

К.Б. Сабитов

К теории уравнений смешанного типа



**МОСКВА
ФИЗМАТЛИТ®
2014**

УДК 517.95
ББК 22.161
С 12

Сабитов К.Б. **К теории уравнений смешанного типа.** — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2014. — 304 с. — ISBN 978-5-9221-1561-2.

Монография посвящена изучению качественных и спектральных свойств решений уравнений и систем уравнений смешанного типа, в частности уравнения Чаплыгина, моделирующего плоскопараллельные околосзвуковые течения. Представленные результаты имеют целью дальнейшую разработку метода принципа максимума, альтернирующего метода типа Шварца, метода вспомогательных функций и метода спектральных разложений, которые используются при исследовании краевых задач Трикоми, Франкля, обобщенной задачи Трикоми и других (в важных классах уравнений смешанного типа), а также для решения проблем, оставшихся открытыми с 50–60-х годов XX столетия.

Для научных сотрудников в области дифференциальных уравнений, преподавателей, аспирантов и студентов старших курсов вузов.

Рецензенты:

кафедра функционального анализа и его применений
факультета ВМиК МГУ им. М.В. Ломоносова,
(зав. кафедрой д.ф.-м.н., профессор, академик РАН *Е.И. Мусеев*);
зав. кафедрой математического анализа
НИУ «БелГУ» д.ф.-м.н., профессор *А.П. Солдатов*

Издание печатается по решению Ученых советов Института прикладных исследований Академии наук Республики Башкортостан и Самарского государственного архитектурно-строительного университета при финансовой поддержке ФФИАНРБ и СГАСУ.

ISBN 978-5-9221-1561-2

© ФИЗМАТЛИТ, 2014
© К. Б. Сабитов, 2014

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	6
Глава 1. Принцип максимума для уравнений смешанного типа и его применения	27
§ 1.1. Краткий обзор известных результатов	27
§ 1.2. Принцип максимума для уравнений гиперболического типа	29
1.2.1. Принцип максимума в классе регулярных решений (29).	
1.2.2. Принцип максимума в классе обобщенных решений (33).	
1.2.3. Принцип максимума в произвольной области (35). 1.2.4. Существенность условий (36).	
§ 1.3. Принципы максимума для уравнений смешанного типа	37
1.3.1. Уравнения смешанного типа с гладкой линией изменения типа (37).	
1.3.2. Уравнения смешанного типа с негладкой линией изменения типа (42).	
1.3.3. Уравнения смешанного параболого-гиперболического типа (43).	
§ 1.4. К вопросу о единственности решения задачи Трикоми для конкретных уравнений смешанного типа	46
§ 1.5. К вопросу о существовании решения задачи Трикоми	58
§ 1.6. Принцип максимума для многомерного уравнения смешанного типа в классе его осесимметрических решений	65
1.6.1. Единственность решения задачи Т (66). 1.6.2. Существование решения задачи Т (71).	
Глава 2. Спектральные свойства решения задачи Трикоми.	72
§ 2.1. Построение в явном виде решений задач Дарбу для телеграфного уравнения.	73
§ 2.2. Формулы взаимосвязи между решениями задач Дарбу и Коши для телеграфного уравнения	81
2.2.1. Интегралы от произведения бесселевых функций (81).	
2.2.2. Обращение некоторых интегральных уравнений (83).	
§ 2.3. Об одном интегральном представлении решений телеграфного уравнения и уравнения Лаврентьева–Бицадзе с комплексным параметром	89
§ 2.4. О спектральном влиянии гиперболической части уравнений смешанного типа на корректность задачи Трикоми.	94
§ 2.5. О расположении спектра задачи Трикоми.	103
2.5.1. Теоремы единственности решения задачи Трикоми для уравнения с оператором Лаврентьева–Бицадзе (104).	
2.5.2. Теоремы	

единственности решения задачи Трикоми для уравнения смешанного типа с произвольным степенным вырождением (114).	
§ 2.6. О базисности системы синусов и косинусов	123
§ 2.7. Построение собственных значений и функций спектральной задачи Трикоми. Исследование на полноту и базисность системы собственных функций	136
2.7.1. Задача на собственные значения для оператора Лаврентьева–Бицадзе (137). 2.7.2. Задача на собственные значения для обобщенного оператора Трикоми (145).	
§ 2.8. Построение решения задачи Трикоми методом спектральных разложений	154
2.8.1. Построение решения задачи Трикоми для уравнения с оператором Лаврентьева–Бицадзе (154). 2.8.2. Построение решения пространственной задачи Трикоми (158). 2.8.3. Построение решения задачи Трикоми для уравнения с оператором Геллерстедта (160).	
Глава 3. Принципы максимума для некоторых классов систем дифференциальных уравнений в частных производных и их применения	170
§ 3.1. Принципы максимума модуля решений эллиптических систем второго порядка	170
§ 3.2. Покомпонентный принцип экстремума для одного класса эллиптических систем	176
§ 3.3. Принцип максимума модуля решений одного класса гиперболических систем	182
§ 3.4. Покомпонентный принцип экстремума для одного класса гиперболических систем	186
§ 3.5. Принцип максимума модуля решений одного класса систем уравнений смешанного типа	190
§ 3.6. Покомпонентный принцип экстремума для одного класса систем уравнений смешанного типа	199
§ 3.7. О существовании решения задачи Трикоми для одного класса систем уравнений смешанного типа	205
Глава 4. К теории задачи Франкля для уравнений смешанного типа	211
§ 4.1. Постановка задачи. Краткий обзор известных результатов	211
§ 4.2. О единственности решения задачи Франкля	214
4.2.1. Единственность решения задачи Франкля для уравнения с оператором Чаплыгина (214). 4.2.2. Единственность решения задачи Франкля для уравнения Чаплыгина (217). 4.2.3. Единственность решения задачи Франкля для уравнения с оператором Геллерстедта (224). 4.2.4. Принцип максимума для аналога задачи Франкля (227).	
§ 4.3. К вопросу о существовании решения задачи Франкля методом интегральных уравнений	230
§ 4.4. Спектральная задача Франкля	232

4.4.1. Сведение задачи Φ_λ к эллиптической нелокальной задаче (232).	
4.4.2. Построение собственных значений и функций задачи Φ_λ (234).	
4.4.3. Изучение собственных функций задачи Φ_λ на полноту и базисность (238).	
§ 4.5. Построение решения задачи Франкля методом спектрального анализа	243
Глава 5. К проблеме обобщенной задачи Трикоми для уравнений смешанного типа	249
§ 5.1. Постановка задачи. Краткий обзор известных результатов	249
§ 5.2. О единственности решений обобщенной задачи Трикоми и задачи со смешанными граничными условиями	256
5.2.1. Единственность решения обобщенной задачи Трикоми (256).	
5.2.2. Единственность решения смешанной обобщенной задачи (261).	
§ 5.3. О единственности решения обобщенной задачи Трикоми в варианте Л.В. Овсянникова.	263
§ 5.4. Задача Трикоми для уравнения Чаплыгина.	269
§ 5.5. К вопросу о существовании решения обобщенной задачи Трикоми методом интегральных уравнений	271
§ 5.6. Построение решения обобщенной задачи Трикоми методом разделения переменных	275
Заключение	285
Список литературы	287

Введение

Теория краевых задач для уравнений смешанного типа в силу ее прикладной и теоретической значимости стала одним из важнейших разделов теории дифференциальных уравнений с частными производными.

Начало исследований краевых задач для уравнений смешанного типа было положено в известных работах Ф. Трикоми [210, 211] и С. Геллерстедта [240], где впервые ставились и изучались краевые задачи для модельных уравнений смешанного типа. Эти краевые задачи в настоящее время носят названия «Задача Трикоми», «Задача Геллерстедта».

Следующим этапом в развитии теории краевых задач для уравнений смешанного типа явились работы советских математиков М.А. Лаврентьева, Ф.И. Франкля, И.Н. Векуа, А.В. Бицадзе, К.И. Бабенко, Л.В. Овсянникова. В этих работах указывалось на актуальность проблем уравнений смешанного типа для трансзвуковой газовой динамики, магнитогидродинамических течений с переходом через скорость звука и скорость Альфена, течений жидкости в открытом русле, для теории бесконечно малых изгибов поверхностей, а также безмоментной теории оболочек с кривизной переменного знака. В последние годы на важность уравнений смешанного типа указано в работах А.Д. Пиля и В.И. Фёдорова [159], Г.Г. Чёрного [225], Э.Г. Шифрина [226], Дж. Коула, Л. Кука [95], А.Г. Кузьмина [105] в связи с проблемами теории сопел Лавалья, теории плазмы и другими вопросами механики.

В 50-е годы в работах Ф.И. Франкля, А.В. Бицадзе, К.И. Бабенко было положено начало современной теории уравнений смешанного типа. В этих работах наряду с задачами Трикоми и Геллерстедта были поставлены и изучены новые краевые задачи для уравнений смешанного типа.

В дальнейшем эти краевые задачи изучались многими авторами как в СССР, так и за рубежом. К середине 70-х годов в советской и зарубежной печати было опубликовано несколько сотен статей, посвященных уравнениям смешанного типа. Основные результаты этих работ и соответствующая им библиография приведены в монографиях А.В. Бицадзе [22, 23], Л. Берса [11], К.Г. Гудерлея [44], М.М. Смирнова [201, 202], М.С. Салахитдинова [195], Т.Д. Джураева [51, 52]. Американский математик М. Проттер [259], характеризующий состояние теории уравнений смешанного типа к этому моменту, отметил: «Вероятно, все эти отрывочные результаты в дальнейшем будут собраны в виде единой всесторонней теории уравнений смешанного типа в $\mathbb{R}^2$ подобно классической теории для эллиптических, гиперболических и параболических уравнений. В данное время такая задача представляется весьма трудной; распространение теории на случай

трех и более измерений и на уравнения более высокого порядка, чем второй, является делом еще более отдаленного будущего».

Член-корреспондент АН СССР А.В.Бицадзе на руководимых им семинарах при МИАН неоднократно отмечал, что основные проблемы уравнений смешанного типа 50-х и 60-х годов, связанные с вопросами существования и единственности решения задачи Трикоми для общих уравнений смешанного типа, единственности решений задачи Франкля и обобщенной задачи Трикоми без каких-либо ограничений геометрического характера на эллиптическую часть границы области, до сих пор еще не решены. Эти проблемы указаны в монографиях [11, 22].

Однако появившиеся в 80-е годы работы показали, что перспективы развития теории уравнений смешанного типа можно оценивать более оптимистично. Усилиями многих авторов получены важные результаты, которые можно оценить как значительные шаги на пути разработки общей теории уравнений смешанного типа. Часть этих результатов изложена в монографиях А.В.Бицадзе [23], В.Н.Врагова [41], Е.И.Моисеева [139], А.Г.Кузьмина [105], М.С.Салахитдинова и А.К.Уринова [196, 197], А.М.Нахушева [154], в обзорной работе Д.К.Гвазова [43], диссертациях Г.Д.Каратопраклиева [88], Т.В.Чекмарева [224], В.П.Диденко [57], М.Мередова [130], С.М.Пономарева [163], Т.Ш.Кальменова [77], Н.И.Попиванова [164], В.И.Жегалова [65], Б.А.Бубнова [25], А.И.Кожанова [93], О.А.Репина [171], Р.С.Хайруллина [220], Л.С.Пулькиной [169] и в статьях многих других авторов, на которые мы будем ссылаться ниже.

Основной задачей предлагаемой работы является изучение качественных и спектральных свойств решений уравнений и систем уравнений смешанного типа в целях дальнейшей разработки метода принципа максимума, альтернирующего метода типа Шварца, метода вспомогательных функций и метода спектральных разложений для изучения краевых задач Трикоми, Франкля, обобщенной задачи Трикоми и других для важных классов уравнений смешанного типа и решения проблем, указанных в монографиях [11, 22, 156].

Далее перейдем к изложению основного содержания монографии, которая состоит из пяти глав, разбитых на 32 параграфа. При этом принята тройная нумерация формул, определений, теорем, лемм, замечаний и рисунков. Например, формула (4.3.1) означает первую формулу третьего параграфа четвертой главы.

Глава 1. В этой главе установлены принципы максимума для общего уравнения смешанного типа в классе его регулярных и обобщенных решений в областях гиперболичности, эллиптичности и (в целом) в смешанной области при более слабых условиях на коэффициенты изучаемого уравнения и класс решений. На основе этих результатов установлены также принципы максимума и для других классов уравнений смешанного типа. Здесь, по существу, построена некая теория экстремальных свойств решений уравнений смешанного типа

на плоскости, из которой следуют ранее известные результаты и ряд нерешенных вопросов по теории задачи Трикоми и других аналогичных краевых задач.

В §1.1 для уравнения смешанного типа

$$Lu \equiv K(y)u_{xx} + u_{yy} + A(x, y)u_x + B(x, y)u_y + C(x, y)u = F(x, y), \quad (0.1)$$

где $yK(y) > 0$ при $y \neq 0$, в области D , ограниченной простой кривой Жордана Γ , лежащей в полуплоскости $y > 0$ с концами $A = (0, 0)$ и $B = (l, 0)$, $l > 0$, и характеристиками AC и CB уравнения (0.1) при $y < 0$, ставится задача Трикоми (задача Т).

Задача Т. Найти функцию $u(x, y)$, удовлетворяющую условиям:

$$u(x, y) \in C(\overline{D}) \cap C^1(D) \cap C^2(D_+ \cup D_-); \quad (0.2)$$

$$Lu(x, y) \equiv F(x, y), (x, y) \in D_+ \cup D_-; \quad (0.3)$$

$$u(x, y) = \varphi(x, y), (x, y) \in \Gamma; \quad (0.4)$$

$$u(x, y) = \psi(x, y), (x, y) \in AC, \quad (0.5)$$

где φ и ψ — заданные достаточно гладкие функции, $\varphi(A) = \psi(A)$, $D_+ = D \cup \{y > 0\}$, $D_- = D \cup \{y < 0\}$.

При исследовании задачи Т и других аналогичных краевых задач важную роль играет принцип экстремума, установленный впервые в 1950 году А.В. Бицадзе для уравнения Лаврентьева. Далее в этом параграфе приведен краткий обзор работ, посвященных принципу экстремума для уравнений смешанного типа, и указаны причины интереса к доказательству справедливости принципа экстремума.

В §1.2 для уравнения гиперболического типа

$$L_0(u) \equiv u_{\xi\xi} + a(\xi, \eta)u_\xi + b(\xi, \eta)u_\eta + C(\xi, \eta)u = f(\xi, \eta), \quad (0.6)$$

заданного в характеристическом треугольнике Δ , ограниченном отрезками A_0B_0 , A_0C_0 и C_0B_0 , где $A_0 = (0, 0)$, $B_0 = (l, l)$, $C_0 = (0, l)$, изучены экстремальные свойства его решений.

Пусть $\alpha = a\beta$, $\beta = \exp \int b d\xi$, функции a , a_ξ , b и c непрерывны в $\Delta \cup A_0C_0$ и при $(\xi, \eta) \in \Delta$ удовлетворяют одному из следующих условий:

$$\begin{cases} h = a_\xi + ab - c \geq 0, \\ \alpha(0, \eta) + \int_0^\xi \beta(t, \eta)c(t, \eta) dt > 0; \end{cases} \quad (A_1)$$

$$\alpha(\xi, \eta) - \int_0^\xi \beta(t, \eta)|h(t, \eta)| dt > 0. \quad (A_2)$$

Предполагается, что правая часть $f(\xi, \eta)$ интегрируема по ξ на каждом отрезке $[0, \xi_0]$ характеристики $\eta = \eta_0$, $0 < \xi_0 < \eta_0 < l$.

Определение 1.2.1. Регулярным в области Δ решением уравнения (0.6) назовем функцию $u(\xi, \eta)$, удовлетворяющую условиям: 1) $u \in C(\overline{\Delta}) \cap C^1(\Delta)$, $u_{\xi\eta} \in C(\Delta)$, $L_0 u \equiv f$ в Δ ; 2) производная u_η непрерывна на $\Delta \cup A_0 C_0$.

Теорема 1.2.1. Пусть: 1) коэффициенты уравнения (0.6) обладают отмеченной выше гладкостью и удовлетворяют условию (A_1) ; 2) $f(\xi, \eta) \leq 0$ (≥ 0) в Δ ; 3) $u(\xi, \eta)$ — регулярное в Δ решение уравнения (0.6), равное нулю на характеристике $A_0 C_0$. Тогда если $\max_{\overline{\Delta}} u(\xi, \eta) > 0$ ($\min_{\overline{\Delta}} u < 0$), то $\max_{\overline{\Delta}} u$ ($\min_{\overline{\Delta}} u$) достигается на отрезке $A_0 B_0$.

Теорема 1.2.2. Пусть: 1) коэффициенты уравнения (0.6) в области Δ обладают отмеченной выше гладкостью и удовлетворяют условию (A_2) ; 2) $f(\xi, \eta) \equiv 0$ в Δ ; 3) $u(\xi, \eta)$ — регулярное в Δ решение уравнения (0.6), равное нулю на характеристике $A_0 C_0$. Тогда если $\max_{\overline{\Delta}} |u(\xi, \eta)| > 0$, то этот максимум достигается на $A_0 B_0$.

Определение 1.2.2. Обобщенным в области Δ решением уравнения (0.6) назовем функцию $u(\xi, \eta)$, если существует последовательность регулярных в Δ решений $\{u_n(\xi, \eta)\}$ уравнения (0.6), равномерно сходящаяся к $u(\xi, \eta)$ в Δ .

Теорема 1.2.3. Пусть выполнены условия 1) и 2) теоремы 1.2.1 и $u(\xi, \eta)$ — обобщенное в Δ решение уравнения (0.6), равное нулю на характеристике $A_0 C_0$. Тогда если $\max_{\overline{\Delta}} u > 0$ ($\min_{\overline{\Delta}} u < 0$), то $\max_{\overline{\Delta}} u$ ($\min_{\overline{\Delta}} u$) достигается на $A_0 B_0$.

Теорема 1.2.4. Пусть выполнены условия 1) и 2) теоремы 1.2.2 и $u(\xi, \eta)$ — обобщенное в Δ решение уравнения (0.6), равное нулю на $A_0 C_0$. Тогда если $\max_{\overline{\Delta}} |u(\xi, \eta)| > 0$, то этот максимум достигается на отрезке $A_0 B_0$.

Следствие 1.2.1. Пусть: 1) коэффициенты уравнения (0.6) в области Δ удовлетворяют условию (A_1) ; 2) $f(\xi, \eta) \geq 0$ (≤ 0) в Δ ; 3) $u(\xi, \eta)$ — обобщенное в Δ решение уравнения (0.6), равное нулю на $A_0 C_0$. Тогда если $u \geq 0$ (≤ 0) на отрезке $A_0 B_0$, то $u \geq 0$ (≤ 0) в Δ .

В §1.3 установлены экстремальные свойства решений уравнения (0.1) в области D .

Определение 1.3.1. Регулярным в области D решением уравнения (0.1) назовем функцию $u(x, y)$, удовлетворяющую условиям (0.2) и (0.3), если (кроме того) производная $u_\eta \in C(\Delta \cup A_0 C_0)$.

Теорема 1.3.1. Пусть: 1) коэффициенты уравнения (0.1) в области D_+ ограничены и $C(x, y) \leq 0$; 2) коэффициенты уравнения (0.1) в области D_- в характеристических координатах (ξ, η) удовлетворяют условиям теоремы 1.2.1; 3) $F(x, y) \geq 0$ (≤ 0) на $D_+ \cup D_-$; 4) $u(x, y)$ — регулярное в D решение уравнения (0.1), равное нулю на характеристике AC . Тогда если $\max_{\overline{D}} u > 0$ ($\min_{\overline{D}} u < 0$), то $\max_{\overline{D}} u$ ($\min_{\overline{D}} u$) достигается на кривой $\overline{\Gamma}$.

Теорема 1.3.2. Пусть: 1) коэффициенты уравнения (0.1) в области D_+ ограничены и $C(x, y) \leq 0$; 2) коэффициенты уравнения (0.1) в области D_- в характеристических координатах (ξ, η) удовлетворяют условиям теоремы 1.2.2; 3) $F(x, y) \equiv 0$; 4) $u(x, y)$ — регулярное в D решение уравнения (0.1), равное нулю на AC . Тогда если $\max_{\overline{D}} |u(x, y)| > 0$, то этот максимум достигается на дуге $\overline{\Gamma}$.

Определение 1.3.2. Обобщенным в области D решением уравнения (0.1) будем называть функцию $u(x, y)$, если существует последовательность регулярных в области D решений $\{u_n(x, y)\}$ уравнения (0.1), равномерно сходящаяся к $u(x, y)$ в замкнутой области $\overline{D}$.

Теоремы 1.3.1 и 1.3.2 переносятся в класс обобщенных в D решений уравнения (0.1).

Следствие 1.3.4. Пусть: 1) коэффициенты уравнения (0.1) удовлетворяют условиям 1) и 2) теоремы 1.3.1; 2) $F(x, y) \leq 0$ (≥ 0) на множестве $D_+ \cup D_-$; 3) $u(x, y)$ — обобщенное в области D решение уравнения (0.1), равное нулю на AC . Тогда если $u \geq 0$ (≤ 0) на $\overline{\Gamma}$, то $u \geq 0$ (≤ 0) в $\overline{D}$.

Эти результаты далее переносятся на уравнения смешанного типа с двумя перпендикулярными линиями изменения типа

$$K(y)u_{xx} + N(x)u_{yy} + A(x, y)u_x + B(x, y)u_y + C(x, y)u = F(x, y),$$

где $yK(y) > 0$ при $y \neq 0$, $xN(x) > 0$ при $x \neq 0$, и на уравнения смешанного парабола-гиперболического типа

$$L_1(u) \equiv \begin{cases} u_{xx} + A(x, y)u_x + B(x, y)u_y + C(x, y)u = \\ = F(x, y), & y > 0, \\ K(y)u_{xx} + u_{yy} + A(x, y)u_x + B(x, y)u_y + C(x, y)u = \\ = F(x, y), & y < 0; \end{cases}$$

здесь $K(y) < 0$ при $y < 0$, $B(x, y) < 0$ при $y \geq 0$;

$$L_2(u) \equiv \begin{cases} u_{yy} + A(x, y)u_x + B(x, y)u_y + C(x, y)u = \\ = F(x, y), & y > 0, \\ K(y)u_{xx} + u_{yy} + A(x, y)u_x + B(x, y)u_y + C(x, y)u = \\ = F(x, y), & y < 0, \end{cases}$$

где $A(x, y) < 0$ при $y \geq 0$.

В § 1.4 приведены примеры уравнений смешанного типа, для которых справедливы принципы максимума, установленные в § 1.3, и показаны применения для получения теорем единственности решения задачи Т для уравнений смешанного типа со спектральным действительным параметром. Здесь только перечислим эти уравнения:

$$(\operatorname{sgn} y)|y|^n u_{xx} + u_{yy} + a_0|y|^{\frac{n-1}{2}} u_x = F(x, y), \quad n > 0, \quad a_0 < \frac{n}{2};$$

$$y u_{xx} + u_{yy} + C(x, y)u = F(x, y);$$

$$(\operatorname{sgn} y)|y|^n u_{xx} + (\operatorname{sgn} x)|x|^m u_{yy} = F(x, y), \quad n, m \geq 0;$$

$$(\operatorname{sgn} y)|y|^n u_{xx} + x^m u_{yy} = F(x, y), \quad n > 0, \quad m \geq -\frac{n}{n+1};$$

$$u_{xx} + (\operatorname{sgn} y)u_{yy} + \frac{k}{x} u_x = F(x, y), \quad k > 0;$$

$$(\operatorname{sgn} y)u_{xx} + u_{yy} - \lambda u = F(x, y), \quad \lambda > -\lambda_0^2;$$

$$u_{xx} + (\operatorname{sgn} y)u_{yy} - \lambda u = F(x, y), \quad \lambda > -\lambda_0^2;$$

$$\begin{cases} u_{yy} + A(x, y)u_x + B(x, y)u_y + C(x, y)u = 0, & y > 0, \\ -u_{xx} + u_{yy} + A(x, y)u_x + B(x, y)u_y + C(x, y)u = 0, & y < 0. \end{cases}$$

В § 1.5 изучается задача (0.2)–(0.5) для уравнения (0.1) при $K(y) = (\operatorname{sgn} y)|y|^n$, $n \geq 0$, $F(x, y) \equiv 0$. Пусть Γ — кривая из класса Ляпунова, $x = x(s)$, $y = y(s)$ — параметрические уравнения этой кривой, $0 \leq s \leq S$, S — длина кривой Γ , $\varphi(s) = \varphi(x(s), y(s))$. Доказана теорема.

Теорема 1.5.1. Пусть в области D при условии, когда кривая Γ оканчивается в точках A и B сколь угодно малыми дугами «нормальной» кривой, существует регулярное решение задачи Т для уравнения (0.1). Тогда если функция $\varphi(s)$ непрерывна на $[0, S]$ и $\psi(x)$ — достаточно гладкая (т.е. функция $\psi(x)$ такова, что при достаточно гладкой функции $\varphi(s)$ выполнено условие теоремы 1.5.1) на $[0, l/2]$, $\psi(0) = \varphi(0) = \varphi(S) = 0$, то существует единственное обобщенное решение $u(x, y)$ задачи Т с граничными данными $u = \varphi$ на Γ и $u = \psi$ на AC при произвольном подходе кривой Γ к оси $y = 0$, за исключением случаев касания.

В § 1.6 для многомерного уравнения смешанного типа

$$\sum_{i=1}^n u_{x_i x_i} + (\operatorname{sgn} z)u_{zz} + \frac{2p}{|z|} u_z = 0,$$

где $n \geq 2$, $0 \leq 2p < 1$, в области $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$, полученной вращением вокруг оси z плоской области из плоскости (x_1, z) , в классе его осесимметрических решений установлен принцип максимума. Показано применение этого результата при исследовании пространственного аналога задачи Трикоми.

Глава 2. Во второй главе изучены спектральные свойства решений задачи Т для уравнений смешанного парабола-гиперболического и эллиптико-гиперболического типов.

В §§ 2.1, 2.2 предварительно получены интегральные представления решений краевых задач Дарбу и формулы взаимосвязи между решениями задач Дарбу и Коши для неоднородного телеграфного уравнения.

В § 2.3 доказана следующая теорема.

Теорема 2.3.2. Если функция $u_0(x, y)$ в области D (см. § 1.1) является регулярным решением уравнения Лаврентьева–Бицадзе,

$$u_{0xx} + (\operatorname{sgn} y)u_{0yy} = 0, \quad u_0(0, 0) = 0,$$

то функция

$$u(x, y) = u_0(x, y) - \int_0^1 u_0(xt, yt) \frac{\partial}{\partial t} J_0 \left[\sqrt{\lambda(x^2 + (\operatorname{sgn} y)y^2(1-t))} \right] dt \quad (0.7)$$

является в области D регулярным решением уравнения

$$u_{xx} + (\operatorname{sgn} y)u_{yy} + \lambda u = 0; \quad (0.8)$$

при этом область D_+ предполагается звездной относительно начала координат.

Показано применение формулы (0.7) при исследовании задачи Трикоми для уравнения (0.8).

В § 2.4 исследуется задача Трикоми для уравнения

$$L_1 u \equiv \begin{cases} u_{xx} - u_y - \lambda_1 u = 0, & y > 0, \\ -u_{xx} + u_{yy} - \lambda_2 u = 0, & y < 0, \end{cases} \quad (0.9)$$

где λ_1 и λ_2 — вещественные параметры, в области Ω , ограниченной отрезками AC ($x + y = 0$), CB ($x - y = l$), BB_1 ($x = l$), B_1A_1 ($y = d > 0$) и A_1A ($x = 0$).

Задача Т. Найти функцию $u(x, y)$, удовлетворяющую условиям:

$$u(x, y) \in C(\overline{\Omega}) \cap C^1(\Omega) \cap C_{x,y}^{2,1}(\Omega_+ \cup A_1B_1) \cap C^2(\Omega_-); \quad (0.10)$$

$$L_1 u \equiv 0, \quad (x, y) \in \Omega_- \cup \Omega_+ \cup A_1B_1; \quad (0.11)$$

$$u(x, y) = \varphi(x, y), \quad (x, y) \in CA \cup AA_1 \cup BB_1, \quad (0.12)$$

где φ — заданная достаточно гладкая функция.

Теорема 2.4.1. Пусть $u(x, y)$ — решение однородной задачи (0.10)–(0.12) (где $\varphi(x, y) \equiv 0$) из класса регулярных¹⁾ в Ω решений уравнения (0.9), удовлетворяющее условию

$$\lim_{x \rightarrow 0+0} u(x, 0)u_x(x, 0) = \lim_{x \rightarrow l-0} u(x, 0)u_x(x, 0) = 0.$$

Тогда $u(x, y) \equiv 0$ в Ω при всех $\lambda_2 \geq 0$ и $\lambda_1 > -\left(\frac{\pi}{l}\right)^2$.

Теорема 2.4.2. Пусть выполнены условия теоремы 2.4.1. Тогда $u(x, y) \equiv 0$ в Ω при всех $\lambda_2 < 0$ и $\lambda_1 > -\lambda_2 - \left(\frac{\pi}{l}\right)^2$. В случае $\lambda_2 = 0$ и $\lambda_1 = -\frac{1}{4} - \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2$, $n \in \mathbb{N}$, однородная задача (0.10)–(0.12) (где $\varphi(x, y) \equiv 0$) имеет собственные функции.

Теорема 2.4.3. Однородная задача (0.10)–(0.12) (где $\varphi(x, y) \equiv 0$) при $\lambda_2 < 0$ и $\lambda_1 + \lambda_2 \leq -\left(\frac{\pi}{l}\right)^2$ имеет неотрицательную собственную функцию, которой соответствует положительное собственное значение $\frac{1}{\mu_0}$. Это собственное значение простое и строго меньше абсолютной величины остальных собственных значений.

Из этих теорем следует, что если даже $\lambda_1 \geq 0$, что в области параболичности гарантирует выполнение принципа экстремума для уравнения (0.9), то найдется такое значение $\lambda_2 < 0$, при котором однородная задача Т для уравнения (0.9) имеет ненулевое неотрицательное решение.

В §§ 2.5–2.8 исследуется спектральная задача Трикоми (задача T_λ) для оператора Лаврентьева–Бицадзе и обобщенного оператора Трикоми или Геллерстедта, в т. ч. вопросы расположения спектра этой задачи на комплексной плоскости (λ). В случае, когда область эллиптичности является сектором с центром в точке $A(0, 0)$, найдены собственные значения и построена соответствующая система собственных функций задачи T_λ , которая исследована на полноту и базисность, и показано их применение при построении решения задачи Трикоми в виде суммы биортогонального ряда.

Рассмотрим уравнение (0.1) при $K(y) = (\operatorname{sgn} y)|y|^n$, $A(x, y) = B(x, y) = F(x, y) \equiv 0$, $C(x, y) = \lambda K(y)$, т. е. уравнение вида

$$Lu = (\operatorname{sgn} y)|y|^n u_{xx} + u_{yy} - \lambda (\operatorname{sgn} y)|y|^n u = 0, \quad (0.13)$$

где $n = \operatorname{const} \geq 0$,

$$\lambda = \mu^2 = \begin{cases} \lambda_1 = \mu_1^2, & y > 0, \\ \lambda_2 = \mu_2^2, & y < 0, \end{cases}$$

¹⁾ См. определение 2.4.1 § 2.4 главы 2.

λ_1 и λ_2 — заданные числовые, вообще говоря, комплексные параметры в области D (см. § 1.1), ограниченной гладкой кривой Γ , лежащей в полуплоскости $y > 0$ с концами в точках $A(0, 0)$ и $B(l, 0)$, $l > 0$, а при $y < 0$ характеристиками

$$AC: x - \frac{2}{n+2}(-y)^{\frac{n+2}{2}} = 0, \quad CB: x + \frac{2}{n+2}(-y)^{\frac{n+2}{2}} = l$$

уравнения (0.13), и поставим задачу Т.

Задача Т. Найти функцию $u(x, y)$, удовлетворяющую следующим условиям:

$$u(x, y) \in C(\overline{D}) \cap C^1(D) \cap C^2(D_+ \cup D_-); \quad (0.14)$$

$$Lu(x, y) \equiv 0, \quad (x, y) \in D_+ \cup D_-; \quad (0.15)$$

$$u(x, y) = \varphi(x, y), \quad (x, y) \in \Gamma; \quad (0.16)$$

$$u(x, y) = \psi(x, y), \quad (x, y) \in AC. \quad (0.17)$$

В § 2.5 найдены условия относительно параметров λ_1 и λ_2 , при которых однородная задача (0.14)–(0.17) (где $\varphi(x, y) \equiv 0$, $\psi(x, y) \equiv 0$) имеет только нулевое решение.

Пусть в уравнении (0.13) $n = 0$. Тогда справедливы следующие утверждения.

Теорема 2.5.1. Если в классе регулярных в области D решений уравнения (0.13) существует решение задачи Т, т.е. задачи (0.14)–(0.17), то оно единственно при всех $\lambda_2 \geq 0$ и $\lambda_1 > -p = -4/9 \text{mes } D_+$, где $\text{mes } D_+$ — мера области D_+ .

Теорема 2.5.2. Если в классе регулярных в области D решений уравнения (0.13) существует решение задачи Т, то оно единственно при всех $\lambda_2 < 0$ и $\lambda_1 > -\lambda_2 - p$.

Пусть теперь λ_1 и λ_2 являются комплексными числами: $\lambda_1 = \lambda_{11} + i\lambda_{12}$, $\lambda_2 = \lambda_{21} + i\lambda_{22}$, $\mu_1 = \mu_{11} + i\mu_{12}$, $\mu_2 = \mu_{21} + i\mu_{22}$, $\lambda_{ij}, \mu_{ij} \in \mathbb{R}$, $i, j = 1, 2$.

Теорема 2.5.3. Если в классе регулярных в D решений уравнения (0.13) существует решение задачи Т, то оно единственно при всех λ_1 и λ_2 , удовлетворяющих неравенству

$$2\text{Re } \lambda_1 + \text{Re } \lambda_2 > |\lambda_2| - 2p.$$

Пусть теперь в уравнении (0.13) $n > 0$. В этом случае установлены следующие утверждения.

Теорема 2.5.4. Если в классе регулярных в области D решений уравнения (0.13) существует решение задачи T , то оно единственно при всех $\lambda_2 \geq 0$ и $\lambda_1 > -p_1 = -\frac{1}{C_{D_+}}$, где C_{D_+} — положительная постоянная, зависящая только от размеров области D_+ .

Теорема 2.5.5. Если в классе регулярных в области D решений уравнения (0.13) существует решение задачи T , то оно единственно при всех $\lambda_2 < 0$ и $\lambda_1 > -\lambda_2 - p_1$.

Теорема 2.5.6. Если в классе регулярных в D решений уравнения (0.13) существует решение задачи T , то оно единственно при всех комплексных λ_1 и λ_2 , удовлетворяющих неравенству

$$2\operatorname{Re} \lambda_1 + \operatorname{Re} \lambda_2 > |\lambda_2| - 2p_1.$$

В §2.6 исследуются на базисность системы $\left\{ \sin\left(n - \frac{\beta}{2}\right)\theta \right\}_{n=1}^{\infty}$, $\left\{ \cos\left(n - \frac{\beta}{2}\right)\theta \right\}_{n=1}^{\infty}$, $\left\{ \sin\left(n - \frac{\beta}{2}\right)\theta + \frac{\gamma}{2} \right\}_{n=1}^{\infty}$, где $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$, в пространстве $L_p[0, \pi]$ при всех $p > 1$. Установлены необходимые и достаточные относительно параметра β условия базисности этих систем в $L_p[0, \pi]$. Изучены вопросы разложения функции в биортогональный ряд и сходимости ряда в $L_p[0, \pi]$ и $C[0, \pi]$.

В §§2.7, 2.8 в случае, когда область эллиптичности является сектором с центром в точке $A(0, 0)$, найдены собственные значения λ_{nm} как нули функции Бесселя и построена соответствующая система собственных функций спектральной задачи T_λ (где $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$). Показано, что система собственных функций задачи T_λ полна и образует базис в $L_2(D_+)$, $L_2(D_-)$, но не полна в $L_2(D)$.

При $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \neq \lambda_{nm}$, где λ_{nm} — собственные значения задачи T_λ , на основании системы собственных функций решение задачи T построено в виде суммы ряда.

Глава 3. В этой главе получены утверждения, которые представляют собой дальнейшее развитие ранее доказанного А.В. Бицадзе принципа максимума модуля решений одной эллиптической системы для других классов систем дифференциальных уравнений в частных производных; установлены новые принципы экстремума для различных типов систем дифференциальных уравнений с частными производными. Показаны применения этих результатов при исследовании задачи Трикоми для некоторых систем уравнений смешанного типа.

В §3.1 для системы

$$LU \equiv \sum_{p,q=1}^m A^{pq} U_{pq} + \sum_{p=1}^m B^p U_p + CU = 0, \quad (0.18)$$

где A^{pq} , B^p , C — заданные вещественные матрицы порядка $n \times n$, $n \geq 2$, $U = (u_1, u_2, \dots, u_n)$, $U_p = \partial U / \partial x_p$, $U_{pq} = \partial^2 U / \partial x_p \partial x_q$, заданной в области D пространства $\mathbb{R}^m$ точек $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$, установлены внутренние и граничные принципы максимума модуля $|U| = \left(\sum_{i=1}^n u_i^2(x) \right)^{1/2}$ ее регулярных решений. Наряду с системой (0.18) рассмотрим уравнение

$$M(|U|) = (e, L|U|e) = \sum_{p,q} (e, A^{pq}e) |U|_{pq} + \\ + \sum_p |U|_p \left[(e, B^p e) + 2 \sum_p (e, A^{pq} e_q) \right] + (e, Le) |U| = 0, \quad (0.19)$$

где $e = (e_1, e_2, \dots, e_n)$, $e_i = u_i / |U|$; (U, V) — означает скалярное произведение.

Пусть коэффициенты уравнения (0.19) локально ограничены и квадратичная форма $\sum_{p,q} (e, A^{pq}e) \xi_p \xi_q$ неотрицательно определена в области $G = D \setminus \{x \in D: |U(x)| = 0\}$.

Теперь для примера сформулируем одну из четырех теорем из данного параграфа.

Теорема 3.1.2. Пусть: 1) оператор M локально равномерно эллиптивен и $(e, Le) \leq 0$ в G ; 2) $U(x)$ — регулярное в D решение системы (0.18) и $U(x) \not\equiv \text{const}$. Тогда модуль $|U(x)|$ не может достигать положительного локального максимума ни в одной точке области D .

Здесь приведены примеры, для которых выполнены условия доказанных принципов максимума, а также примеры, выясняющие сущность наложенных условий.

В § 3.2 для эллиптической системы

$$L_i(U) \equiv a_{ipq} u_{ix_p x_q} + b_{ip} u_{ix_p} + \sum_{k=1}^n c_{ik} u_k = f_i, \quad (0.20)$$

где $i = \overline{1, n}$, $n \geq 2$, индексы p и q означают суммирование по этим индексам от 1 до m ; $a_{ipq}(x)$, $b_{ip}(x)$, $c_{ik}(x)$ — заданные в области $D \subset \mathbb{R}^m$ вещественные локально ограниченные функции, причем для каждого i : $a_{ipq}(x) = a_{iqp}(x)$ и квадратичная форма $a_{ipq}(x) \xi_p \xi_q \geq 0$ в области D , установлены новые принципы экстремума ее регулярных решений.

Для примера сформулируем здесь две теоремы.

Теорема 3.2.3. Пусть в области D оператор L_i при каждом i локально равномерно эллиптичен и $c_{ik} \geq 0$ при $k \neq i$, $c_{ii} + \sum_{k \neq i} c_{ik} \leq 0$, $f_i \geq 0$ (≤ 0) и $U(x)$ — регулярное в D решение системы (0.20); при этом функции $u_i(x)$ не равны постоянной в любой подобласти области D . Тогда если $\max_i \max_{\bar{D}} u_i(x) = u_j(\bar{x}) > 0$ ($\min_i \min_{\bar{D}} u_i(x) = u_j(\bar{x}) < 0$), то $u_j(\bar{x})$ достигается только на границе области D .

Теорема 3.2.7. Пусть: 1) выполнены условия теоремы 3.2.3; 2) $\max_i \max_{\bar{D}} u_i(x) = u_j(\bar{x}) > 0$ ($\min_i \min_{\bar{D}} u_i(x) = u_j(\bar{x}) < 0$), $\bar{x} \in \partial D$; 3) граница области D удовлетворяет условию конуса¹⁾. Тогда для любого $\varepsilon \in [0, \alpha]$ в любой окрестности $V \subset \partial D$ точки $\bar{x}$ найдется точка $x' \in V$ такая, что для любого вектора l , исходящего из точки x' и образующего с вектором $k(x')$ угол, не больший $(\alpha - \varepsilon)$, справедливо неравенство

$$\frac{\partial u_j(x')}{\partial l} < 0 \left(\frac{\partial u_j(x')}{\partial l} > 0 \right),$$

где $k(x)$ — непрерывное единичное векторное поле, заданное на ∂D .

В § 3.3 для гиперболической системы

$$L_0(U) \equiv U_{\xi\eta} + a(\xi, \eta)U_{\xi} + b(\xi, \eta)U_{\eta} + c(\xi, \eta)U = 0, \quad (0.21)$$

где a , b — числовые функции, c — квадратная матрица из числовых функций $c_{ik}(\xi, \eta)$, $i, k = \overline{1, n}$, $n \geq 2$, заданной в области Δ (см. § 1.2 главы 1), установлен принцип максимума модуля $|U(\xi, \eta)|$ в классе ее регулярных и обобщенных решений.

Пусть коэффициенты системы (0.21) a , b , c_{ik} и a_{ξ} непрерывны на $\Delta \cup A_0 C_0$ и при $(\xi, \eta) \in \Delta$ удовлетворяют одному из следующих условий:

$$\alpha(\xi, \eta) - \int_0^{\xi} \beta(t, \eta) \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(h_i^2 + \sum_{k \neq i} c_{ik}^2 \right)} dt > 0, \quad (0.22)$$

$$\begin{cases} h_i = a_{\xi} + ab - c_{ii} = a_{\xi} + ab - c_0 = h, \\ \alpha(\xi, \eta) - \int_0^{\xi} \beta(t, \eta) \left[|h| + \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{k \neq i} c_{ik}^2} \right] dt > 0, \end{cases} \quad (0.23)$$

где $\alpha = \beta a$, $\beta = \exp \int b d\xi$.

¹⁾ См. определение 3.1.1 главы 3.

Теорема 3.3.1. Пусть коэффициенты системы (0.21) в области Δ удовлетворяют отмеченным выше условиям гладкости и условию (0.22) или (0.23), а $U(\xi, \eta)$ — регулярное в Δ решение системы (0.21), равное нулю на характеристике A_0C_0 . Тогда если $\max_{\Delta} |U(\xi, \eta)| > 0$, то он достигается на $\overline{A_0B_0}$.

Это утверждение переносится и в класс обобщенных в Δ решений системы (0.21).

В § 3.4 (аналогично § 3.2) для гиперболической системы

$$L_i(U) \equiv u_{i\xi\eta} + a_i(\xi, \eta)u_{i\xi} + b_i(\xi, \eta)u_{i\eta} + \sum_{k=1}^n c_{ik}(\xi, \eta)u_k = f_i(\xi, \eta), \quad (0.24)$$

где $i = \overline{1, n}$, $n \geq 2$; a_i, b_i, c_{ik}, f_i — числовые функции, заданной в области Δ , установлены новые экстремальные свойства ее регулярных и обобщенных решений.

Пусть $\alpha_i = a_i\beta_i$, $\beta_i = \exp \int b_i d\xi$, $h_i = a_i\xi + a_ib_i - c_{ii}$; функции a_i, b_i, c_{ik} и $a_i\xi$, непрерывны на множестве $\Delta \cup A_0C_0$ и при $(\xi, \eta) \in \Delta$ удовлетворяют одному из следующих условий:

$$\begin{cases} h_i \geq 0, \quad c_{ik} \geq 0 & \text{при } k \neq i, \\ \alpha_i(0, \eta) + \int_0^\xi \beta_i(t, \eta) \sum_{k=1}^n c_{ik}(t, \eta) dt > 0; \end{cases} \quad (0.25)$$

$$\alpha_i(\xi, \eta) - \int_0^\xi \beta_i(t, \eta) \left(|h_i| + \sum_{k \neq i}^n |c_{ik}| \right) dt > 0. \quad (0.26)$$

Предполагается, что функции $f_i(\xi, \eta)$ интегрируемы по ξ на каждом отрезке $[0, \xi_0]$ прямой $\eta = \eta_0$, $0 < \xi_0 < \eta_0 < l$.

Теорема 3.4.1. Пусть: 1) коэффициенты системы (0.24) и ее правая часть обладают отмеченной выше гладкостью и удовлетворяют условию (0.25); 2) $f_i \leq 0$ ($f_i \geq 0$) в области Δ ; 3) $U(\xi, \eta)$ — регулярное в Δ решение системы (0.24), равное нулю на характеристике A_0C_0 . Тогда если $\max_i \max_{\Delta} u_i > 0$ ($\min_i \min_{\Delta} u_i < 0$), то этот максимум (минимум) достигается на отрезке $\overline{A_0B_0}$.

Теорема 3.4.2. Пусть: 1) коэффициенты системы (0.24) обладают отмеченной выше гладкостью и удовлетворяют условию (0.26); 2) $f_i(\xi, \eta) \equiv 0$ в Δ ; 3) $U(\xi, \eta)$ — регулярное в Δ решение системы (0.24), равное нулю на характеристике A_0C_0 . Тогда если $\max_i \max_{\Delta} |u_i(\xi, \eta)| > 0$, то этот максимум достигается на отрезке $\overline{A_0B_0}$.

Эти утверждения распространяются на класс обобщенных на области Δ решений системы (0.24).

В §3.5 для системы уравнений смешанного типа

$$LU \equiv K(y)U_{xx} + U_{yy} + AU_x + BU_y + CU = 0, \quad (0.27)$$

где $K(y)$, $A(x, y)$, $B(x, y)$ — числовые функции, $yK(y) > 0$ при $y \neq 0$, $C(x, y)$ — квадратная матрица порядка n , $n \geq 2$, заданной в области D пространства $\mathbb{R}^2$ переменных (x, y) (см. §1.1 главы 1), установлен принцип максимума модуля $|U(x, y)|$ ее регулярных и обобщенных решений.

Теорема 3.5.1. Пусть: 1) коэффициенты системы (0.27) в области D_+ ограничены и $C(x, y)$ — неположительно определенная матрица; 2) коэффициенты системы (0.27) в области D_- в характеристических координатах (ξ, η) удовлетворяют условиям теоремы 3.3.1; 3) $U(x, y)$ — регулярное в D решение системы (0.27), равное нулю на характеристике AC . Тогда если $\max_{\bar{D}} |U| > 0$, то этот максимум достигается на кривой $\bar{\Gamma}$.

Эта теорема переносится на класс обобщенных в D решений системы (0.27). Далее показаны применения теоремы 3.5.1 для получения теорем единственности решения задачи Трикоми для системы (0.27), уравнения Лаврентьева–Бицадзе с комплексным спектральным параметром и для одной нелинейной системы уравнений смешанного типа.

В §3.6 для системы уравнений смешанного типа

$$L_i U \equiv K(y)u_{ixx} + u_{iyy} + A_i u_{ix} + B_i u_{iy} + \sum_{k=1}^n C_{ik} u_k = F_i, \quad (0.28)$$

где $yK(y) > 0$ при $y \neq 0$, $K(y)$, $A_i(x, y)$, $B_i(x, y)$, $C_{ik}(x, y)$, $F_i(x, y)$ — известные числовые функции, $i = \overline{1, n}$, $n \geq 2$, заданной в области D изучаются новые экстремальные свойства ее регулярных и обобщенных решений. Показаны применения этих результатов при изучении следующей задачи Трикоми.

Задача Т. Найти функции $u_i(x, y)$, удовлетворяющие условиям:

$$u_i(x, y) \in C(\bar{D}) \cap C^1(D) \cap C^2(D_+ \cup D_-); \quad (0.29)$$

$$L_i U \equiv F_i(x, y), (x, y) \in D_+ \cup D_-; \quad (0.30)$$

$$u_i(x, y) = \varphi_i(x, y), (x, y) \in \Gamma; \quad (0.31)$$

$$u_i(x, y)|_{AC} = \psi_i(x), 0 \leq x \leq l/2, \quad (0.32)$$

где φ_i , ψ_i — заданные достаточно гладкие функции.

Теорема 3.6.1. Пусть: 1) в области D_+ коэффициенты системы (0.28) ограничены и

$$C_{ik} \geq 0 \quad \text{при} \quad k \neq i, \quad C_{ii} + \sum_{k \neq i} C_{ik} \leq 0;$$

2) коэффициенты системы (0.28) и функции $F_i(x, y)$ в области D_- в характеристических координатах (ξ, η) удовлетворяют условиям теоремы 3.4.1; 3) $F_i(x, y) \geq 0$ (≤ 0) в $D_+ \cup D_-$; 4) $U(x, y)$ — регулярное в D решение системы (0.28), равное нулю на характеристике AC . Тогда если $\max_i \max_{\bar{D}} u_i(x, y) > 0$ ($\min_i \min_{\bar{D}} u_i(x, y) < 0$), то этот максимум (минимум) достигается на кривой $\bar{\Gamma}$.

Теорема 3.6.2. Пусть: 1) в области D_+ коэффициенты системы (0.28) ограничены и $C_{ii} + \sum_{k \neq i} |C_{ik}| \leq 0$; 2) коэффициенты системы (0.28) в области D_- в характеристических координатах (ξ, η) удовлетворяют условиям теоремы 3.4.2; 3) $F_i(x, y) \equiv 0$ в $D_+ \cup D_-$; 4) $U(x, y)$ — регулярное в D решение системы (0.28), равное нулю на AC . Тогда если $\max_i \max_{\bar{D}} |u_i(x, y)| > 0$, то этот максимум достигается на кривой $\bar{\Gamma}$.

Теоремы 3.6.1 и 3.6.2 переносятся на класс обобщенных в области D решений системы (0.28).

Следствие 3.6.1. Если коэффициенты системы (0.28) удовлетворяют условиям теоремы 3.6.1 или 3.6.2 и в классе обобщенных в D решений системы (0.28) существует решение задачи T , то оно единственно.

Следствие 3.6.2. Пусть: 1) коэффициенты системы (0.28) удовлетворяют условиям 1) и 2) теоремы 3.6.1; 2) $F_i(x, y) \leq 0$ (≥ 0) в $D_+ \cup D_-$; 3) $U(x, y)$ — обобщенное в D решение системы (0.28), равное нулю на характеристике AC . Тогда если $u_i \geq 0$ (≤ 0) на $\bar{\sigma}$, то $u_i \geq 0$ (≤ 0) в $\bar{D}$.

В § 3.7 изучается вопрос о разрешимости задачи (0.29)–(0.32) для системы (0.28) при $K(y) = (\operatorname{sgn} y)|y|^m$, $m \geq 0$ и $F_i \equiv 0$, т. е.

$$L_i U \equiv (\operatorname{sgn} y)|y|^m u_{ixx} + u_{iyy} + A_i u_{ix} + B_i u_{iy} + \sum_{k=1}^n C_{ik} u_k = 0.$$

Пусть коэффициенты этой системы $A_i(x, y)$, $B_i(x, y) \in C^1(\bar{D}_+) \cap C^1(\bar{D}_-)$, $C_{ik}(x, y) \in C(\bar{D}_+) \cap C(\bar{D}_-)$ и удовлетворяют условиям теоремы 3.6.1; Γ — из класса Ляпунова, $\varphi_i(s) = \varphi_i(x(s), y(s))$, $x = x(s)$, $y = y(s)$ — параметрические уравнения кривой Γ , $0 \leq s \leq S$, S — длина кривой Γ .

Теорема 3.7.1. Пусть в области D при условии, когда кривая Γ оканчивается в точках A и B сколь угодно малыми дугами «нормальной» кривой, существует регулярное решение задачи (0.29)–(0.32). Тогда если функции $\varphi_i(s)$ непрерывны на $[0, S]$ и $\psi_i(x)$ — достаточно гладкие (т.е. функции $\psi_i(x)$ таковы, что при достаточной гладкости функции $\varphi_i(s)$ выполнено условие теоремы 3.7.1) на $[0, l/2]$, $\varphi_i(0) = \varphi_i(S) = \psi_i(0) = 0$, то существует единственное обобщенное решение $u_i(x, y)$ задачи T с граничными данными $u_i = \varphi_i$ на Γ и $u_i = \psi_i$ на AC при любом подходе кривой σ к оси $y = 0$, за исключением случаев касания.

Глава 4. Эта глава посвящена задаче Франкля (задаче Φ) для уравнения

$$Lu \equiv K(y)u_{xx} + u_{yy} - \lambda(y)u = 0, \quad (0.33)$$

где $yK(y) > 0$ при $y \neq 0$, в области D , ограниченной отрезком AA' оси $x = 0$, $-a < y < a$, $a > 0$; характеристикой $A'C$ уравнения (0.28), $A' = (0, -a)$, $C = (c, 0)$; отрезком CB оси $y = 0$, $c \leq x \leq b$, и кривой Γ из класса Ляпунова с концами в точках $B = (b, 0)$ и $A = (0, a)$, лежащей в первой четверти.

Здесь:

1) развитием метода вспомогательных функций получены новые теоремы единственности решения задачи Φ для уравнения (0.33) при более слабых ограничениях на кривую Γ , функцию $K(y)$ и класс решений;

2) путем установления новых качественных свойств обобщенно аналитических функций окончательно решена проблема единственности решения задачи для двух классов уравнений смешанного типа, среди которых уравнение Чаплыгина, для которого в 1956 году и была поставлена задача;

3) найдены собственные значения и соответствующие собственные функции спектральной задачи Франкля для уравнения Лаврентьева–Бицадзе со спектральным комплексным параметром и изучены их свойства;

4) показаны применения этих результатов при разрешимости задачи Φ .

В §4.1 приводится постановка задачи Франкля для уравнения (0.33) и обзор работ, посвященных этой задаче. Пусть $D_1 = D \cup \{y > 0\}$, OP — часть характеристики уравнения (0.33), выходящей из точки $O = (0, 0)$ до пересечения с $A'C$ в точке P ; D_2 — область, ограниченная кривыми OP , PC и OC ; D_3 — область, ограниченная кривыми OA' , $A'P$ и PO .

Задача Ф. Найти функцию $u(x, y)$, удовлетворяющую условиям:

$$u(x, y) \in C(\overline{D}) \cap C^1(D \cup OA \cup OA' \setminus OP) \cap C^2(D_1 \cup D_2 \cup D_3); \quad (0.34)$$

$$Lu \equiv 0, (x, y) \in D_1 \cup D_2 \cup D_3; \quad (0.35)$$

$$u(x, y) = \varphi_1(x, y), \quad (x, y) \in \Gamma; \quad (0.36)$$

$$u(x, 0) = \varphi_2(x), \quad c \leq x \leq b; \quad (0.37)$$

$$u(0, y) - u(0, -y) = \varphi_3(y), \quad 0 \leq y \leq a; \quad (0.38)$$

$$u_x(0, y) = 0, \quad 0 < |y| < a, \quad (0.39)$$

где φ_i — заданные достаточно гладкие функции, $i = 1, 2, 3$, $\varphi_2(b) = \varphi_1(0, b)$.

В § 4.2 получены теоремы единственности решения задачи Ф в классе регулярных в D решений уравнения (0.33).

Определение 4.2.1. Под регулярным в области D решением уравнения (0.33) будем понимать функцию $u(x, y)$, удовлетворяющую условиям (0.34) и (0.35), и, кроме того, функция $-u_y dx + Ku_x dy$ суммируема вдоль кривых $A'C$, OB , Γ и обеих сторон характеристики OP .

Пусть $n = (n_1, n_2)$ — единичный вектор внутренней нормали к кривой $A'C \cup \Gamma$, $n_1(s) = -dy/ds$, $n_2(s) = -dx/ds$, $y_{\min} = \min y$, $y_{\max} = \max y$ в $\overline{D}$.

Теорема 4.2.1. Пусть: 1) на кривой Γ отсутствуют точки, при переходе которых $n_1(s)$ меняет знак, а $n_2(s) = 1$; 2) $K(y) \in C[y_{\min}, 0] \cap C^1[y_{\min}, 0] \cap C[0, y_{\max}] \cap C^1[0, y_{\max}]$, $K(y) + K(-y) \geq 0$ при $0 \leq y \leq a$ и $x = 0$; 3) функция $\lambda(y)$ такова, что существует решение уравнения Риккати

$$\mu'(y) + \mu^2(y) = \lambda(y), \quad y_{\min} < y < y_{\max}, \quad (0.40)$$

из класса $C^1[y_{\min}, y_{\max}]$. Тогда если в классе регулярных в D решений уравнения (0.33) существует решение задачи (0.34)–(0.39), то оно единственно.

В частности, когда $\lambda(y) = \text{const}$, из уравнения (0.40) нетрудно найти $\mu(y)$ и показать справедливость теоремы 4.2.1 при всех λ , удовлетворяющих неравенству

$$\lambda > -\pi^2 / (y_{\max} - y_{\min})^2. \quad (0.41)$$

В теореме 4.2.1 присутствует некоторое геометрическое ограничение на кривую Γ , которое слабее, чем ранее известные условия. В последующих утверждениях получена единственность решения задачи Ф без каких-либо ограничений геометрического характера на кривую Γ .

В области D рассмотрим уравнение (0.33) при $\lambda(y) \equiv 0$, т. е. уравнение типа Чаплыгина

$$K(y)u_{xx} + u_{yy} = 0. \quad (0.42)$$

Теорема 4.2.2. Пусть: 1) выполнено условие 2) теоремы 4.2.1; 2) $u(x, y)$ — решение однородной задачи Φ из класса регулярных в области D решений уравнения (0.42). Тогда $u(x, y) \equiv 0$ в D .

Рассмотрим уравнение (0.33) при $K(y) = (\operatorname{sgn} y)|y|^m$, $m \geq 0$, $\lambda(y) = \lambda = \operatorname{const}$, т. е. уравнение

$$(\operatorname{sgn} y)|y|^m u_{xx} + u_{yy} - \lambda u = 0. \quad (0.43)$$

Теорема 4.2.4. Если в классе регулярных в D решений уравнения (0.43) существует решение задачи Φ , то оно единственно при всех λ , удовлетворяющих неравенству (0.41).

В § 4.3 найдены собственные значения и соответствующие собственные функции спектральной задачи Франкля для уравнения

$$Lu \equiv u_{xx} + (\operatorname{sgn} y)u_{yy} + \lambda \operatorname{sgn}(x + y)u = 0,$$

где λ — комплексный параметр, в случае, когда область D_1 является частью круга: $x^2 + y^2 < a^2$, $x, y > 0$, $a = \operatorname{const} > 0$.

Задача Φ_λ . Найти значения параметра λ и соответствующие им функции $u(x, y)$, удовлетворяющие условиям:

$$\begin{aligned} u(x, y) &\in C(\overline{D}) \cap C^1(D \cup AO \cup OA' \setminus OP) \cap C^2(D_1 \cup D_2 \cup D_3); \\ Lu &\equiv 0, \quad (x, y) \in D_1 \cup D_2 \cup D_3; \\ u(x, y) &= 0, \quad (x, y) \in CB \cup \Gamma; \quad u_x(0, y) = 0, \quad 0 < |y| < a; \\ u(0, y) - u(0, -y) &= 0, \quad 0 \leq y \leq a. \end{aligned}$$

На основании результатов § 2.1 задача Φ_λ сведена к эллиптической задаче на собственные значения: найти значения параметра λ и соответствующие им собственные функции $u(x, y)$, удовлетворяющие условиям:

$$\begin{aligned} u(x, y) &\in C(\overline{D_1}) \cap C^1(D_1 \cup OA \cup OC) \cap C^2(D_1); \\ u_{xx} + u_{yy} + \lambda u &= 0, \quad (x, y) \in D_1; \\ u(x, y) &= 0, \quad (x, y) \in CB \cup \Gamma; \quad u_x(0, y) = 0, \quad 0 < |y| < a; \\ u(x, 0) - u(0, x) &= \int_0^x u_y(t, 0) J_0[\sqrt{\lambda}(x - t)] dt, \quad 0 \leq x \leq a, \end{aligned}$$

где $J_0(\cdot)$ — функция Бесселя первого рода.

В случае, когда точки C и B совпадают, $a = c = b = 1$ и кривая Γ является частью окружности $x^2 + y^2 = 1$, $x > 0$, $y > 0$, методом разделения переменных найдены собственные значения и соответствующие собственные функции этой задачи, затем и задачи Φ_λ . Далее изучены свойства системы собственных функций задачи Φ_λ на полноту и базисность.

В §§ 4.4 и 4.5 на основании предыдущих результатов получены теоремы существования решения задачи Ф для некоторых классов уравнений смешанного типа.

Глава 5. Данная глава посвящена обобщенной задаче Трикоми для уравнения смешанного типа (0.33). Аналогично главе 4 здесь путем развития метода вспомогательных функций и изучения качественных свойств решений уравнения (0.33) в области эллиптичности получены новые теоремы единственности решения обобщенной задачи Трикоми и показаны их применения.

В § 5.1 дается постановка обобщенной задачи Трикоми (задачи М по терминологии А.В. Бицадзе) и обзор работ, посвященных этой задаче.

В § 5.2 рассмотрим уравнение (0.33) в области D с границей ∂D , состоящей при $y > 0$ из спрямляемой жордановой кривой Γ с концами в точках $A = (0, 0)$ и $B = (l, 0)$, $l > 0$, а при $y < 0$ из кусочно-гладкой кривой AC : $K(y)n_1^2 + n_2^2 \geq 0$, $n_1(s) \geq 0$, и характеристики CB : $K(y)n_1^2 + n_2^2 = 0$, $n_1(s) < 0$, уравнения (0.33), где $n = (n_1, n_2)$ — единичный вектор внутренней нормали к границе области.

Задача М. Найти функцию $u(x, y)$, удовлетворяющую условиям:

$$u(x, y) \in C(\overline{D}) \cap C^1(D) \cap C^2(D_+ \cup D_-); \quad (0.44)$$

$$Lu \equiv 0, (x, y) \in D_+ \cup D_-; \quad (0.45)$$

$$u(x, y) = \varphi(x, y), \quad (x, y) \in \Gamma; \quad (0.46)$$

$$u(x, y) = \psi(x, y), \quad (x, y) \in \gamma, \quad (0.47)$$

где φ, ψ — заданные достаточно гладкие функции, $\varphi(A) = \psi(A)$, $\gamma = AC$, $D_+ \cap \{y > 0\}$, $D_- \cap \{y < 0\}$.

Определение 5.2.1. Регулярным в области D решением уравнения (0.33) будем называть функцию $u(x, y)$, удовлетворяющую условиям (0.44), (0.45) и, кроме того, функция $2u_x u_y dx \pm (Ku_x^2 - u_y^2) dy$ суммируема вдоль кривых Γ , AC , CB и $u(x, y) \in C^1(D_- \cup AC)$.

Теорема 5.2.1. Пусть: 1) кривая Γ — из класса Ляпунова и на ней отсутствуют точки, при переходе которых $n_1(s)$ меняют знак, а $n_2(s) = 1$; 2) $K(y) \in C[y_{\min}, 0] \cap C^1[y_{\min}, 0] \cap C[0, y_{\max}] \cap C^1[0, y_{\max}]$; 3) функция $\lambda(y)$ такова, что существует решение $\mu(y)$ уравнения Риккати

$$\mu'(y) + \mu^2(y) = \lambda(y), \quad y_{\min} < y < y_{\max}, \quad (0.48)$$

из класса $C^1[y_{\min}, y_{\max}]$. Тогда если в классе регулярных в D решений уравнения (0.33) существует решение задачи (0.44)–(0.47), то оно единственно.

В частности, когда $\lambda(y) = \text{const}$, то теорема 5.2.1 справедлива при всех λ , удовлетворяющих неравенству (0.41).

В §5.3 рассматривается вариант задачи М, предложенный Л.В. Овсянниковым, и доказывается единственность решения задачи М без каких-либо ограничений геометрического характера на кривую Γ .

Рассмотрим уравнение типа Чаплыгина,

$$K(y)u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad yK(y) > 0 \quad \text{при} \quad y \neq 0, \quad (0.49)$$

в области D (см. §5.1), где кривая AC в некоторой окрестности точки A совпадает с характеристикой AC_1 , а затем параллельна оси $y = 0$ до пересечения в точке C с характеристикой CB .

Определение 5.3.1. Регулярным в области D решением уравнения (0.49) будем называть функцию $u(x, y)$, удовлетворяющую условиям (0.44), (0.45), и дополнительно потребуем, чтобы функция $-u_y dx + + Ku_x dy$ была суммируемой вдоль кривых AC , CB , Γ и AB .

Теорема 5.3.1. Пусть: 1) кривая Γ — из класса Ляпунова; 2) $K(y) \in C[y_{\min}, 0] \cap C^1[y_{\min}, 0] \cap C[0, y_{\max}] \cap C^1[0, y_{\max}]$; 3) $u(x, y)$ — решение однородной задачи М из класса регулярных в D решений уравнения (0.49); 4) точка A не является предельной точкой множества $\{(x, y) \in \Gamma \cup A: K(y)u_x^2 + u_y^2 = 0\}$. Тогда $u(x, y) \equiv 0$ в D .

Отметим, что условие 4) теоремы 5.3.1 выполнено, например, когда при малых $y \leq 0$ функция $K(y) = (\operatorname{sgn} y)|y|^m$, $m \geq 0$, или удовлетворяет условиям теорем Франкля–Проттера о единственности решения задачи Трикоми для уравнения Чаплыгина.

В этом же параграфе в области D рассматривается еще один класс уравнений смешанного типа:

$$Lu \equiv (\operatorname{sgn} y)|y|^m u_{xx} + u_{yy} - \lambda(y)u = 0, \quad m > 0. \quad (0.50)$$

Теорема 5.3.2. Пусть: 1) кривая Γ — из класса Ляпунова; 2) функция $\lambda(y)$ такова, что существует решение $\mu(y)$ уравнения (0.48) из класса $C^1[y_{\min}, y_{\max}]$; 3) $u(x, y)$ — решение однородной задачи М для уравнения (0.50) из класса его регулярных в D решений. Тогда $u(x, y) \equiv 0$ в D .

В случае $\lambda(y) = \operatorname{const}$ теорема 5.3.2 справедлива при всех λ , удовлетворяющих неравенству (0.41).

В §5.4 результаты §5.3 перенесены на случай задачи Трикоми для уравнений (0.49) и (0.50).

В §§5.5 и 5.6 на основании предыдущих результатов получены теоремы существования решения задачи М для некоторых классов уравнений смешанного типа.

Основные результаты данной монографии опубликованы в статьях автора [83–86, 172–194], которые были получены при прохождении докторантуры на кафедре общей математики факультета вычислительной математики и кибернетики МГУ им. М.В. Ломоносова при

активной поддержке **А.В. Бицадзе**, В.А. Ильина и Е.И. Моисеева. Пользуясь возможностью, выражаю им глубокую благодарность.

В данной работе также приведены результаты Е.И. Моисеева и С.М. Пономарева, опубликованные в работах [134–146, 161–163] по спектральным свойствам решений краевых задач для уравнений смешанного типа.

Во второе издание данной монографии (первое издание вышло в издательстве «Palmarium Academic Publishing», Германия, в 2012 г.) внесены небольшие дополнения и изменения с учетом новых публикаций и были исправлены опечатки. При подготовке книги ко второму изданию оказали помощь мои ученики-коллеги, кандидаты физико-математических наук, доценты А.А. Гималтдинова (Карамова) и Ю.К. Сабитова. Им выражаю свою благодарность. Отмечу также, что результаты § 2.5 принадлежат также Ю.К. Сабитовой.

Буду благодарен всем, кто пришлет свои замечания и пожелания на электронный адрес: Sabitov_fmfi@mail.ru.

Глава 1

ПРИНЦИП МАКСИМУМА ДЛЯ УРАВНЕНИЙ СМЕШАННОГО ТИПА И ЕГО ПРИМЕНЕНИЯ

§ 1.1. Краткий обзор известных результатов

Рассмотрим уравнение

$$Lu \equiv K(y)u_{xx} + u_{yy} + Au_x + Bu_y + Cu = F, \quad (1.1.1)$$

где $yK(y) > 0$ при $y \neq 0$, $K(y), A(x, y), B(x, y), C(x, y), F(x, y)$ — заданные достаточно гладкие функции в области D (см. рис. 1.1.1), ограниченной простой кривой Жордана Γ , лежащей в полуплоскости $y > 0$ с концами в точках $A = (0, 0)$ и $B = (l, 0)$, $l > 0$, и характеристиками

$$AC: \xi = x + \int_0^y \sqrt{-K(t)} dt = 0, \quad CB: \eta = x - \int_0^y \sqrt{-K(t)} dt = l,$$

где $K(y) \in C[y_c, 0] \cap C^2[y_c, 0)$, y_c — ордината точки C , уравнения (1.1.1), при $y < 0$, и следующую краевую задачу.

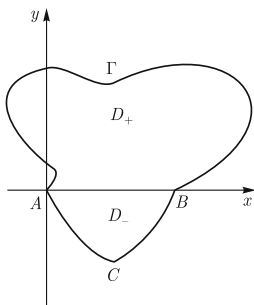


Рис. 1.1.1

Задача Трикоми (Задача Т). Найти функцию $u(x, y)$, удовлетворяющую условиям:

$$u(x, y) \in C(\overline{D}) \cap C^1(D) \cap C^2(D_+ \cup D_-); \quad (1.1.2)$$

$$Lu(x, y) \equiv F(x, y), \quad (x, y) \in D_+ \cup D_-; \quad (1.1.3)$$

$$u(x, y) = \varphi(x, y), \quad (x, y) \in G; \quad (1.1.4)$$

$$u(x, y) = \psi(x, y), \quad (x, y) \in AC, \quad (1.1.5)$$

где φ и ψ – заданные достаточно гладкие функции, $\varphi(A) = \psi(A)$, $D_+ = D \cap \{y > 0\}$, $D_- = D \cap \{y < 0\}$.

При исследовании задачи Т и других аналогичных краевых задач важную роль играет принцип экстремума. Впервые принцип экстремума был сформулирован в 1950 году А.В. Бицадзе [15] для уравнения (1.1.1) при $K(y) = \operatorname{sgn} y$, $A = B = C = F \equiv 0$. На год позже этот принцип был получен в работе Жермена и Бадера [241] для уравнения Трикоми, т.е. для уравнения (1.1.1) при $K(y) = y$, $A = B = C = F \equiv 0$.

В 1952 году в своей диссертации К.И. Бабенко [5] доказал справедливость принципа экстремума для уравнения (1.1.1) в некотором классе его обобщенных решений при $K(y) = y$, $A(x, 0) = B(x, 0) = 0$, $F(x, y) \equiv 0$ и достаточно малой длине линии изменения типа уравнения.

В 1953 году в работе Агмона, Ниренберга и Проттера [229] был установлен принцип экстремума для гиперболических уравнений и на его основе принцип экстремума для уравнения (1.1.1) при достаточно сильных ограничениях на коэффициенты в области гиперболичности и класс решений.

Дальнейшие исследования в этом направлении велись С.П. Пулькиным [166–168], В.Ф. Волкова [35–37], М.М. Смирновым [201], А.М. Нахушевым [151], М.С. Салахитдиновым [195], И.В. Майоровым [122–125], Т.Д. Джураевым [51, 52], Ю.М. Крикуновым [102, 103], М.Е. Лернером [115, 116], В.И. Жегаловым [63–65] и их учениками. В основном исследования проводились по двум направлениям:

1) установление принципа экстремума для общих уравнений смешанного типа с одной линией изменения типа с целью ослабления тех ограничений, которые возникли в работах К.И. Бабенко и Агмона, Ниренберга и Проттера;

2) установление принципа экстремума для исследования задачи Т и других аналогичных краевых задач для известных модельных уравнений смешанного и смешанно-составного типов с одной или несколькими линиями изменения типа.

Такой интерес к доказательству справедливости принципа экстремума для уравнений смешанного типа объясняется тем, что: во-первых, из него сразу же следует единственность решения задачи Т, а, в свою очередь, теорема единственности играет решающую роль при доказательстве существования решения задачи Т методом

интегральных уравнений, во-вторых, он, как показал А.В. Бицадзе [18], позволяет построить альтернирующий процесс типа Шварца для решения задачи Т при довольно общих предположениях относительно кривой Γ при подходе к оси $y = 0$; в-третьих, принцип экстремума находит применение при построении спектральной теории задачи Трикоми [75, 76, 42, 139].

В этой главе установлены принципы максимума для уравнения (1.1.1) в классе его регулярных и обобщенных решений в областях гиперболичности, эллиптичности и (в целом) в смешанной области D при более слабых ограничениях на коэффициенты уравнения (1.1.1). На основе экстремальных свойств решений уравнения (1.1.1) установлены также принципы максимума и для других классов уравнений смешанного типа. По существу, здесь построена некая теория экстремальных свойств решений уравнений смешанного типа на плоскости, из которой следуют ранее известные результаты и ряд нерешенных вопросов по теории задачи Трикоми и других аналогичных краевых задач.

§ 1.2. Принцип максимума для уравнений гиперболического типа

1.2.1. Принцип максимума в классе регулярных решений. Рассмотрим уравнение гиперболического типа

$$L_0 u \equiv u_{\xi\eta} + a(\xi, \eta)u_{\xi} + b(\xi, \eta)u_{\eta} + c(\xi, \eta)u = f(\xi, \eta) \quad (1.2.1)$$

в характеристическом треугольнике Δ (см. рис. 1.2.1), ограниченном отрезками прямых $\xi = 0$, $\eta = \xi$ и $\eta = l$.

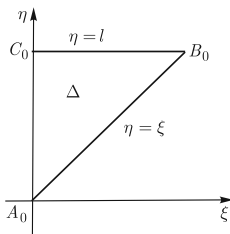


Рис. 1.2.1

Пусть $A_0 = (0, 0)$, $B_0 = (l, l)$, $C_0 = (0, l)$ — вершины треугольника Δ ; $\alpha(\xi, \eta) = a(\xi, \eta)\beta(\xi, \eta)$, $\beta(\xi, \eta) = \exp \int b(\xi, \eta) d\xi$, $h(\xi, \eta) = a_{\xi}(\xi, \eta) + a(\xi, \eta)b(\xi, \eta) - c(\xi, \eta)$.

Пусть функции $a(\xi, \eta)$, $a_\xi(\xi, \eta)$, $b(\xi, \eta)$ и $c(\xi, \eta)$ непрерывны в $\Delta \cup A_0C_0$ и при $(\xi, \eta) \in \Delta$ удовлетворяют одному из следующих условий:

$$\begin{cases} h(\xi, \eta) \geq 0, \\ \alpha(0, \eta) + \int_0^\xi \beta(t, \eta)c(t, \eta) dt > 0; \end{cases} \quad (1.2.2)$$

$$\alpha(\xi, \eta) - \int_0^\xi \beta(t, \eta)|h(t, \eta)| dt > 0. \quad (1.2.3)$$

Отметим, что в условиях (1.2.2) и (1.2.3) интегральные неравенства могут быть нестрогими (т.е. ≥ 0), но в этом случае на каждом отрезке $[0, \xi]$ характеристики $\eta = \text{const}$ множество точек, в которых $h(t, \eta) = 0$, имеет меру нуль.

Предполагается, что правая часть $f(\xi, \eta)$ интегрируема по ξ на каждом отрезке $[0, \xi_0]$ характеристики $\eta = \eta_0$, $0 < \xi_0 < \eta_0 < l$.

Определение 1.2.1. Регулярным решением уравнения (1.2.1) в области Δ назовем функцию $u(\xi, \eta)$, удовлетворяющую условиям:

- 1) $u \in C(\overline{\Delta}) \wedge C^1(\Delta)$, $u_{\xi\eta} \in C(\Delta)$, $L_0u \equiv f$ в Δ ;
- 2) производная u_η непрерывна на множестве $\Delta \cup A_0C_0$.

Теорема 1.2.1 (Принцип экстремума). Пусть: 1) коэффициенты уравнения (1.2.1) обладают отмеченной выше гладкостью и удовлетворяют условию (1.2.2); 2) $f(\xi, \eta) \leq 0$ (≥ 0) в Δ ; 3) $u(\xi, \eta)$ — регулярное в Δ решение уравнения (1.2.1), равное нулю на характеристике A_0C_0 . Тогда если $\max_{\overline{\Delta}} u(\xi, \eta) > 0$ ($\min_{\overline{\Delta}} u(\xi, \eta) < 0$), то $\max_{\overline{\Delta}} u$ ($\min_{\overline{\Delta}} u$) достигается на отрезке $\overline{A_0B_0}$.

Доказательство. Рассмотрим в области Δ тождество

$$\beta L_0u \equiv \frac{\partial}{\partial \xi}(\beta u_\eta + \alpha u) - \beta h u = f \beta$$

и проинтегрируем его по отрезку NM прямой $\eta = \text{const}$, принадлежащему Δ . Тогда получим

$$(\beta u_\eta + \alpha u) \Big|_N^M = \int_{NM} \beta h u d\xi + \int_{NM} \beta f d\xi. \quad (1.2.4)$$

В равенстве (1.2.4) отрезок NM может принадлежать не только области Δ , но и $\Delta \cup A_0C_0$. Пусть $\max_{\overline{\Delta}} u(\xi, \eta) = u(Q) > 0$ и он не достигается на отрезке $\overline{A_0B_0}$, т.е. $u(Q) > \max_{\overline{A_0B_0}} u(\xi, \eta)$. Тогда точка $Q \in \Delta \cup C_0B_0$. Рассмотрим случай, когда $Q \in \Delta$. Из точки Q проведем отрезок $\eta = \text{const}$ до пересечения с характеристикой $\xi = 0$ в точке P .