Ю. П. Петров

Как получать НАДЕЖНЫЕ РЕШЕНИЯ систем уравнений

Ю. П. Петров

Как получать НАДЕЖНЫЕ РЕШЕНИЯ систем уравнений

Санкт-Петербург
«БХВ-Петербург»
2009

УДК 681.3.06
ББК 32.973
П30

Петров Ю. П.

П30 Как получать надежные решения систем уравнений. — СПб.: БХВ-Петербург, 2009. — 176 с.: ил.

ISBN 978-5-9775-0450-8

Необходимость вычислять решения систем алгебраических уравнений встречается во многих задачах техники и физики, и без точных оценок возможной погрешности решения не надежны. В книге изложены методы и алгоритмы, впервые позволяющие дать точную оценку погрешности каждой из составляющей вектора решений системы линейных алгебраических уравнений, тогда как ранее были известны только приближенные оценки.

Для студентов, аспирантов, инженеров, научных работников и специалистов, выполняющих расчеты, включающие системы алгебраических уравнений

УДК 681.3.06
ББК 32.973

Группа подготовки издания:

Главный редактор	*Екатерина Кондукова*
Зам. главного редактора	*Татьяна Лапина*
Зав. редакцией	*Григорий Добин*
Компьютерная верстка	*Ольги Сергиенко*
Корректор	*Зинаида Дмитриева*
Дизайн обложки	*Елены Беляевой*
Зав. производством	*Николай Тверских*

Рецензенты:
Блехман И. И., д. ф.-м. н., профессор НИИ "Механобр";
Игнатьев М. Б., д. т. н., профессор Санкт-Петербургского университета аэрокосмического приборостроения, лауреат Государственной премии;
Ушаков А. В., д. т. н., профессор Санкт-Петербургского университета информационных технологий, механики и оптики

Лицензия ИД № 02429 от 24.07.00. Подписано в печать 16.04.09.
Формат $60\times90^1/_{16}$. Печать офсетная. Усл. печ. л. 11.
Тираж 1500 экз. Заказ №
"БХВ-Петербург", 190005, Санкт-Петербург, Измайловский пр., 29.

Санитарно-эпидемиологическое заключение на продукцию
№ 77.99.60.953.Д.003650.04.08 от 14.04.2008 г. выдано Федеральной службой по надзору в сфере защиты прав потребителей и благополучия человека.

Отпечатано с готовых диапозитивов
в ГУП "Типография "Наука"
199034, Санкт-Петербург, 9 линия, 12

ISBN 978-5-9775-0450-8

Оглавление

Предисловие 7

§ 1. Примеры расчета 11

§ 2. Исследование зависимости решений от параметров 16

§ 3. Проблемы "Математики-2" 21

§ 4. Вычисление решений через обратные матрицы; "числа обусловленности" решений 25

§ 5. Некорректные и плохо обусловленные задачи в "Математике-1" и в "Математике-2" 33

§ 6. Достоинства и недостатки оценки погрешности по "числу обусловленности" 40

§ 7. Новые результаты в проблеме оценок по "числам обусловленности" 45

1. Зависимость "числа обусловленности" от эквивалентных преобразований уравнений 45
2. Ложная зависимость "числа обусловленности" от масштабов измерения коэффициентов уравнений 48
3. Ошибочные суждения о влиянии параметров системы на обусловленность решений 49

§ 8. Вычисление погрешности решений при вариациях правой части 53

§ 9. Выделение "очень плохо обусловленных систем" с использованием "модульных определителей" 59

§ 10. Оценка погрешности решений через "модульные определители" 64

§ 11. Недостатки и достоинства методики оценки погрешностей решений через "модульные определители" 68

§ 12. Возможности улучшения оценок нормы погрешности по "числу обусловленности" 73

§ 13. Точная оценка изменения решений при вариациях коэффициентов системы уравнений 77

§ 14. Результаты численного эксперимента 85

§ 15. Рассмотрение расчета одной из конструкций 89

§ 16. Обоснование построения "таблиц знаков" и точной оценки вариаций определителей 94

§ 17. Рассмотрение особых частных случаев 101

§ 18. Вычисление точных значений вариаций каждой из составляющих вектора решений 111

§ 19. Общий алгоритм точной оценки погрешностей каждой из составляющих вектора решений 128

§ 20. Использование оценок вариаций при вычислении решений обыкновенных дифференциальных уравнений ... 135

§ 21. Применения к решению интегральных уравнений 139

§ 22. Применения к решению дифференциальных уравнений в частных производных 142

§ 23. Примеры аварий и катастроф. Анализ их причин 146

§ 24. Краткий обзор методов и результатов "Математики-2" 153

§ 25. Дополнительные пояснения и примеры 165

§ 26. Заключение 170

Литература 173

Список примеров

Пример № 1 11
Пример № 2 16
Пример № 3 28
Пример № 4 30
Пример № 5 35
Пример № 6 37
Пример № 7 45
Пример № 8 49
Пример № 9 51
Пример № 10 53
Пример № 11 62
Пример № 12 64
Пример № 13 78
Пример № 14 89
Пример № 15 101
Пример № 16 103
Пример № 17 105
Пример № 18 107
Пример № 19 110
Пример № 20 111
Пример № 21 118
Пример № 22 132
Пример № 23 135
Пример № 24 159
Пример № 25 166

Предисловие

В данном учебном пособии приведены — в наиболее простой и доступной форме — результаты исследований автора в области надежности расчета объектов физики и техники, описываемых системами линейных алгебраических уравнений[1].

Проведенное исследование показало, что традиционные и повсеместно используемые методы расчета не всегда и не для всех объектов дают надежные результаты. Результаты расчета могут не соответствовать реальному поведению рассчитываемых объектов, и это служит причиной многих аварий и даже катастроф.

Одной из причин этих аварий и катастроф является недостаточно полное исследование проблемы зависимости решений уравнений от неизбежной на практике неточности в задании их коэффициентов. Для реальных объектов эти коэффициенты не могут идеально точно соответствовать значениям, заданным при проектировании и расчете. Отклонения неизбежны. Кроме того, в ходе эксплуатации параметры объекта могут испытывать изменения (вариации), которые влияют на решения, могут существенно изменить их и привести к авариям.

В данной работе влияние происходящих по разным причинам вариаций коэффициентов и параметров на решения уравнений, на поведение рассчитываемых объектов было подвергнуто дополнительному исследованию, которое привело к новым (иногда — неожиданным) результатам.

Данное учебное пособие предназначено для студентов, а также для инженеров и специалистов, желающих повысить свою квалификацию. В нем предложены новые методы оценки влияния вариаций параметров на поведение исследуемых объектов, позволяющие повысить надежность результатов расчета и тем самым уменьшить вероятность аварий.

---

[1] Ранее, в [2; 4] подобное исследование было проведено относительно объектов, описываемых дифференциальными уравнениями.

Отметим сразу, что вариации параметров не являются, разумеется, единственной причиной погрешностей расчета. Кроме них есть и другие причины: погрешности вычислительных методов, влияние ошибок округления и т. п. Такие погрешности могут быть уменьшены, и методам их уменьшения посвящена довольно богатая литература.

Предлагаемое учебное пособие посвящено другой, совсем другой теме. Оно посвящено неустранимым и неуменьшаемым погрешностям решений, возникающим из-за вариаций исходных данных расчета, данных о параметрах исследуемого объекта, которые в реальных условиях почти всегда являются приближенными и заданы чаще всего лишь интервалом своих возможных значений. К этой исходной неточности знаний о параметрах объекта и о коэффициентах его математической модели добавляются вариации коэффициентов и параметров, возникающие в ходе эксплуатации объекта и увеличивающие интервал значений коэффициентов. Каков будет интервал, внутри которого лежат решения системы, если известен интервал изменения ее коэффициентов и параметров? — вот основная проблема, рассмотренная в данной книге. Этой проблеме в последние годы заслуженно уделяется все больше и больше внимания, поскольку стало ясно, что без учета вариаций коэффициентов и параметров, без точной оценки величины интервала, на границах которого может оказаться решение, нельзя говорить о надежности результатов расчета. В данном учебном пособии приведен и проиллюстрирован примерами разработанный автором алгоритм вычисления точной оценки погрешности решения, порожденной вариациями коэффициентов.

Эта работа продолжает линию предыдущих исследований в области прикладной математики, учитывающих неточное знание коэффициентов уравнений или законов их изменения, учитывающих возможность их вариаций, и т. п. Публикаций по этому направлению исследований накопилось уже достаточно много (см. [1; 2; 4; 7; 8; 10; 11; 15; 16; 17; 18] и многие другие). По-видимому, настало время назвать это направление исследований "Математикой-2", в отличие от "Математики-1", исследующей математические модели с точно заданными коэффициентами и законами их изменения.

"Математика-2" отличается от "Математики-1" как предметом исследования, так и его методами. Главное (недавно обнаруженное) отличие: в привычной нам "Математике-1" очень широко используются эквивалентные (равносильные) преобразования, которые не изменяют решений, но упрощают исследование (примеры таких преобразований: умножение или деление всех членов уравнения на число, не равное нулю, замена члена уравнения на равный ему и т. п.). В работе [2] было показано, что эквивалентные преобразования, не изменяя самих решений как таковых, могут изменять важные свойства решений — в том числе степень их зависимости от вариаций коэффициентов и параметров. Поэтому в "Математике-2" эквивалентными преобразованиями можно пользоваться лишь с большой осторожностью, что и отличает ее от "Математики-1".

Автор благодарен И. А. Петрову за помощь в подготовке рукописи.

Пожелания, замечания и возражения по тексту учебного пособия можно направлять на адрес: *petrov*1930@*mail.ru*.

§ 1. Примеры расчета

Расчет многих технических объектов сводится к составлению и решению систем линейных алгебраических уравнений — систем вида:

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n &= b_n, \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

где x_1; x_2; ...; x_n — неизвестные, подлежащие вычислению, a_{ij} — коэффициенты системы, b_1; b_2; ...; b_n — коэффициенты правой части.

Решением системы (1) является n-мерный вектор X — т. е. набор n чисел x_1; x_2; ...; x_n, который при подстановке его в левую часть системы (1) обращает все уравнения системы в тождества.

В дальнейшем основное внимание будет уделяться не решению X в целом, а наиболее важной для практики задаче — оценке погрешности вычисления каждой из составляющих решения, каждого из чисел x_1; x_2; ...; x_n. Для сокращения письма каждую из составляющих часто будем коротко называть "решением" вместо полного названия — "составляющая решения X". Надеемся, что такая небольшая вольность в терминологии не приведет к путанице.

Рассмотрим простой пример (**пример № 1**): пусть балка AB лежит на двух опорах, как показано на рис. 1.

Длина балки левее левой опоры равна l_1 метров с удельной нагрузкой на единицу длины q_1 кН/м (килоньютонов на метр). Длина участка между опорами равна l_2 метров с удельной нагрузкой q_2 кН/м. Длина балки правее правой опоры равна l_3 метров с удельной нагрузкой q_3 кН/м. Нагрузку на левую опору обозначим через x_1, на правую — через x_2. Опоры предполагаем неудерживающими. Это означает, что если, например, нагрузка x_1 оказа-

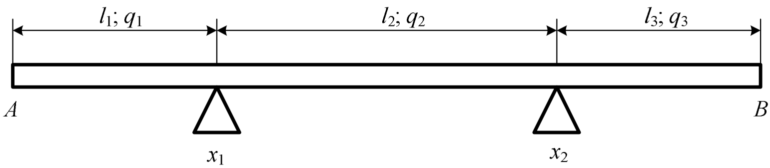

Рис. 1

лась отрицательной, то балка потеряет статическую устойчивость, соскользнет с правой опоры и упадет. Значения $x_1 = 0$ или $x_2 = 0$ означают, что балка лежит на границе статической устойчивости. Для отыскания x_1 и x_2 можно составить уравнения равновесия моментов сил относительно точек A и B (левого и правого концов балки).

Относительно правого конца уравнение равновесия моментов имеет вид:

$$(l_2 + l_3)x_1 + l_3 x_2 = (l_1 q_1 + l_2 q_2 + l_3 q_3) \cdot (l_1 + l_2 + l_3) \cdot \frac{1}{2} \tag{2}$$

Относительно левого конца уравнение равенства моментов сил имеет вид:

$$l_1 x_1 + (l_1 + l_2)x_2 = (l_1 q_1 + l_2 q_2 + l_3 q_3) \cdot (l_1 + l_2 + l_3) \cdot \frac{1}{2} \tag{3}$$

В уравнениях (2) и (3) величины l_1; l_2; l_3; q_1; q_2; q_3 — это *параметры* объекта (в данном случае — балки).

Мы убеждаемся, что коэффициенты системы уравнений (1) зависят от параметров, являются функциями от них.

В данном примере система (1) является системой второго порядка ($n = 2$), и в ней:

$$a_{11} = l_2 + l_3;$$

$$a_{12} = l_3;\ a_{21} = l_1;$$

$$a_{22} = l_1 + l_2;$$

$$b_1 = b_2 = (l_1 q_1 + l_2 q_2 + l_3 q_3) \cdot (l_1 + l_2 + l_3) \cdot \frac{1}{2}.$$

Размерности левой и правой частей уравнений (2) и (3) одинаковы и равны размерности момента, т. е. произведению килоньютон на метр.

Другим примером объекта, поведение которого описывается системой уравнений (1), может служить разветвленная электрическая цепь. Как известно, на основании второго закона Кирхгофа для цепи, состоящей из n контуров с сопротивлениями, не завясящими от токов и напряжений, можно составить систему из n уравнений:

$$\left.\begin{array}{l} r_{11}i_1 + r_{12}i_2 + \ldots + r_{1n}i_n = E_1; \\ r_{21}i_1 + r_{22}i_2 + \ldots + r_{2n}i_n = E_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ r_{n1}i_1 + r_{n2}i_2 + \ldots + r_{nn}i_n = E_n, \end{array}\right\} \qquad (4)$$

где i_1; i_2; ...; i_n — контурные токи, r_{ij} — контурные сопротивления, E_1; E_2; ...; E_n — контурные электродвижущие силы. Размерность левых и правых частей уравнений (4) выражается в вольтах.

Помимо объектов, математическими моделями которых с самого начала являются системы линейных алгебраических уравнений — типа систем (2)–(3) и (4), — подобные системы возникают при расчете объектов, математическими моделями которых являются уравнения в частных производных, или интегральные уравнения.

Поясним сказанное на примере интегрального уравнения Фредгольма:

$$\int_a^b K(x;s)y(s)ds = f(x),$$

где $K(x;\ s)$ — ядро уравнения, функция двух переменных x и s, отражающая свойства исследуемого объекта. Переменные x и s изменяются в пределах: $a \le s \le b$; $c \le x \le d$. При этом $y(s)$ — искомая функция, $f(x)$ — заданная функция, отражающая обычно внешние воздействия на объект.

Распространенный метод решения интегральных уравнений — это сведение их к системам вида (1). Для этого вводят равномерные сетки узлов с шагом Δs по переменной s и шагом Δx по переменной x. Заменяя непрерывную функцию $K(x; s)$ ее значениями в узлах, приводим интегральное уравнение к системе алгебраических уравнений:

$$A_{i,j} y_j = f_i ,$$

где $i = 1, 2, ..., m$; $j = 1, 2, ..., n$.

Интегральные уравнения, как известно, описывают очень многие объекты физики и техники (примеры приведены в [8], [9], [32], [33], [34]). Исследование каждого из них приводит к системе вида (1), коэффициенты которой зависят от свойств объекта. Поскольку функции $K(x; s)$ и $f(x)$ почти всегда известны только приближенно и не могут оставаться идеально неизменными с течением времени или в ходе эксплуатации технического объекта, то необходимо учитывать, что и все коэффициенты описывающих исследуемые объекты системы уравнений вида (1) также могут быть известны только приближенно, и это необходимо учитывать при расчетах.

Для объектов, описываемых дифференциальными уравнениями в частных производных, также часто возникает необходимость решать системы уравнений вида (1).

Известны и многие другие проблемы, в которых одним из важных этапов является вычисление решения той или иной системы линейных алгебраических уравнений и оценка погрешности этого решения, происходящей из-за вариаций его коэффициентов. Автор известной публикации [25] обоснованно считает, что в настоящее время "более 70% всех математических расчетов приходится на вычисление решений систем линейных алгебраических уравнений". Это подчеркивает важность вопросов, рассматриваемых в данном учебном пособии.

В дальнейшем мы будем в основном рассматривать примеры из строительной механики — например, уравнения, возникающие при расчете сил и нагрузок в элементах конструкций. Это сделано потому, что примеры из строительной механики нагляднее. Однако необходимость решать системы линейных алгебраических уравнений и оценивать возможную погрешность их решений при вариациях коэффициентов и параметров возникает во многих областях техники и физики. Поэтому значение рассмотренных примеров много шире.

§ 2. Исследование зависимости решений от параметров

Рассмотрим более подробно конкретный пример (**пример № 2**), когда в системе (2)–(3) будет $l_1 = l_2 = 2$ м; $l_3 = 3{,}8$ м; $q_1 = q_2 = q_3 = 1$ кН/м. Система (2)–(3) в этом случае примет вид:

$$\left.\begin{aligned} 5{,}8x_1 + 3{,}8x_2 = 30{,}42; \\ 2x_1 + 4x_2 = 30{,}42. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Будем решать эту систему по известным формулам Крамера:

$$x_1 = \frac{D_1}{D}; x_2 = \frac{D_2}{D}, \tag{6}$$

где D — определитель системы, D_1 — тот же определитель, но в котором первый столбец заменен на столбец коэффициентов правой части системы, D_2 — тот же определитель системы, но в котором теперь уже второй столбец заменен на столбец коэффициентов правой части.

Для системы (5) будет:

$$D = \begin{vmatrix} 5{,}8 & 3{,}8 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 5{,}8 \cdot 4 - 3{,}8 \cdot 2 = 15{,}6;$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 30{,}42 & 3{,}8 \\ 30{,}42 & 4 \end{vmatrix} = 30{,}42 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3{,}8 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 30{,}42 \cdot (4 - 3{,}8) = 6{,}084;$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 5{,}8 & 30{,}42 \\ 2 & 30{,}42 \end{vmatrix} = 30{,}42 \cdot \begin{vmatrix} 5{,}8 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 30{,}42 \cdot (5{,}8 - 2) = 111{,}6,$$

откуда следует, что $x_1 = \dfrac{6{,}084}{15{,}6} = 0{,}39$ кН; $x_2 = \dfrac{111{,}6}{15{,}6} = 7{,}41$ кН.

Рассмотрим теперь как изменятся решения при изменении параметров системы. Этих параметров — шесть (l_1; l_2; l_3; q_1; q_2; q_3).

Пусть, например, q_3 увеличился на 5% и стал равным 1,05 кН/м. Пользуясь зависимостями, связывающими параметры с коэффициентами системы, т. е. зависимостями:

$$\left.\begin{aligned} &a_{11} = l_2 + l_3; a_{12} = l_3; \\ &a_{21} = l_1; a_{22} = l_1 + l_2; \\ &b_1 = b_2 = \frac{1}{2}(l_1 + l_2 + l_3)(l_1 q_1 + l_2 q_2 + l_3 q_3) \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

получим, что система (5) при $q_3 = 1{,}05$ перейдет в систему:

$$\left.\begin{aligned} 5{,}8x_1 + 3{,}8x_2 &= 31{,}161; \\ 2x_1 + 4x_2 &= 31{,}161 \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

с решениями $x_1 = 0{,}395$; $x_2 = 7{,}59$. Таким образом, вариация параметра q_3 на +5% изменила только коэффициенты правой части системы (5). Они выросли на 2,44%. Решения x_1 и x_2 также выросли на 2,44%.

Если параметр l_1 изменился на –5% (т. е. вместо $l_1 = 2$ м стало $l_1 = 1{,}9$ м), то система (5) перейдет в систему:

$$\left.\begin{aligned} 5{,}8x_1 + 3{,}8x_2 &= 29{,}645; \\ 1{,}9x_1 + 3{,}9x_2 &= 29{,}645 \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

с решениями $x_1 = 0{,}195$; $x_2 = 7{,}608$.

Таким образом, в данном случае коэффициенты a_{11} и a_{12} остались без изменения, коэффициент a_{21} изменился на –5%, a_{22} — на –2,5%, правые части изменились на –2,54%, решение x_1 изменилось на –50%, а x_2 изменилось на +2,7%.

Если произойдет изменение сразу двух параметров: l_1 изменится на +5% и l_3 — тоже на +5%, то система (5) перейдет в систему

$$\left.\begin{aligned} 5{,}99x_1 + 3{,}99x_2 &= 32{,}724; \\ 2{,}1x_1 + 4{,}1x_2 &= 32{,}724 \end{aligned}\right\} \quad (10)$$

с решениями $x_1 = 0{,}225$; $x_2 = 7{,}87$.

В данном случае коэффициент a_{11} изменился на +3,28%, a_{12} — на +5%, a_{21} — на +5%, a_{22} — на +5%, b_1 и b_2 на +7,56%. Решение x_1 изменилось на –42,4%, решение x_2 — на +6,2%.

Изменения параметров могут происходить и в разные стороны. Если, например, l_1 изменилось на –5% (вместо 2 стало l_1 = 1,9 м), а l_3 изменилось на +5%, то система (5) перейдет в систему

$$\left.\begin{aligned} 5{,}99x_1 + 3{,}99x_2 &= 31{,}126;\\ 1{,}9x_1 + 3{,}9x_2 &= 31{,}126 \end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

с решениями $x_1 = -0{,}176$; $x_2 = 8{,}06$.

В данном случае при тех же абсолютных величинах вариаций параметров l_1 и l_3 решение x_1 изменилось коренным образом — изменило свой знак. Вместе с этим изменилось и все поведение исследуемого объекта: балка *AB* уже не может устойчиво лежать на двух (неудерживающих) опорах. Она соскользнет с правой опоры и упадет.

Анализ простого примера с системой (5) позволяет сделать общие выводы:

> при исследовании влияний вариаций параметров на поведение объекта необходимо исследовать все возможные сочетания положительных и отрицательных вариаций. Если поведение объекта зависит от n параметров, то нужно составить, в общем случае, 2^n систем уравнений, а затем найти и проверить решения каждой из 2^n систем.

Для рассмотренного примера № 1 с балкой будет $n = 6$ и $2^n = 2^6 = 64$. Поведение более сложного объекта может зависеть, например, от 20 параметров, и тогда придется составлять и решать

$$2^{20} = 2^{10} \cdot 2^{10} = 1024 \cdot 1024 = 1048576$$

систем уравнений, что затруднительно даже при использовании быстродействующей вычислительной техники.

Разумеется, в каждом отдельном случае, используя особенности решаемой задачи, можно сократить число необходимых вычислений. Так, в рассматриваемом примере с балкой можно вместо второго уравнения равновесия моментов (3) использовать уравнение равновесия сил:

$$x_1 + x_2 = (l_1 q_1 + l_2 q_2 + l_3 q_3) \qquad (12)$$

и решать для определения x_1 и x_2 систему уравнений (2)–(12).

В уравнении (12) коэффициенты при x_1 и x_2 всегда равны единице и не зависят от параметров балки (то есть от l_i и q_i), что сокращает объем вычислений.

Однако в целом сохраняет силу общий и важный вывод:

> решение задачи о поведении того или иного объекта при учете возможных вариаций его параметров является значительно более сложной проблемой (часто на много порядков более сложной проблемой), чем решение при заданных и неизменных значениях параметров.

Этот вывод сохраняет силу и при учете специальных методов, разработанных для учета вариаций параметров (таких, как теория чувствительности, описанная в работах [1], [7] и т. д.). Некоторые из этих методов в дальнейшем подвергнутся критическому разбору и будет показано, что они обладают серьезными, ранее не всегда замечаемыми, недостатками. Будут предложены новые методы.

Полное решение проблемы расчета с учетом вариаций коэффициентов и параметров состоит из двух частей:

- первая часть проблемы: анализируя свойства исследуемого объекта при вариациях параметров, надо оценить: в каких пределах может изменяться каждый из коэффициентов математической модели объекта, какой может быть вариация каждого из коэффициентов;
- вторая часть проблемы: опираясь на исследование вариаций коэффициентов, считая их известными и заданными, оценить вариации решений математической модели.

Первая часть проблемы — это чисто инженерная задача, решение которой требует хорошего знания свойств и особенностей конкретного исследуемого объекта.

Вторая часть проблемы относится уже к прикладной математике. Решение второй части проблемы требует исследования свойств используемого класса математических моделей (например — систем алгебраических уравнений $AX = B$). Решение второй части проблемы значимо для специалистов широкого круга специальностей, для всех тех, кто использует рассматриваемый класс математических моделей.

В данном учебном пособии — как и в других учебниках и руководствах, посвященных методам вычислений, таких, как [4; 5; 6; 24; 25; 26; 27; 28; 32; 33 и др.], — не рассматривается первая часть проблемы. Вариации коэффициентов предполагаются известными и заданными, исследуются зависящие от них вариации решений. При этом исследованию подвергаются самые различные варианты знания о вариациях коэффициентов:

- исследуется вариант, когда абсолютные величины вариаций ограничены сверху единым числом ε_0, а знак каждой из вариаций может быть любым;
- исследуется вариант, когда вариации испытывает только часть коэффициентов;
- исследуется вариант относительных вариаций (в долях от первоначальной величины коэффициента) и вариант абсолютной вариации, когда к коэффициенту a_i прибавляется вариация ε_i, не зависящая от a_i;
- рассматриваются варианты связанных вариаций, когда вариации одних коэффициентов зависят от вариаций других.

Автор надеется, что рассмотрение всех этих вариантов охватит потребности большинства специалистов, работающих в различных областях техники и физики, но одинаково использующих в своих расчетах системы алгебраических уравнений $AX = B$.

§ 3. Проблемы "Математики-2"

На совсем простом примере, рассмотренном в § 1, сразу видно, что расчеты и исследование поведения тех или иных объектов при неизменных параметрах и те же расчеты, но с учетом неизбежных на практике вариаций этих параметров, — задачи совершенно разной степени сложности и требуют — как мы увидим далее — существенно различных методов исследования.

Поэтому полезно выделить две математики: "Математику-1", ведущую исследование математических моделей реальных объектов и систем при известных и заданных значениях коэффициентов или при известных законах их изменения, и "Математику-2", не предполагающую точного знания коэффициентов и параметров, учитывающую вариации коэффициентов, законов их изменения и т. п., т. е. учитывающую вариации, которые на практике всегда неизбежны.

Достаточно очевидно, что результаты, получаемые в "Математике-2", имеют не меньшее (а иногда и большее) значение, чем результаты, получаемые в привычной и хорошо известной "Математике-1".

Но вот количество исследований, объем и глубина этих исследований в "Математике-1" неизмеримо больше, чем в "Математике-2". Поэтому многие проблемы, возникающие в "Математике-2", недостаточно исследованы и не получили пока сколько-нибудь полного и исчерпывающего решения.

Укажем на некоторые из проблем:

- выделение особенно опасных объектов, математические модели которых имеют некорректные решения, — т. е. решения, которые изменяются на конечные величины или даже изменяются коренным образом при сколь угодно малых (и тем самым почти всегда неизбежных на практике) вариациях параметров.

Для рассматриваемых нами объектов, математические модели которых являются системами алгебраических уравнений, эта проблема, как мы увидим далее, имеет простое решение;

- для объектов, математической моделью которых являются системы обыкновенных дифференциальных уравнений, та же проблема решается гораздо сложней, поскольку существуют весьма опасные "особые" объекты, которые имеют некорректные решения, но это их опасное свойство не всегда может быть обнаружено традиционными методами, не учитывающими возможности изменения корректности решения (как и других его свойств) при эквивалентных (равносильных) преобразованиях уравнений. Эта проблема была ранее рассмотрена в [2];
- выделение так называемых *плохо обусловленных* систем, в которых "малым" вариациям коэффициентов соответствуют "большие" изменения решений. Слова "малые" и "большие" в этом определении плохо обусловленных систем не случайно взяты в кавычки. Эти кавычки подчеркивают, что данное определение не является полным и точным. В каждой конкретной задаче на основе анализа ее физического смысла надо дополнительно установить — какую именно вариацию того или иного коэффициента следует считать "малой", имеющей смысл (или даже неизбежной) для данной задачи, и какие именно изменения решений следует считать "большими", ведущими к недопустимым изменениям характеристик исследуемого объекта. Только после этого определение "плохо обусловленной" системы получает точный и определенный смысл. Но и не точное, не полное (а как бы "описательное") определение плохо обусловленной системы в ряде случаев полезно;
- получение количественных оценок, связывающих величины вариаций коэффициентов и параметров, интервалы их возможных значений, с величинами изменений решений, порожденных этими вариациями, с величиной интервала возможных значений решений. Это — важная проблема; решение ее было бы очень и очень полезно для практических приложений. Однако даже для систем линейных алгебраических уравнений эта проблема пока до самого последнего времени не имела решения. Известны — и широко используются — более скромные

результаты, когда для исследуемых изменений решений при вариациях коэффициентов даются лишь их "оценки сверху", оценки в виде неравенств.

Эти оценки в ходе дальнейшего изложения мы подробно рассмотрим. Будут также предложены новые оценки, в том числе — точные оценки наибольших возможных вариаций каждой из составляющих решения, каждой из составляющих вектора X.

Мы перечислили проблемы "Математики-2", особенно существенные для рассматриваемых в данном учебном пособии математических моделей в виде систем линейных алгебраических уравнений. Для других математических моделей возникают свои проблемы.

Так, например, для объектов, поведение которых описывается системами дифференциальных уравнений, важнейшей проблемой является анализ сохранения динамической устойчивости при тех или иных вариациях коэффициентов и параметров. Эта проблема была ранее рассмотрена в [2].

Свои проблемы возникают для объектов, описываемых интегральными уравнениями (они рассмотрены в [8]) и т. д.

Еще раз отметим, что помимо вариаций коэффициентов и параметров на погрешность решения могут влиять, например, ошибки округления при численном решении. В сложных задачах количество вычислительных операций достигает значительных величин, и неизбежные ошибки округления при вычислениях могут существенно влиять на точность решения — для восстановления точности используют, как известно, итерационные методы решения, но и они, — поскольку в реальных вычислениях число итераций конечно — не свободны от погрешности. Впрочем, погрешности вычислительных методов могут быть уменьшены: за счет увеличения числа значащих цифр, за счет увеличения числа итераций и т. п. Теоретически — разумеется, за счет увеличения объема вычислений, — погрешности вычислительных методов могут быть сделаны сколь угодно малыми.

Однако в настоящем учебном пособии — подчеркнем это еще раз — исследуется совсем другая проблема — проблема оценки неизбежной погрешности решения, происходящей от вариаций коэффициентов и параметров. Эта погрешность не может быть уменьшена за счет усовершенствования вычислительных методов. Если известны вариации коэффициентов, если известны интервалы, внутри которых находятся истинные, неизвестные нам значения коэффициентов, если эти интервалы заданы, например, в форме неравенств:

$$a_{ij}(1-\varepsilon_{ij}) \le \overline{a}_{ij} \le a_{ij}(1+\varepsilon_{ij}),$$

где $\overline{a}_{ij}$ — истинное значение, а a_{ij} — значение, принятое при расчете, то можно оценить интервалы, внутри которых находятся составляющие вектора решений, но нельзя эти интервалы уменьшить. Правильная оценка интервалов, внутри которых находятся решения, является важнейшей составляющей надежности всех технических расчетов, и в последующих параграфах будет показано, какими методами можно вычислить эти интервалы и обеспечить надежность расчета.

Само вычисление решения полезно начинать с оценки его неизбежной погрешности. Если, например, из-за вариаций коэффициентов и параметров погрешность не может быть меньше, чем ±0,01, то бесполезно использовать сложные вычислительные методы, обеспечивающие точность вычисления решения до ±0,001, и следует применить методы более простые.

Отметим, что вариации параметров исследуемого объекта и зависящие от них вариации коэффициентов математической модели могут происходить по разным причинам:

- при изготовлении объекта невозможно идеально точно выполнить проектные размеры конструкции;
- свойства материалов, из которых конструкция изготовлена, имеют неизбежный разброс;
- в ходе эксплуатации из-за износа все параметры объекта и их свойства неизбежно изменяются;
- внешние нагрузки на объект могут отличаться от расчетных и т. п.

Мы будем рассматривать вариации коэффициентов и параметров, происходящие от всех этих причин.

§ 4. Вычисление решений через обратные матрицы; "числа обусловленности" решений

Решение систем линейных уравнений излагают чаще всего на языке векторов и матриц. Основную систему уравнений (1) записывают в векторно-матричной форме, и она принимает вид:

$$AX = B, \tag{13}$$

где $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$ — матрица коэффициентов, которая является квадратной матрицей и имеет размер $n \times n$; X — это решение системы, т. е. вектор-столбец чисел x_1; x_2; ...; x_n, которые мы — как уже оговаривалось — для краткости будем называть решениями; B — вектор-столбец коэффициентов правой части, коэффициентов b_1; b_2; ...; b_n.

При вычислении составляющих вектора X и анализе изменений решений при вариациях коэффициентов используются такие понятия, как обратная матрица и нормы матрицы.

Обратная матрица обозначается символом A^{-1} и ее определением служит равенство:

$$A \cdot A^{-1} = E\,, \tag{14}$$

где E — единичная матрица,

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & ... & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{15}$$

т. е. в единичной матрице на главной диагонали стоят единицы, а все остальные элементы — нули.

Из равенства (14) выводится формула для элементов обратной матрицы:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{D} & \frac{A_{21}}{D} & \dots & \frac{A_{n1}}{D} \\ \frac{A_{12}}{D} & \frac{A_{22}}{D} & \dots & \frac{A_{n2}}{D} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{A_{1n}}{D} & \frac{A_{2n}}{D} & \dots & \frac{A_{nn}}{D} \end{pmatrix}, \tag{16}$$

где A_{ij} — алгебраические дополнения элементов a_{ij} матрицы A, а D — определитель матрицы, т. е.

$$D = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}. \tag{17}$$

Таким образом, элементами обратной матрицы являются алгебраические дополнения элементов исходной матрицы, деленные на ее определитель. Его можно вынести за знак матрицы и получить более удобную формулу:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}. \tag{18}$$

Обратная матрица может быть использована для вычисления решений системы по формуле:

$$X = A^{-1} B. \tag{19}$$

Поскольку вычисление обратной матрицы трудоемко, для отыскания решений чаще используют метод последовательного исключения переменных (метод Гаусса) или итерационные методы. Однако формула (19) широко используется в теоретических исследованиях.

Для матрицы второго порядка, размера 2 × 2:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \tag{20}$$

обратной будет матрица:

$$A^{-1} = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \cdot \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}, \tag{21}$$

т. е. элементы главной диагонали исходной матрицы A переставляются, элементы второй диагонали меняют знаки на противоположные, а затем все делится на $\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

Для матрицы размера 3 × 3:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \tag{22}$$

обратной будет матрица:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \end{pmatrix}. \tag{23}$$

Пример № 3: для матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ с определителем $\det A = 6$ обратной будет матрица:

$$A^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -1 & -1 & +3 \\ +2 & -7 & +3 \\ -1 & +5 & -3 \end{pmatrix}.$$

Важным понятием является понятие *нормы* вектора и матрицы. Наиболее часто используется *евклидова*, или сферическая норма.

Для вектора B евклидова норма:

$$\|B\| = \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2}\,. \qquad (24)$$

Для матрицы A евклидова норма:

$$\|A\| = \sqrt{\sum_{i=1;\, j=1}^{n} a_{ij}^2}\,. \qquad (25)$$

Используются и другие нормы. Так, например, *кубическая* норма вектора (следуем терминологии учебника [3]) определяется равенством:

$$\|B\|_{куб} = \max_i |b_i|, \qquad (26)$$

а его *октаэдрическая* норма — равенством:

$$\|B\|_{окт} = \sum_{i=1}^{n} |b_i|\,. \qquad (27)$$

Примечание

Следует особо отметить, что обозначения матриц и их норм еще не окончательно установились, и в разных книгах можно встретить различные обозначения. Еще раз напомним, что матрицу мы обозначаем вертикальными чертами с закруглением сверху и снизу (формулы (15), (16) и далее), определитель матрицы обозначается знаком det (формула (17), но при использовании формул Крамера используются также обозначения D и D_i — (формула (6)), норма матрицы обозначается двойными вертикальными чертами слева и справа. В названиях евклидовой, кубической и октаэдрической норм (формулы (24)–(27)) мы следуем учебнику [3].

Свойства евклидовой нормы:

$$\|AX\| \le \|A\| \cdot \|X\|, \tag{28}$$

т. е. норма произведения не больше произведения норм.

Аналогично:

$$\|A + X\| \le \|A\| + \|X\|, \tag{29}$$

т. е. норма суммы не больше суммы норм слагаемых. Из свойства (28) следует:

$$\|A\| \cdot \|A^{-1}\| \ge \|E\| = 1. \tag{30}$$

Рассмотрим теперь систему уравнений (13) и предположим, что коэффициенты правой части изменились, и вместо вектора B мы имеем дело с вектором $B + \Delta B$. В результате изменения правой части изменится и решение: вместо вектора решения X появится вектор $X + \Delta X$, и вместо равенства (13) будет иметь место равенство:

$$A(X + \Delta X) = B + \Delta B, \tag{31}$$

или — что то же самое:

$$AX + A\Delta X = B + \Delta B. \tag{32}$$

Вычитая из (32) равенство (13), получим:

$$A\Delta X = \Delta B,$$

откуда следует:

$$\Delta X = A^{-1}\Delta B. \tag{33}$$