так как последовательности ее координат согласно теореме 1 сходятся и, следовательно, ограниченны. 19

Теорема 2. *Из любой ограниченной последовательности точек n-мерного пространства можно выделить сходящуюся подпоследовательность.*

$\triangleright$ Пусть $x^{(m)} = (x_1^{(m)}, x_2^{(m)}, ..., x_n^{(m)})$, $m = 1, 2, ...,$ — ограниченная последовательность точек в R^n. Следовательно, согласно определению 6 существует n-мерный куб $P(a;\delta)$, содержащий все члены этой последовательности: $x^{(m)} \in P(a;\delta)$, $m = 1, 2, ...,$ $a = (a_1, ..., a_n) \in R^n$. Это означает (см. определения (33.26) и (33.27)), что для всех $i = = 1, 2, ..., n$ выполняются неравенства $|x_i^{(m)} - a_i| < \delta$, т. е.

$$a_i - \delta < x_i^{(m)} < a_i + \delta, \quad m = 1, 2, ...,$$

и, таким образом, все n числовых последовательностей $\{x_i^{(m)}\}$, $i = = 1, 2, ..., n$, ограниченны.

Согласно теореме Больцано–Вейерштрасса из числовой последовательности $\{x_1^{(m)}\}$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{x_1^{(m_{k_1})}\}$, $k_1 = 1, 2, ...$ Подпоследовательность $\{x_2^{(m_{k_1})}\}$ ограниченной последовательности $\{x_2^{(m)}\}$ также ограниченна и поэтому содержит сходящуюся подпоследовательность. Обозначим ее $\{x_2^{(m_{k_1,k_2})}\}$ и заметим, что подпоследовательность $\{x_1^{(m_{k_1,k_2})}\}$ сходящейся последовательности $\{x_1^{(m_{k_1})}\}$ также является сходящейся. Продолжая этот процесс, через n шагов получим n сходящихся числовых последовательностей $x_1^{(m_{k_1,k_2,...,k_n})}, ..., x_n^{(m_{k_1,k_2,...,k_n})}$. А тогда согласно теореме 1 подпоследовательность $x^{(m_{k_1,k_2,...,k_n})} = (x_1^{(m_{k_1,k_2,...,k_n})}, ..., x_n^{(m_{k_1,k_2,...,k_n})})$,

$k_n = 1, 2, \ldots$, последовательности $x^{(m)}$, $m = 1, 2, \ldots$, также является сходящейся. $\lhd$

Аналогично случаю числовых последовательностей для последовательностей точек n-мерного пространства можно ввести понятие бесконечного предела. Для этой цели удобно дополнить пространство R^n бесконечно удаленной точкой, которая обозначается ∞. Она характеризуется заданием ее ε-окрестностей.

Определение 9. *ε-окрестностью $U(\infty, \varepsilon)$ бесконечно удаленной точки* ∞, $\varepsilon > 0$, называется множество, состоящее из всех таких точек x пространства R^n, что $\rho(x, O) > 1/\varepsilon$, и из бесконечно удаленной точки ∞, т. е.

$$U(\infty; \varepsilon) = \left\{x\colon\ \rho(x, O) > \frac{1}{\varepsilon}\right\} \cup \{\infty\},$$

где $O = (0, 0, \ldots, 0)$ — начало координат пространства R^n.

Определение 10. Последовательность $\{x^{(m)}\}$ называется последовательностью, *стремящейся к бесконечности* (или к *бесконечно удаленной точке*), если

$$\lim \rho(x^{(m)}, O) = \infty. \tag{33.38}$$

Легко видеть, что условие (33.38) можно записать как $\lim\limits_{m\to\infty} |x^{(m)}| = +\infty$, ибо $|x^{(m)}| = \rho(x^{(m)}, O)$. В этом случае пишут

$$\lim_{m\to\infty} x^{(m)} = \infty. \tag{33.39}$$

Отметим, что в случае $n > 1$ бесконечный предел определен только для бесконечностей без знака.

В силу определения ε-окрестности бесконечно удаленной точки *последовательность $x^{(m)}$ стремится к бесконечности тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер m_ε, что для всех $m > m_\varepsilon$ выполняется включение* $x^{(m)} \in U(\infty; \varepsilon)$. Справедливость этого утверждения сразу следует из равносильности сформулированного условия и условия (33.38).

Как и на прямой, в n-мерном пространстве *всякая неограниченная последовательность содержит подпоследовательность, стремящуюся к бесконечности.*

$\rhd$ В самом деле, если $x^{(m)}$ — неограниченная последовательность точек пространства R^n, то существует такой ее член $x^{(m_1)}$, что $\rho(x^{(m_1)}, O) > 1$. Далее, существует член $x^{(m_2)}$ такой, что $m_2 > m_1$ и $\rho(x^{(m_2)}, O) > 2$. Вообще, существует член $x^{(m_k)}$ такой, что

$$m_k > m_{k-1}, \quad \rho(x^{(m_k)}, O) > k, \quad k = 2, 3, \ldots$$

Очевидно, что $\lim\limits_{k\to\infty} x^{(m_k)} = \infty$. $\lhd$

Точки пространства R^n для их отличия от бесконечно удаленной точки будем называть также и *конечными точками.*

33.3. Различные типы множеств. В этом параграфе под множествами будем понимать множества, лежащие в n-мерном пространстве.

Определение 11. Точка множества называется его *внутренней точкой*, если у нее существует ε-окрестность, содержащаяся в этом множестве.

Совокупность всех внутренних точек данного множества называется его *внутренностью*.

Внутренность множества X обозначается X_{int} *).

Определение 12. Множество, у которого все точки являются внутренними, называется *открытым*.

Таким образом, открытые множества — это те множества, которые совпадают со своей внутренностью.

Пустое множество по определению считается открытым (впрочем, оно является таковым по законам логики).

Лемма 3. *Сферическая окрестность является открытым множеством.*

▷ Если $U(x;\varepsilon)$ — сферическая окрестность точки $x \in R^n$ и $y \in U(x;\varepsilon)$ (рис. 131), то, положив $\delta = \varepsilon - \rho(x,y)$, покажем, что

$$U(y;\delta) \subset U(x;\varepsilon). \tag{33.40}$$

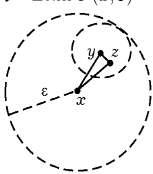


Рис. 131

Действительно, если $z \in U(y;\delta)$, т. е.

$$\rho(z,y) < \delta = \varepsilon - \rho(x,y),$$

то

$$\rho(z,x) \leqslant \rho(z,y) + \rho(y,x) \underset{(33.39)}{<} \varepsilon$$

и, следовательно, $z \in U(x;\varepsilon)$, т. е. включение (33.40) доказано. ◁

Аналогично показывается, что и прямоугольная окрестность точки является открытым множеством.

Для любого множества X его внутренность X_{int} является, как в этом нетрудно убедиться, открытым множеством.

Упражнение 2. Доказать, что ε-окрестность бесконечно удаленной точки, из которой удалена сама эта точка, является открытым множеством.

Оказывается удобным следующее определение.

Определение 13. Всякое открытое множество пространства R^n, содержащее данную точку, называется ее *окрестностью*.

Окрестностью бесконечно удаленной точки ∞ называется всякое множество, которое является объединением открытого в R^n множества с ∞ и которое содержит ε-окрестность ∞.

*) int — начало латинского слова interior (внутренний).

Иначе говоря, множество $G \cup \{\infty\}$, где G — открытое множество, является окрестностью ∞, если существует такое $\varepsilon > 0$, что $U(\infty; \varepsilon) \subset G \cup \{\infty\}$.

Окрестность точки обозначается

$$U = U(x)$$

(иногда и другими буквами, например, $V = V(x)$, $W = W(x)$).

Замечание 1. Пусть $\{x^{(m)}\}$ — последовательность точек в R^n. Поскольку какова бы ни была точка $x \in R^n$, в любой ее окрестности содержится сферическая окрестность, то согласно определению 5

$$\lim_{m\to\infty} x^{(m)} = x$$

в том и только том случае, когда для любой окрестности $U(x)$ (не обязательно сферической или прямоугольной) существует такой номер m_0, что для всех $m > m_0$ выполняется включение

$$x^{(m)} \in U(x).$$

Полезным в случае n-мерного пространства оказывается и понятие проколотой окрестности.

Определение 14. *Проколотой окрестностью* $\overset{\circ}{U}(x)$ *точки* x (конечно или бесконечно удаленной) называется всякое множество, получающееся удалением точки x из некоторой ее окрестности $U(x)$:

$$\overset{\circ}{U}(x) \overset{\text{def}}{=} U(x) \setminus \{x\}.$$

Лемма 4. *Объединение любой совокупности и пересечение конечной совокупности открытых множеств являются открытыми множествами.*

$\triangleright$ Действительно, если $\mathfrak{A}$ — некоторое множество индексов, G_α — открытые множества, $\alpha \in \mathfrak{A}$, и $G = \bigcup\limits_{\alpha\in\mathfrak{A}} G_\alpha$, то для любой точки $x \in G$ существует такое $\alpha \in \mathfrak{A}$, что $x \in G_\alpha$. Это множество G_α, например, и является окрестностью точки x, содержащейся в множестве G, так как $G_\alpha \subset G$. Это и означает открытость множества G. $\triangleleft$

Если $G = \bigcap\limits_{k=1}^{m} G_k$, где G_k — открытые множества и $x \in G$, то существуют $\varepsilon_k > 0$ такие, что $U(x; \varepsilon_k) \subset G_k$, $k = 1, 2, ..., m$, а тогда для $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_m\}$ имеем $U(x; \varepsilon) \subset G_k$ для всех $k = 1, 2, ...$ $..., m$. Поэтому $U(x; \varepsilon) \subset G$, т. е. множество G открытое. $\triangleleft$

Определение 15. Объединение всех ε-окрестностей точек множества X называется *ε-окрестностью* этого множества и обозначается $U(X; \varepsilon)$, т. е

$$U(X; \varepsilon) = \bigcup_{x\in X} U(x; \varepsilon).$$

Согласно леммам 3 и 4 ε-окрестность любого множества является открытым множеством.

Как и для точки, окрестностью множества называется всякое содержащее его открытое множество.

Аналогично одномерному случаю для всякого множества $X \subset R^n$ вводятся понятия его точек прикосновения, предельных и изолированных точек (см. п. 6.1 и п. 6.9).

Определение 16. Точка пространства (конечная или бесконечно удаленная) называется *точкой прикосновения множества*, если любая ее окрестность содержит точки этого множества.

Точки самого множества являются, очевидно, его точками прикосновения, так как любая окрестность точки множества содержит саму эту точку. Точки прикосновения могут и не принадлежать самому множеству. Например, точки $x = 0$ и $x = 1$ являются точками прикосновения интервала $X = (0, 1)$ и не принадлежат ему.

Если точка $x^{(0)}$ является конечной точкой прикосновения множества $X \subset R^n$, то любая ее окрестность $\Big($в частности, сферическая окрестность $U\left(x^{(0)}; \dfrac{1}{m}\right)\Big)$ содержит точку этого множества, обозначим ее $x^{(m)}$:

$$x^{(m)} \in U\left(x^{(0)}; \frac{1}{m}\right) \cap X, \quad m = 1, 2, \ldots$$

Тогда $\rho(x^{(m)}, x^{(0)}) < \dfrac{1}{m}$ и, следовательно,

$$\lim_{m \to \infty} x^{(m)} = x^{(0)},$$

т. е. всякая конечная точка прикосновения множества является пределом последовательности его точек.

Ясно, что справедливо и обратное утверждение: если точка пространства является пределом последовательности точек множества, то она — его точка прикосновения, так как любая ее окрестность содержит все точки указанной последовательности, начиная с некоторого номера, т. е. содержит точки множества.

Аналогично, бесконечно удаленная точка ∞ является точкой прикосновения множества $X \subset R^n$ тогда и только тогда, когда существует такая последовательность точек $x^{(m)} \in X$, $m = 1, 2, \ldots$, что $\lim\limits_{m \to \infty} x^{(m)} = \infty$.

Действительно, если ∞ — точка прикосновения множества X, то в любой ее окрестности $U\left(\infty; \dfrac{1}{m}\right)$ содержится точка этого множества, обозначим ее $x^{(m)}$, т. е. $x^{(m)} \in U\left(\infty; \dfrac{1}{m}\right) \cap X$. Тогда $\rho(x^{(m)}, 0) > m$, где $m = 1, 2, \ldots$ Отсюда следует, что $\lim\limits_{m \to \infty} \rho(x^{(m)}, 0) = \infty$, а это означает, что $\lim\limits_{m \to \infty} x^{(m)} = \infty$.

Наоборот, если существует такая последовательность $x^{(m)} \in X$, $m = 1, 2, \ldots$, что $\lim\limits_{m\to\infty} x^{(m)} = \infty$, то в любой окрестности бесконечно удаленной точки содержатся все члены этой последовательности, начиная с некоторого номера, т. е. содержатся точки множества X.

Отметим еще, что условие существования в множестве $X \subset R^n$ последовательности точек, стремящейся к бесконечности ∞, равносильно, как в этом легко убедиться, неограниченности этого множества. Поэтому бесконечно удаленная точка является точкой прикосновения множества в том и только том случае, когда оно неограниченно.

Определение 17. Точка x (конечная или бесконечно удаленная) называется *предельной точкой* некоторого множества, если в любой ее окрестности содержится точка этого множества, отличная от нее самой.

С помощью понятия проколотой окрестности это определение можно перефразировать следующим образом: точка x называется предельной точкой множества X, если любая ее проколотая окрестность содержит по крайней мере одну точку этого множества.

Очевидно, что *предельная точка некоторого множества является и его точкой прикосновения.*

Если точка x является предельной точкой множества X, то, выбрав в каждой окрестности $U(x; 1/m)$ точку из множества X, отличную от x, и обозначив ее $x^{(m)}$, получим такую последовательность $x^{(m)} \in X$, $m = 1, 2, \ldots$, что $\lim\limits_{m\to\infty} x^{(m)} = x$ и $x^{(m)} \neq x$, $m = 1, 2, \ldots$, т. е. если x — предельная точка множества, то существует последовательность точек этого множества, сходящаяся к x, у которой ни одна из ее точек не совпадает с точкой x.

Определение 18. Если у точки множества существует окрестность, не содержащая никаких других его точек, кроме нее самой, то эта точка называется *изолированной точкой* этого множества.

Как и в одномерном случае (п. 6.9.), каждая точка прикосновения множества является либо его изолированной точкой, либо предельной.

Определение 19. Совокупность всех конечных точек прикосновения множества называется его *замыканием.* Замыкание множества X обозначается $\overline{X}$.

Определение 20. Множество называется *замкнутым*, если оно содержит все свои конечные точки прикосновения.

Поскольку каждая точка множества является и точкой его прикосновения, т. е. $X \subset \overline{X}$, то замкнутость множества X означает, что

$$X = \overline{X}. \tag{33.41}$$

Пустое множество считается по определению замкнутым.

Упражнение 3. Доказать, что $\operatorname{diam} \overline{X} = \operatorname{diam} X$.

Примерами замкнутых множеств являются множества вида

$$Q^n = \{x = (x_1, x_2, ..., x_n)\colon a_i \leqslant x_i \leqslant a_i + h, \quad i = 1, 2, ..., n\}, \quad (33.42)$$

где $h > 0$, $a_i \in R$, $i = 1, 2, ..., n$, называемые *замкнутыми n-мерными кубами* с ребрами длины h, параллельными координатным осям. Эти кубы являются замыканиями кубов

$$P^n = \{x = (x_1, x_2, ..., x_n)\colon a_i < x_i < a_i + h, \quad i = 1, 2, ..., n\},$$

называемых также открытыми кубами (они являются открытыми множествами):

$$Q^n = \overline{P^n}.$$

Лемма 5. *Замыкание всякого множества является замкнутым множеством.*

$\triangleright$ Если X — некоторое множество, x — точка прикосновения его замыкания $\overline{X}$ и $U = U(x)$ — ее произвольная окрестность, то согласно определению точки прикосновения в этой окрестности имеется точка $y \in \overline{X}$. Поскольку U — открытое множество, то оно является и окрестностью точки y, а так как включение $y \in \overline{X}$ означает, что точка y является точкой прикосновения множества X, то в множестве U имеется точка множества X. Таким образом, в любой окрестности U точки x имеются точки множества X, а это означает, что $x \in \overline{X}$, т. е. $\overline{X}$ содержит все свои точки прикосновения. $\triangleleft$

Для всякого множества $X \in R^n$ множество $R^n \backslash X$ называется его *дополнением в пространстве* R^n. Оказывается, что открытые множества (будем их обозначать буквой G) и замкнутые множества (их будем обозначать F) являются дополнениями друг друга в пространстве R^n.

Лемма 6. *Дополнение открытого множества является замкнутым, а дополнение замкнутого множества — открытым множеством.*

$\triangleright$ Пусть F — замкнутое множество и $G = R^n \backslash F$. Если $x \in G$, то $x \notin F$, и, следовательно, точка x не является точкой прикосновения множества F. Поэтому существует окрестность $U(x)$ точки x, не содержащая точек множества F, т. е. содержащаяся в G. Таким образом, любая точка множества G является внутренней, а это означает, что G — открытое множество.

Пусть G — открытое множество, $F = R^n \backslash G$ и $x \in G$. Поскольку G — открытое множество, то оно является окрестностью точки x, причем, являясь дополнением множества F, оно не содержит его точек. Следовательно, никакая точка $x \in G$ не является точкой прикосновения множества F. Иначе говоря, все точки прикосновения множества F содержатся в нем самом, а это означает, что F — замкнутое множество. $\triangleleft$

Заметим, что все пространство и пустое множество являются одновременно открытыми и замкнутыми.

Определение 21. Точка пространства называется *граничной точкой* некоторого множества, если в любой ее окрестности существуют точки, как принадлежащие этому множеству, так и не принадлежащие ему.

Совокупность всех граничных точек множества X называется его *границей* и обозначается ∂X.

Очевидно, что граничная точка множества является и его точкой прикосновения.

Каждая точка множества является либо его внутренней точкой, либо граничной, при этом множество может не содержать все или некоторые граничные точки:

$$X \subset X_{\text{int}} \cup \partial X, \quad X_{\text{int}} \cap \partial X = \varnothing. \tag{33.43}$$

Каждая точка замыкания $\overline{X}$ множества X также является либо внутренней, либо граничной точкой самого множества X, но его замыкание $\overline{X}$ содержит в себе уже все граничные точки множества:

$$\partial X \subset \overline{X}.$$

Поэтому

$$\overline{X} = X_{\text{int}} \cup \partial X. \tag{33.44}$$

Справедливо, конечно и равенство $\overline{X} = X \cup \partial X$, но в нем слагаемые правой части равенства, вообще говоря, пересекаются. Они не пересекаются тогда и только тогда, когда множество X является открытым. В самом деле, если множество открыто, то каждая его точка является внутренней и, тем самым, не принадлежит его границе.

Отметим еще, что граница всякого множества является замкнутым множеством. Действительно, в окрестности точки прикосновения границы имеется точка границы, а поэтому в этой окрестности есть как точки, принадлежащие множеству, так и не принадлежащие ему.

Пример 1. Замыкание ε-окрестности $U(x;\varepsilon)$ точки x (33.25) называется *замкнутым шаром* с центром в точке x и радиуса ε; оно, согласно лемме 4, является замкнутым множеством:

$$\overline{U(x;\varepsilon)} = \{y\colon \rho(y,x) \leqslant \varepsilon\}. \tag{33.45}$$

Пример 2. В пространстве R^n замкнутое множество вида

$$S^{n-1} = \{x\colon \rho(x,a) = r\} \tag{33.46}$$

называется $(n-1)$-*мерной сферой* радиуса r с центром в точке a.

Оно является границей как открытого, так и замкнутого шара радиуса r с центром в точке a.

Всякое отображение $x(t)$ отрезка $[a,b]$ числовой прямой (или какого-либо другого множества) в пространство R^n можно описать при помощи n числовых функций $x_i(t)$, $i = 1, 2, ..., n$, называемых *координатными* и являющихся координатами точки $x(t)$, т. е.

$$x(t) = (x_1(t), ..., x_n(t)), \quad a \leqslant t \leqslant b.$$

Отображение называется *непрерывным* на отрезке, если на нем непрерывны все координатные функции этого отображения.

Определение 22. Непрерывное отображение отрезка в n-мерное пространство называется *кривой* в этом пространстве, а образ отрезка — *носителем кривой.*

Как и в трехмерном случае, будем обозначать кривую буквой Γ и писать

$$\Gamma = \{x(t);\ a \leqslant t \leqslant b\} \tag{33.47}$$

или

$$\Gamma = \{x_i(t);\ i = 1, 2, ..., n;\ a \leqslant t \leqslant b\}.$$

Для кривой (33.47) всякая пара (x, t), $x \in R^n$, $t \in [a, b]$, у которой $x = x(t)$, называется *точкой кривой* и там, где это не может привести к недоразумениям, обозначается $x(t)$. Точка кривой $x(a)$ называется ее *началом*, а точка $x(b)$ — *концом.*

Определение 23. Множество точек $x = (x_1, ..., x_n)$ пространства R^n, координаты которых представимы в виде

$$x_i = x_i^{(0)} + a_i t, \quad i = 1, 2, ..., n, ..., \quad -\infty < t < +\infty, \quad \sum_{i=1}^{n} a_i^2 > 0, \tag{33.48}$$

называется *прямой в пространстве* R^n, проходящей через точку $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, ..., x_n^{(0)})$ в направлении вектора $a = (a_1, a_2, ..., a_n)$.

Если $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $a = (a_1, a_2, ..., a_n)$ и $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, ...$ $..., x_n^{(0)})$ рассматривать как векторы, то уравнения (33.48) можно записать в векторном виде

$$x = x^{(0)} + at, \quad -\infty < t < +\infty. \tag{33.49}$$

Сужение этого отображения на множество $t > 0$ или на $t \geqslant 0$ (соответственно на $t < 0$ или $t \leqslant 0$) называется *открытым* или *замкнутым лучом* с началом в точке $x^{(0)}$ в направлении вектора a (соответственно $-a$).

Вектор a называется *направляющим вектором прямой* $x = x^{(0)} + at$. Две несовпадающие прямые, уравнения которых можно записать с одним и тем же направляющим вектором, называются *параллельными.*

Сужение отображения (33.48) на какой-либо отрезок $[a, b]$, т. е. кривую $\{x_i = a_i + b_i t,\ i = 1, 2, ..., n;\ a \leqslant t \leqslant b\}$, так же, как и носитель этой кривой, называется *отрезком прямой в пространстве* R^n.

Отрезок прямой, началом которого является $x(a)$, а концом — $x(b)$, обозначается $[x(a), x(b)]$.

Пример 3. Рассмотрим замкнутый n-мерный куб

$$Q^n = \{x\colon |x_i - x_i^{(0)}| \leqslant a,\ i = 1, 2, ..., n\}.$$

Для всякого фиксированного i_0 (i_0 может принимать значения $1, 2, ...$ $..., n$) множество вида

$$\{x\colon |x_{i_0} - x_{i_0}^{(0)}| \leqslant a,\ x_i = x_i^{(0)} \pm a,\ i \in \{1, 2, ..., n\} \backslash \{i_0\}\},$$

где при каждом $i \neq i_0$ в равенстве $x_i = x_i^{(0)} \pm a$ выбран один из знаков, плюс или минус, является отрезком в пространстве R^n (эти отрезки называются *ребрами куба* Q^n). В самом деле, координаты точек рассматриваемого множества могут быть заданы формулами

$$x_{i_0} = x_{i_0}^{(0)} + at, \quad -1 \leqslant t \leqslant 1, \quad x_i = x_i^{(0)} \pm a, \quad i \in \{1, 2, ..., n\} \backslash \{i_0\}.$$

Будем говорить, что две точки $x^{(1)}$ и $x^{(2)}$ множества $X \subset R^n$ можно соединить в этом множестве кривой, если существует такая кривая (33.47), что $x(a) = x^{(1)}$, $x(b) = x^{(2)}$ и ее носитель лежит в множестве X.

Определение 24. Множество $X \in R^n$, любые две точки которого можно соединить в нем кривой, называется *линейно связным множеством.*

Линейно связное открытое множество называется *областью.*

Замыкание области называется *замкнутой областью.*

Определение 25. Множество, любые две точки которого можно соединить отрезком, лежащим в этом множестве, называется *выпуклым.*

Очевидно, что всякое выпуклое множество является и линейно связным.

Пример 4. Открытый шар в R^n является выпуклой областью.

Пример 5. Объединение двух непересекающихся открытых шаров в R^n является открытым множеством, но не является областью.

Пример 6. Объединение двух пересекающихся, но не совпадающих прямых является примером линейно связного, но не выпуклого множества.

33.4. Компакты. Рассмотрим важный для дальнейшего класс множеств, называемых компактами.

Определение 26. Множество, у которого из каждой последовательности его точек можно выделить сходящуюся к точке этого множества подпоследовательность, называется *компактом.*

Теорема 3. *Для того чтобы множество было компактом, необходимо и достаточно, чтобы оно было ограниченным и замкнутым.*

$\triangleright$ Необходимость. Если множество $X \subset R^n$ является неограниченным, то для любого $m \in N$ найдется такая точка $x^{(m)} \in X$, что

$\rho(O, x^{(m)}) > m$, $O = (0, 0, ..., 0)$. Очевидно, что $\lim\limits_{m\to\infty} x^{(m)} = \infty$, а поэтому и для любой подпоследовательности $\{x^{(m_k)}\}$ последовательности $\{x^{(m)}\}$ также имеем $\lim\limits_{m\to\infty} x^{(m_k)} = \infty$. Тем самым из полученной последовательности $x^{(m)} \in X$, $m = 1, 2, ...$, нельзя выделить подпоследовательность, сходящуюся к точке множества X. Это означает, что множество X не является компактом.

Если множество X не является замкнутым множеством, то существует не принадлежащая ему его точка прикосновения: $x \in \overline{X} \setminus X$. В силу определения точки прикосновения для любого $m \in N$ существует точка $x^{(m)} \in X \cap U\left(x^{(m)}; \dfrac{1}{m}\right)$. Тогда $\lim\limits_{m\to\infty} x^{(m)} = x$, и для любой подпоследовательности $\{x^{(m_k)}\}$ последовательности $\{x^{(m)}\}$ также имеем $\lim\limits_{k\to\infty} x^{(m_k)} = x \notin X$. Тем самым из последовательности $x^{(m)} \in X$, $m = 1, 2, ...$, нельзя выделить подпоследовательность, сходящуюся к точке множества X. Это означает, что множество X не является компактом.

Из доказанного следует, что если множество X является компактом, то оно ограниченное и замкнутое.

Достаточность. Пусть множество X является ограниченным и замкнутым, а $\{x^{(m)}\}$ — произвольная последовательность его точек. Из ограниченности множества X следует ограниченность последовательности $\{x^{(m)}\}$. Согласно теореме 2 п. 33.2 из последовательности $\{x^{(m)}\}$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{x^{(m_k)}\}$. Если $\lim\limits_{k\to\infty} x^{(m_k)} = x$, то в любой окрестности точки x имеются точки последовательности $x^{(m_k)} \in X$, $m = 1, 2, ...$ Это означает, что точка x является точкой прикосновения множества X, а поэтому в силу замкнутости множества X она в нем содержится. Таким образом, из произвольной последовательности точек множества X можно выделить сходящуюся к его точке подпоследовательность, т. е. множество X является компактом. $\triangleleft$

Система множеств $X_\alpha \subset R^n$, $\alpha \in \mathfrak{A}$ ($\mathfrak{A}$ — некоторое множество индексов) называется *покрытием множества* $X \subset R^n$, если

$$X \subset \bigcup_{\alpha\in\mathfrak{A}} X_\alpha. \tag{33.49}$$

Если все множества X_α, $\alpha \in \mathfrak{A}$, являются открытыми, то покрытие $\{X_\alpha\}$ множества X называется *открытым покрытием.*

Теорема 4. *Для любого открытого покрытия компакта существует такое положительное число (называемое числом Лебега*) данного покрытия), что любое подмножество компакта с диаметром,*

*) А. Лебег (1875–1941) — французский математик.

меньшим этого числа, содержится по крайней мере в одном элементе покрытия.

▷ Допустим противное. Пусть существует такое открытое покрытие $\Omega = \{G_\alpha\}$, $\alpha \in \mathfrak{A}$, некоторого компакта X, что для любого $\delta > 0$ найдется множество $E \subset X$, $\operatorname{diam} E < \delta$, которое не содержится ни в одном элементе покрытия Ω. Возьмем $\delta = 1/m$, $m \in \mathbb{N}$, и пусть E_m — подмножество компакта X,

$$\operatorname{diam} E_m < \frac{1}{m}, \tag{33.50}$$

не содержащееся ни в одном элементе покрытия Ω.

Выберем произвольно точку

$$x^{(m)} \in E_m, \quad m = 1, 2, \ldots \tag{33.51}$$

Поскольку множество X является компактом, то из последовательности $\{x^{(m)}\}$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{x^{(m_k)}\}$, причем

$$\lim_{k\to\infty} x^{(m_k)} = x^{(0)} \in X. \tag{33.52}$$

Система Ω является покрытием компакта X. Поэтому существует по крайней мере один элемент G_α этого покрытия, содержащий точку $x^{(0)}$. В силу открытости множества G_α найдется сферическая окрестность $U(x^{(0)}; \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, точки $x^{(0)}$ содержащаяся в G_α:

$$U(x^{(0)}; \varepsilon) \subset G_\alpha. \tag{33.53}$$

Выберем номер k_0 так, чтобы

$$\frac{1}{m_{k_0}} < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{33.54}$$

В силу условия (33.52) существует такое

$$k > k_0, \tag{33.55}$$

что

$$\rho(x^{(m_k)}, x^{(0)}) < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{33.56}$$

Тогда для любой точки $x \in E_{m_k}$ будем иметь

$$\rho(x, x^{(0)}) \leqslant \rho(x, x^{(m_k)}) + \rho(x^{(m_k)}, x^{(0)}) \underset{\substack{(33.50),(33.51)\\(33.56)}}{<}$$

$$\underset{\substack{(33.50),(33.51)\\(33.56)}}{<} \frac{1}{m_k} + \frac{\varepsilon}{2} \underset{\substack{(33.54)\\(33.55)}}{<} \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \tag{33.57}$$

Таким образом,

$$E_{m_k} \underset{(33.57)}{\subset} U(x^{(0)}; \varepsilon) \underset{(33.53)}{\subset} G_\alpha,$$

т. е. нашлось множество $G_\alpha \in \Omega$, содержащее множество E_{m_k} — противоречие. ◁

Теорема 5 (теорема Гейне–Бореля*)). *Из всякого покрытия компакта открытыми множествами можно выделить конечное покрытие.*

$\triangleright$ Пусть $\Omega = G_\alpha,\ \ \alpha \in \mathfrak{A}$ ($\mathfrak{A}$ — некоторое множество индексов), — покрытие компакта X открытыми множествами G_α и δ — число Лебега этого покрытия (см. теорему). Множество X, будучи компактом, ограничено, а поэтому содержится в некотором кубе Q^n:

$$X \subset Q^n. \tag{33.58}$$

Пусть

$$Q^n = \{x = (x_1, ..., x_n)\colon\ |x_i - x_i^{(0)}| \leqslant \frac{a}{2}, \quad i = 1, 2, ..., n\}.$$

Длина ребера этого куба равна a. Разобьем куб Q^n на 2^n равных кубов "гиперплоскостями" $x_i = x_i^{(0)}$, $i = 1, 2, ..., n$. Длины ребер получившихся кубов будут равны $a/2$.

Каждый из этих кубов снова разобьем аналогичным образом на 2^n равных кубов с ребрами длины $a/2^2$ и т. д. Через k шагов получим разбиение куба Q^n на 2^{kn} кубов Q_i^n, $i = 1, 2, ..., 2^{kn}$, с ребрами длины $\dfrac{a}{2^k}$.

Выберем число k так, чтобы

$$\operatorname{diam} Q_i^n = \frac{a\sqrt{n}}{2^k} < \delta. \tag{33.59}$$

Поскольку

$$Q^n = \bigcup_{i=1}^{2^{kn}} Q_i^n,$$

то включение (33.58) можно записать в виде

$$X \subset \bigcup_{i=1}^{2^{kn}} Q_i^n. \tag{33.60}$$

Положим

$$X_i = X \cap Q_i^n, \quad i = 1, 2, ..., 2^{kn}. \tag{33.61}$$

Тогда в силу (33.60), (33.61) получим

$$X = \bigcup_{i=1}^{2^{kn}} X_i, \tag{33.62}$$

а в силу неравенства (33.59) будем иметь

$$\operatorname{diam} X_i \underset{(33.61)}{\leqslant} \operatorname{diam} Q_i^n < \delta.$$

Из последнего неравенства, согласно свойству числа Лебега δ покрытия Ω, для каждого номера i существует такой индекс α_i, что

$$X_i \subset G_{\alpha_i}, \quad i = 1, 2, ..., 2^{kn}.$$

*) Э. Борель (1871–1956) — французский математик.

Поэтому

$$X = \bigcup_{i=1}^{2^{kn}} X_i \subset \bigcup_{i=1}^{2^{kn}} G_{\alpha_i}.$$

Таким образом, система множеств $\{G_{\alpha_i}\}_{i=1}^{i=2^{kn}}$ является конечным покрытием компакта X, выделенным из покрытия Ω. $\lhd$

Замечание 1. Отметим, что справедливо и утверждение, обратное теореме 4: если из всякого покрытия множества открытыми множествами можно выделить конечное покрытие, то множество является компактом (доказательство этого утверждения можно найти, например, в учебнике: Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. В 3-х т. Т. 1. — М.: Высшая школа, 1988).

Для любых двух множеств $X \subset R^n$ и $Y \subset R^n$ определяется *расстояние* $\rho(X, Y)$ между ними по формуле

$$\rho(X, Y) \overset{\text{def}}{=} \inf_{x \in X, y \in Y} \rho(x, y). \tag{33.63}$$

Если в формуле (33.63), например, множество Y состоит из одной точки: $Y = \{y\}$, то эта формула дает определение расстояния $\rho(X, y)$ точки y до множества X.

Очевидно, что в случае, когда множества X и Y пересекаются, расстояние между ними равно нулю.

В терминах окрестностей множеств (см. определение 14) условие того, что два множества X и Y находятся на положительном расстоянии: $\rho(X, Y) = d > 0$, равносильно тому, что у них имеются непересекающиеся ε-окрестности. Это имеет место при $2\varepsilon < d$.

Теорема 6. *Если X и Y — замкнутые непересекающиеся множества и одно из них — компакт, то расстояние между ними больше нуля и существуют такие точки $x \in X$, $y \in Y$, что*

$$\rho(X, Y) = \rho(x, y) > 0. \tag{33.64}$$

$\rhd$ Из определения (33.63) следует, что существуют такие точки $x^{(m)} \in X$, $y^{(m)} \in Y$, $m = 1, 2, \ldots$, что

$$\lim_{m \to \infty} \rho(x^{(m)}, y^{(m)}) = \rho(X, Y).$$

Если, например, множество X — компакт, то из последовательности $\{x^{(m)}\}$ можно выделить сходящуюся к некоторой его точке $x^{(0)}$ подпоследовательность $\{x^{(m_k)}\}$:

$$\lim_{k \to \infty} x^{(m_k)} = x^{(0)} \in X.$$

Последовательность $\{y^{(m_k)}\}$ ограниченна, так как

$$\rho(y^{(m_k)}, x^{(0)}) \leqslant \rho(y^{(m_k)}, x^{(m_k)}) + \rho(x^{(m_k)}, x^{(0)}),$$

а числовые последовательности $\rho(y^{(m_k)}, x^{(m_k)})$ и $\rho(x^{(m_k)}, x^{(0)})$ имеют конечные пределы:

$$\lim_{k\to\infty}\rho(x^{(m_k)}, y^{(m_k)}) = \rho(X, Y), \quad \lim_{k\to\infty}\rho(x^{(m_k)}, x^{(0)}) = 0$$

и поэтому ограниченны. Следовательно, ограниченна последовательность $\{\rho(y^{(m_k)}, x^{(0)})\}$, т. е. все точки $y^{(m_k)}$, $k = 1, 2, \ldots$, содержатся в некотором шаре с центром в точке $x^{(0)}$. По теореме 2 из ограниченной последовательности $\{y^{(m_k)}\}$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{y^{(m_{k_j})}\}$:

$$\lim_{j\to\infty} y^{(m_{k_j})} = y^{(0)}.$$

В силу замкнутости множества Y точка $y^{(0)}$ содержится в нем: $y^{(0)} \in$ $\in Y$, а так как множества X и Y не пересекаются, то $x^{(0)} \neq y^{(0)}$ и, следовательно, $\rho(x^{(0)}, y^{(0)}) > 0$.

Из неравенства (см. (33.24))

$$\rho(x^{(m_{k_j})}, y^{(m_{k_j})}) \leqslant \rho(x^{(m_{k_j})}, x^{(0)}) + \rho(x^{(0)}, y^{(0)}) + \rho(y^{(0)}, y^{(m_{k_j})})$$

имеем

$$\rho(x^{(m_{k_j})}, y^{(m_{k_j})}) - \rho(x^{(0)}, y^{(0)}) \leqslant \rho(x^{(m_{k_j})}, x^{(0)}) + \rho(y^{(m_{k_j})}, y^{(0)}).$$

Аналогично из неравенства

$$\rho(x^{(0)}, y^{(0)}) \leqslant \rho(x^{(0)}, x^{(m_{k_j})}) + \rho(x^{(m_{k_j})}, y^{(m_{k_j})}) + \rho(y^{(m_{k_j})}, y^{(0)})$$

получим

$$\rho(x^{(0)}, y^{(0)}) - \rho(x^{(m_{k_j})}, y^{(m_{k_j})}) \leqslant \rho(x^{(m_{k_j})}, x^{(0)}) + \rho(y^{(m_{k_j})}, y^{(0)}).$$

Следовательно,

$$|\rho(x^{(m_{k_j})}, y^{(m_{k_j})}) - \rho(x^{(0)}, y^{(0)})| \leqslant \rho(x^{(m_{k_j})}, x^{(0)}) + \rho(y^{(m_{k_j})}, y^{(0)}).$$

В силу условий $x^{(m_{k_j})} \to x^{(0)}$, $y^{(m_{k_j})} \to y^{(0)}$ при $j \to \infty$ правая часть полученного неравества стремится к нулю. Поэтому

$$\lim_{j\to\infty}\rho(x^{(m_{k_j})}, y^{(m_{k_j})}) = \rho(x^{(0)}, y^{(0)}).$$

Поскольку предел всякой подпоследовательности сходящейся последовательности совпадает с пределом самой последовательности, то

$$\rho(X, Y) = \lim_{m\to\infty}\rho(x^{(m)}, y^{(m)}) = \lim_{j\to\infty}\rho(x^{(m_{k_j})}, y^{(m_{k_j})}) = \rho(x^{(0)}, y^{(0)}).$$

Теорема доказана. $\triangleleft$

Отметим, что условие теоремы о том, что одно из множеств X или Y есть компакт, существенно: так, гипербола и ее асимптота —

замкнутые непересекающиеся множества, но расстояние между ними равно нулю, каждое из них неограничено и, следовательно, не является компактом.

Замечание 2. Если $X \subset R^n$, X — компакт и $X_d = \{x \in R^n\colon \rho(x, X) \leqslant d\}$, то при любом $d > 0$ множество X_d тоже является компактом.

$\triangleright$ Докажем сначала, что множество X_d ограничено. Для любых точек x, $y \in X_d$ существуют такие точки ξ, $\eta \in X$, что $\rho(x,\xi) = \rho(x, X) \leqslant d$, $\rho(y,\eta) = \rho(y, X) \leqslant d$ (см. теорему 6 для случая компакта и точки). Поскольку точки ξ и η принадлежат множеству X, то $\rho(\xi,\eta) \leqslant \operatorname{diam} X$.

В силу неравенства треугольника (33.24) имеем

$$\rho(x,y) \leqslant \rho(x,\xi) + \rho(\xi,\eta) + \rho(\eta, y) \leqslant \\ \leqslant \rho(x, X) + \operatorname{diam} X + \rho(y, X) \leqslant \operatorname{diam} X + 2d.$$

Поэтому

$$\operatorname{diam} X_d \leqslant \operatorname{diam} X + 2d.$$

Это и означает ограниченность множества X_d.

Докажем теперь, что множество X_d замкнуто. Пусть $x^{(m)} \in X_d$, $m = 1, 2, \ldots$, и $\lim\limits_{m\to\infty} x^{(m)} = x^{(0)}$. Для каждого номера m существует такая точка $\xi^{(m)} \in X$, что

$$\rho(x^{(m)}, \xi^{(m)}) = \rho(x^{(m)}, X). \tag{33.65}$$

В силу компактности множества X существует сходящаяся к его точке подпоследовательность $\{\xi^{(m_k)}\}$ последовательности $\{\xi^{(m)}\}$: $\lim\limits_{k\to\infty} \xi^{(m_k)} = \xi^{(0)} \in X$.

Заметив, что

$$\rho(x^{(m_k)}, \xi^{(m_k)}) \leqslant \rho(x^{(m_k)}, x^{(0)}) + \rho(x^{(0)}, \xi^{(0)}) + \rho(\xi^{(0)}, \xi^{(m_k)}),$$

а поэтому

$$\rho(x^{(m_k)}, \xi^{(m_k)}) - \rho(x^{(0)}, \xi^{(0)}) \leqslant \rho(x^{(m_k)}, x^{(0)}) + \rho(\xi^{(m_k)}, \xi^{(0)}),$$

и аналогично

$$\rho(x^{(0)}, \xi^{(0)}) - \rho(x^{(m_k)}, \xi^{(m_k)}) \leqslant \rho(x^{(m_k)}, x^{(0)}) + \rho(\xi^{(m_k)}, \xi^{(0)}),$$

получим

$$|\rho(x^{(m_k)}, \xi^{(m_k)}) - \rho(x^{(0)}, y^{(0)})| \leqslant \rho(x^{(m_k)}, x^{(0)}) + \rho(\xi^{(m_k)}, \xi^{(0)}).$$

Поскольку правая часть этого неравенства стремится к нулю при $k \to \infty$, то

$$\lim_{k\to\infty} \rho(x^{(m_k)}, \xi^{(m_k)}) = \rho(x^{(0)}, y^{(0)}).$$

Из условия $\rho(x^{(m_k)}, \xi^{(m_k)}) \underset{(33.65)}{=} \rho(x^{(m_k)}, X) = d$ следует, что

$$\rho(x^{(0)}, \xi^{(0)}) = \lim_{k\to\infty} \rho(x^{(m_k)}, \xi^{(m_k)}) \leqslant d,$$

а так как $\xi^{(0)} \in X$, то $\rho(x^{(0)}, X) \leqslant d$. Это означает, что $x^{(0)} \leqslant X_d$, т. е. множество X_d замкнуто.

Итак X_d — ограниченное замкнутое множество, т. е. компакт. $\triangleleft$

§ 34. Предел и непрерывность отображений

34.1. Функции многих переменных. Перейдем к изучению функций $y = f(x)$, которые заданы на множествах X, лежащих в n-мерном пространстве и которые принимают числовые (вообще говоря, комплексные) значения. Поскольку точка x n-мерного пространства описывается n числами — своими координатами: $x = (x_1, ..., x_n)$, то вместо $f(x)$, $x \in X \subset R^n$, пишут также $f(x_1, ..., x_n)$, $(x_1, ..., x_n) \in X \subset R^n$, и называют функцию f *функцией n переменных* $x_1, ..., x_n$, каждая из которых принимает уже числовые значения. Если $n > 1$, то функция $f(x_1, ..., x_n)$ называется *функцией многих переменных*, а точка $(x_1, ..., x_n)$ и ее координаты $x_1, ..., x_n$ называются *агрументами* функции f.

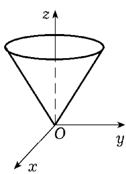


Рис. 132

Функции n переменных $f(x_1, ..., x_n)$, $(x_1, ..., x_n) \in X \subset R^n$, можно описывать при помощи их графиков. Если функция f принимает только действительные значения, то ее график

$$\{(x_1, ..., x_n, y)\colon\ (x_1, ..., x_n) \in X, \quad y = f(x_1, ..., x_n)\}$$

лежит в $(n+1)$-мерном пространстве.

Функции $f(x, y)$ двух переменных можно достаточно наглядно изображать рисунком: их графики лежат в трехмерном пространстве. Графики функций, зависящих от более чем двух переменных, не обладают, конечно, такой интуитивно понятной геометрической интерпретацией. Эти функции приходится изучать более формальными методами, используя функции двух, а иногда и трех переменных лишь для геометрически наглядных аналогий.

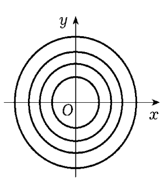


Рис. 133

На рис. 132 изображена часть графика функции

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}. \tag{34.1}$$

О поведении функции $f(x, y)$ можно судить и по изображению ее *линий уровня* на плоскости переменных x, y, т. е.

множества точек, координаты x, y которых удовлетворяют уравнениям вида

$$f(x, y) = c,$$

где c — некоторое фиксированное число (часто бывает удобно брать числа, отличающиеся последовательно друг от друга на одно и то же значение). На рис. 133 изображены линии уровня функции (34.1): они являются окружностями

$$x^2 + y^2 = c^2.$$

Рассматриваются и множества уровней

$$f(x_1, ..., x_n) = c$$

функций f любого числа переменных.

В заключение заметим, что между множеством всех точек (x, y) плоскости и множеством всех комплексных чисел ξ существует взаимнооднозначное соответствие, задаваемое формулой

$$\xi = x + iy,$$

равносильной формулам (задающим обратное отображение)

$$x = \frac{\xi + \overline{\xi}}{2}, \quad y = \frac{\xi - \overline{\xi}}{2i}.$$

Поэтому каждую функцию двух действительных переменных можно рассматривать как функцию одного комплексного переменного.

Понятие числовой функции многих переменных является частным случаем понятия отображения множества из пространства R^n в пространство R^m. Чтобы в дальнейшем не повторять аналогичные рассуждения для числовых функций и отображений, перейдем сразу к изучению последних.

34.2 Предел отображений. Пусть $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ и $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$. Тогда

$$\rho(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + ... + (x_n - y_n)^2} = |x - y|.$$

Здесь слева элементы x и y рассматриваются как точки, а справа — как векторы пространства R^n (см. п. 33.1). В силу этого равенства для обозначения расстояния между точками x и y правомерно наряду с обозначением $\rho(x, y)$ использовать и обозначение $|x - y|$. Так и будет делаться в дальнейшем для облегчения понимания аналогий в определениях ниже рассматриваемых понятий для отображений с соответствующими определениями для случая функций одной переменной.

Пусть R^n и R^m — соответственно n-мерное и m-мерное точечные пространства $X \subset R^n$, и отображение f отображает X в пространство R^m:

$$f: X \to R^m,$$

т. е. $y = f(x) \in R^m$, $x \in X \subset R^n$.

Если $m = 1$, а $n > 1$, то отображение f — числовая *функция многих переменных* $x_1, x_2, ..., x_n$: $y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$.

Если $m > 1$, то каждая координата y_i точки $y = f(x) \in R^m$ является числовой функцией точки x. Обозначим эти функции f_j, $j = 1, 2, ..., m$:

$$f(x) = (f_1(x), f_2(x), ..., f_n(x)).$$

Функции $f_j : X \to R$ называются *координатными функциями* отображения f. Они являются, вообще говоря (а точнее при $n > 1$), функциями многих переменных.

Опеределим понятие предела отображений, которое является обобщением понятия предела функций одной пременной.

Пусть $x^{(0)}$ и a — конечные или бесконечно удаленные точки соответственно пространств R^n и R^m. Для $n = 1$ или $m = 1$ в случае бесконечно удаленных точек $x^{(0)}$ и a они могут быть и бесконечностями со знаком: $+\infty$ или $-\infty$. Пусть еще точка $x^{(0)}$ является точкой прикосновения множества X.

Определение 1. Точка a называется *пределом отображения* $f : X \to R^m$, $X \subset R^n$, *при* $x \to x^{(0)}$ (или: *в точке* $x = x^{(0)}$), если для любой последовательности $x^{(k)} \in X$, $k = 1, 2, ...$, такой, что $\lim\limits_{k\to\infty} x^{(k)} = x^{(0)}$, имеет место равенство

$$\lim_{x\to x^{(0)}} f(x^{(k)}) = a.$$

Для предела отображения f в точке $x^{(0)}$ используется обозначение

$$\lim_{x\to x^{(0)}} f(x).$$

В символической записи определение предела отображения выглядит так:

$$\lim_{x\to x^{(0)}} f(x) = a \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$$

$$\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall x^{(k)} \in X, \quad k = 1, 2, ..., \quad \lim_{k\to\infty} x^{(k)} = x^{(0)} \Rightarrow \lim_{k\to\infty} f(x^{(k)}) = a. \quad (34.2)$$

По аналогии с пределом функции одной переменной определение предела отображения можно сформулировать в терминах окрестностей.

Определение 1′. Точка a называется *пределом отображения* $f : X \to R^m$, $X \subset R^n$, *при* $x \to x^{(0)}$ (или: *в точке* $x = x^{(0)}$), если для любой окрестности $U(a)$ точки a существует такая окрестность $U(x^{(0)})$ точки $x^{(0)}$, что

$$f(X \cap U(x^{(0)})) \subset U(a).$$

В символической записи:

$$\lim_{x\to x^{(0)}} f(x) = a \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall U(a)\ \exists U(x^{(0)}) \colon f(X \cap U(x^{(0)})) \subset U(a). \quad (34.3)$$

Иначе говоря,

$$\lim_{x\to x^{(0)}} f(x)=a \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall U(a)\ \exists U(x^{(0)})\ \forall x\in X\cap U(x^{(0)}) \Rightarrow f(x)\in U(a). \tag{34.4}$$

Определения 1 и 1′ предела отображения равносильны. Действительно, из сравнения записей определений предела функций одной переменной (6.4) в п. 6.1 и (6.10) в п. 6.3 с определениями (34.2) и (34.3) предела отображений видно, что они полностью совпадают по форме записи (только точка, в которой берется предел, обозначается теперь $x^{(0)}$, а не x_0, так как нижний индекс обозначает в пространственном случае номер координаты точки). Поэтому доказательство равносильности двух определений предела функций одной переменной (см. теорему 1 в п. 6.3) дословно переносится на случай пределов отображений, если только под точками и окрестностями понимать точки и окрестности в пространстве.

Наряду с записью $\lim\limits_{x\to x^{(0)}} f(x)$ для предела отображения f в точке $x^{(0)}$ употребляются как равноправные записи

$$\lim_{x-x^{(0)}\to 0} f(x) \quad \text{и} \quad \lim_{|x-x^{(0)}|\to 0} f(x).$$

Если $x^{(0)}$ и a — конечные точки пространств R^n и R^m, то, рассматривая элементы этих пространств как векторы, определение (34.4) можно записать в виде

$$\lim_{x\to x^{(0)}} f(x)=a \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$$

$$\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall x\in X,\ |x-x^{(0)}|<\delta \Rightarrow |f(x)-a|<\varepsilon. \tag{34.5}$$

На этом примере еще раз хорошо видно, как разумно выбраны обозначения в многомерных пространствах: формула (34.5) по записи ничем не отличается от случая числовых функций одной переменной. Но, конечно, в случае числовых функций одной переменной $|x-x^{(0)}|$ и $|f(x)-a|$ означают абсолютные величины чисел, а в формуле (34.5) — расстояния между точками в n-мерном и m-мерном пространствах.

Поскольку функции многих переменных являются частным случаем рассматриваемых отображений, то определение предела отображения содержит в себе, в частности, определение предела числовых функций.

С другой стороны, из определения (34.3) видно, что понятие предела отображения сводится к понятию предела числовой функции $|f(x)-a|$ при $a\in R^m$ и функции $|f(x)|$ при $a=\infty$:

$$\lim_{x\to x^{(0)}} f(x)=a \Leftrightarrow \lim_{x\to x^{(0)}} |f(x)-a|=0, \quad a\in R^m,$$

и

$$\lim_{x\to x^{(0)}} f(x)=\infty \Leftrightarrow \lim_{x\to x^{(0)}} |f(x)|=\infty.$$

Укажем еще на одну связь понятий пределов числовых функций и пределов отображений из R^n в R^m.

Если $a = (a_1, a_2, ..., a_m)$, т. е. является конечной точкой пространства R^m, а $f(x) = (f_1(x), f_2(x), ..., f_m(x))$, $f\colon X \to R^m$, $X \subset R^n$, то из неравенства

$$|f_j(x) - a_j| \leqslant \sqrt{(f_1(x) - a_1)^2 + (f_2(x) - a_2)^2 + ... + (f_m(x) - a_m)^2} = \\ = |f(x) - a|, \quad j = 1, 2, ..., m,$$

следует, очевидно, что равенство $\lim\limits_{x \to x^{(0)}} f(x) = a$ имеет место тогда и только тогда, когда для всех $j = 1, 2, ..., m$ имеют место равенства

$$\lim_{x \to x^{(0)}} f_j(x) = a_j.$$

В символической записи:

$$\lim_{x \to x^{(0)}} f(x) = a \Leftrightarrow \forall j = 1, 2, ..., m\colon \lim_{x \to x^{(0)}} f_j(x) = a_j. \tag{34.6}$$

В этом смысле понятие предела рассматриваемых отображений снова сводится к понятию предела числовых функций — предела его координатных функций.

Если отображение f задано на множестве $X \subset R^n$, $E \subset X$ и $x^{(0)}$ — точка прикосновения (конечная или бесконечно удаленная) множества E, то предел в точке $x^{(0)}$ сужения f_E отображения f на множество E называется *пределом* $\lim\limits_{x \to x^{(0)}, x \in E} f(x)$ *отображения* f *по множеству* E. Таким образом,

$$\lim_{x \to x^{(0)}, x \in E} f(x) = \lim_{x \to x^{(0)}} f_E(x). \tag{34.7}$$

Очевидно, что если в точке $x^{(0)}$ существует предел $\lim\limits_{x \to x^{(0)}} f(x)$, то в этой точке существуют и пределы отображения f по любым множествам $E \subset X$, для которых точка $x^{(0)}$ является точкой прикосновения, и все эти пределы равны между собой.

В случае $n > 1$ в качестве множества E часто берутся кривые, прямые или лучи, проходящие через точку $x^{(0)}$ или их пересечения с отображаемым множеством X. Естественно, что при рассмотрении пределов отображения по разным подмножествам множества X в случае, когда предела по самому множеству X не существует, могут получаться разные результаты.

Если множество X содержит окрестность или проколотую окрестность точки $x^{(0)}$ и множество E является пересечением множества X с некоторой прямой (кривой) Γ, проходящей через точку $x^{(0)}$ ($E = X \cap \Gamma$), то предел отображения f в точке $x^{(0)}$ по множеству E называется *пределом отображения* f *в точке* $x^{(0)}$ *по прямой* (*кривой*) Γ.

Пределы же отображения f в точке $x^{(0)}$ по всей окрестности или по всей проколотой окрестности называются *всесторонними пределами.*

Если Γ — луч с вершиной в точке $x^{(0)}$, а l — вектор, сонаправленный этому лучу, то предел отображения f в точке $x^{(0)}$ по пересечению луча Γ с множеством, на котором задано отображение, называется также *пределом этого отображения в точке $x^{(0)}$ по направлению, противоположному вектору l.*

Пример. Пусть $f(x, y) = \dfrac{x^2y}{x^4 + y^2}$. Эта формула задает функцию во всех точках плоскости, кроме начала координат $(0, 0)$. Исследуем существование пределов у этой функции в точке $(0, 0)$ по различным направлениям и по параболе $y = x^2$. Уравнение луча с вершиной в начале координат, параллельного вектору (a, b), $a^2 + b^2 > 0$, имеет вид

$$x = at, \quad y = bt, \quad t > 0.$$

Поэтому вдоль этого луча имеем

$$f(at, bt) = \frac{a^2bt}{a^4t^2 + b^2} \to 0 \quad \text{при} \quad t \to 0,$$

т. е. у функции $f(x, y)$ в точке $(0, 0)$ существует предел по любому направлению, и он равен нулю.

Если же $y = x^2$, то $f(x, x^2) \equiv 1/2$, и, следовательно, предел в точке $(0, 0)$ вдоль параболы $y = x^2$ также существует, но равен $1/2$.

Из сказанного, очевидно, следует, что у функции f не существует всестороннего предела в точке $(0, 0)$.

34.3. Непрерывность отображений в точке. При рассмотрении предела отображения в данной точке эта точка может как принадлежать отображаемому множеству, так и не принадлежать ему.

Если $f\colon X \to R^m$, $X \subset R^n$, $x^{(0)} \in X$ и существует предел $\lim\limits_{x \to x^{(0)}} f(x)$, то $\lim\limits_{x \to x^{(0)}} f(x) = f(x^{(0)})$.

Действительно, выбрав стационарную последовательность

$$x^{(k)} = x^{(0)} \in X, \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{34.8}$$

получим согласно определению (34.2)

$$\lim_{x \to x^{(0)}} f(x) \underset{(34.2)}{=} \lim_{k \to \infty} f(x^{(k)}) \underset{(34.8)}{=} \lim_{k \to \infty} f(x^{(0)}) = f(x^{(0)}). \tag{34.9}$$

Определение 2. Если предел отображения в точке равен его значению в этой точке, то отображение называется *непрерывным в ней.*

Иначе говоря, равенство

$$\lim_{x \to x^{(0)}} f(x) = f(x^{(0)}) \tag{34.10}$$

является определением непрерывности отображения в точке.