

Никита Николаевич МОИСЕЕВ

Избранные труды

Гидродинамика
и механика

Оптимизация,
исследование
операций
и управления

ББК 22.1

М74

Ответственный редактор академик РАН А.А. Петров

Издательство благодарит Н.К. Бурову, А.А. Муромского
и Т.В. Сидорову за помощь в подготовке к печати трудов Н.Н. Моисеева



Издание осуществлено при финансовой поддержке
Российского фонда фундаментальных исследований
по проекту № 03-01-14068

Моисеев Н.Н.

М74 Избранные труды в 2-х томах. Т. 1. Гидродинамика и
механика. Оптимизация, исследование операций и теория
управления. — М.: Тайдекс Ко, 2003. — 376 с.

ISBN 5-94702-016-5

Никита Николаевич Моисеев (1917–2000) — выдающийся математик и глубокий мыслитель. Его работы получили высокое научное и общественное признание. В книге собраны важнейшие из трудов Н.Н. Моисеева по гидродинамике и механике, а также исследованию операций, оптимизации и теории управления.

ББК 22.1

- © Воронина А.В., 2003
- © Фонд им. Н.Н. Моисеева, 2003
- © Предисловие: А.А. Петров, 2003
- © Составление: Ю.Г. Евтушенко,
Ю.Н. Павловский, В.П. Пархоменко,
А.А. Петров, А.М. Тарко,
А.М. Тер-Крикоров, Ю.А. Флеров, 2003
- © Оформление: Тайдекс Ко, 2003

ISBN 5-94702-016-5

Содержание

Предисловие	5
Гидродинамика и механика	17
Движение твердого тела, имеющего полость, частично заполненную идеальной капельной жидкостью	18
О колебаниях тяжелой идеальной и несжимаемой жидкости в сосуде	24
Задача о движении твердого тела, содержащего жидкие массы, имеющие свободную поверхность	28
К теории нелинейных колебаний ограниченного объема жидкости	76
К теории колебаний упругих тел, имеющих жидкие полости	91
О неединственности возможных форм установившихся течений тяжелой жидкости при числах Фруда, близких к единице	115
Теорема существования и неединственности вихревых волн периодического типа	124
К теории волн в завихренной жидкости	130
О некоторых особенностях течения жидкости, подверженной действию сил поверхностного натяжения	146
Асимптотика быстрых вращений	159
Оптимизация, исследование операций и теория управления	181
Методы динамического программирования в теории оптимальных управлений. I. Системы, допускающие использование шкалы управлений	182
Методы динамического программирования в теории оптимальных управлений. II. Общий случай аддитивных функционалов	196

Информационная теория иерархических систем.	214
Иерархические структуры и теория игр.	267
Имитационные модели	289
К теории оптимального управления на бесконечном интервале времени	311
Оптимизация и управление (эволюция идей и перспективы)	324
Кибернетическое описание эколого-экономических систем	346

Гидродинамика и механика

1952–1962

Движение твердого тела, имеющего полость, частично заполненную идеальной каплевой жидкостью

В своем известном сочинении [1] Н.Е. Жуковский рассмотрел задачу о движении твердого тела, имеющего полости, полностью заполненные каплевой жидкостью. Возможно обобщить некоторые из его результатов на тот случай, когда жидкость имеет свободную поверхность.

1. Для простоты полагаем, что твердое тело (сосуд) имеет одну односвязную полость произвольной формы. Движения системы сосуд — жидкость около положения равновесия считаем малыми. Предполагаем, что вектор напряженности массовых сил постоянен по направлению, а его величина является функцией только времени. Тогда свободная поверхность жидкости в положении равновесия представляет собой плоскость. Если движение жидкости в начальный момент потенциальное, то оно им будет и в любой момент времени. Внешние силы, действующие на сосуд, считаем такими, что волны, возникающие в жидкости, обладают малыми амплитудами.

Свяжем с твердым телом подвижную систему координат $\xi\eta\zeta$ так, что невозмущенная поверхность жидкости совпадает с плоскостью $\xi O_1 \eta$. Далее предполагаем, что из множества функций, гармонических внутри полости и удовлетворяющих условию

$$\frac{\partial \varphi(\xi, \eta, \zeta)}{\partial n} = 0$$

на поверхности той части полости, которая в положении равновесия занята жидкостью, можно выбрать полное семейство функций φ_i , ортогональных на плоской фигуре, являющейся сечением полости невозмущенной поверхностью жидкости.

Введем следующие обозначения: M — масса системы; $\mathbf{v}_0$ — скорость точки O , связанной с сосудом и совпадающей с центром

Для опубликования в Докладах Академии наук СССР представлено академиком М.В. Келдышем.

тяжести системы, в положении равновесия; $\mathbf{v}$ — скорость движения жидкости относительно подвижной системы координат, движущейся поступательно вместе с точкой O ; $\mathbf{Q}$ — главный вектор внешних сил; τ — часть полости, занятая жидкостью в положении равновесия; $F_0(x, y, z) = 1$ — эллипсоид инерции сосуда в точке O ; $F_1(x, y, z) = 1$ — эллипсоид инерции эквивалентного (в смысле Жуковского) твердого тела для сосуда, имеющего форму объема τ ,

$$F_1(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = \sum_{i,j=1}^3 [\psi_i \psi_j] \omega_i \omega_j,$$

где $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ — проекции мгновенной угловой скорости на подвижные оси x, y, z , имеющие начало в точке O ;

$$[u v] = \rho \int (\nabla u \nabla v) d\tau;$$

ψ_1, ψ_2, ψ_3 — гармонические функции, удовлетворяющие граничным условиям: на границах жидкости в положении равновесия (границах объема τ)

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial n} = y\gamma - z\beta, \quad \frac{\partial \psi_2}{\partial n} = z\alpha - x\gamma, \quad \frac{\partial \psi_3}{\partial n} = x\beta - y\alpha;$$

α, β, γ — направляющие косинусы внутренней нормали $\mathbf{n}^\circ$; $\mathbf{L}$ — главный момент внешних сил; $\mathbf{g}(t)$ — вектор напряженности массовых сил; g_ξ, g_η — его проекции на оси $O_1\xi$ и $O_1\eta$; F_ξ, F_η — инерциальные силы, равные по величине и обратные по знаку проекциям соответствующих ускорений подвижного начала отсчета O на оси $O_1\xi$ и $O_1\eta$; $\mathbf{r}$ — радиус-вектор относительно подвижного центра O .

В принятых предположениях справедлива следующая теорема:

Теорема. Движение системы сосуд — жидкость описывается бесконечной системой линейных дифференциальных уравнений:

1) уравнение количества движения:

$$M \frac{d\mathbf{v}_0}{dt} + \rho \sum_{i=1}^{\infty} \frac{df_i}{dt} \int_{\tau} \nabla \varphi_i d\tau = \mathbf{Q}; \quad (1)$$

2) уравнение моментов:

$$\frac{d\mathbf{G}}{dt} + \rho \sum_{i=1}^{\infty} \frac{df_i}{dt} \int_{\tau} (\mathbf{r} \times \nabla \varphi_i) d\tau = \mathbf{L}, \quad (2)$$

где

$$\mathbf{G} = \nabla^{1/2} \Phi(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = \nabla^{1/2} F_0(\omega_1, \omega_2, \omega_3) + \nabla^{1/2} F_1(\omega_1, \omega_2, \omega_3);$$

3) уравнения для коэффициентов разложения в ряд Фурье потенциала скоростей:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{g(t)} \frac{df_i}{dt} \right) - \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} f_k = \frac{d}{dt} \frac{(F_{\xi} + g_{\xi})b_i + (F_{\eta} + g_{\eta})c_i}{g(t)} - \\ - \frac{d}{dt} \frac{\omega'_{\xi} d_{i_1} + \omega'_{\eta} d_{i_2} + \omega'_{\zeta} d_{i_3}}{g(t)} + \omega_{\xi} e_{i_1} + \omega_{\eta} e_{i_2} + \omega_{\zeta} e_{i_3}, \end{aligned} \quad (3)$$

где числа a_{ik} , b_i , c_i , d_{i_k} , e_{i_k} зависят только от формы полости и выбора функций φ_i .

Если вектор $\mathbf{g}(t)$ не зависит от времени, то система (1), (2) (3) — система уравнений с постоянными коэффициентами.

Уравнение (2) может быть приведено к виду

$$\frac{d\vec{G}}{dy} = L, \quad (4)$$

где

$$\vec{G} = \nabla^{1/2} \Phi(\omega_1, \omega_2, \omega_3) + \nabla^{1/2} \tilde{\Phi}(\omega_1, \omega_2, \omega_3),$$

$$\tilde{\Phi} = 2 \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^3 f_i [\varphi_i \psi_j].$$

Уравнение (4) будем называть обобщенным уравнением Жуковского.

2. В качестве примера рассмотрим плоские колебания открытого сосуда прямоугольной формы под действием упругой силы — $Mk^2 X$, где X — рабочее поджатие пружины.

В этом случае система уравнений имеет вид:

$$X'' + \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_{2n+1} f'_{2n+1} + k^2 X = 0, \quad (5)$$

$$f''_{2n+1} + \sigma_{2n+1}^2 f_{2n+1} + X''' b_{2n+1} = 0,$$

где

$$\alpha_{2n+1} = 2 \frac{(-1)^n \operatorname{th} \left(\frac{2n+1}{2l} \pi h \right)}{(2n+1)^2 \pi h \left(1 + \frac{m_1}{m_2} \right)},$$

$$\sigma_{2n+1}^2 = \frac{2n+1}{2l} \pi g \operatorname{th} \left(\frac{2n+1}{2l} \pi h \right), \quad (6)$$

$$b_{2n+1} = (-1)^n \frac{8l}{(2n+1)\pi^2},$$

h — глубина жидкости, $2l$ — ширина сосуда, m_1 — масса сосуда, m_2 — масса жидкости.

Уравнение частот имеет вид:

$$\omega^2 + k^2 = \omega^4 \sum \frac{b_{2n+1} \alpha_{2n+1}}{\omega^2 + \sigma_{2n+1}^2}. \quad (7)$$

Распределение корней легко исследовать графически (рис. 1).

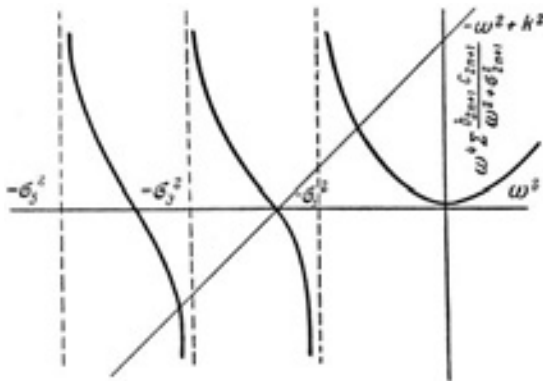


Рис. 1

Ряд $\sum b_{2n+1} \alpha_{2n+1}$ сходится, и если его сумма меньше или равна единице, то все корни уравнения чисто мнимые. Это, однако, всегда имеет место. В самом деле, оценим величину

$$D = \sum \frac{b_{2n+1} \alpha_{2n+1}}{1 + \sigma_{2n+1}^2 / \omega^2}.$$

Так как

$$D \leq \sum \frac{\operatorname{th}\left(\frac{2n+1}{2l} \pi h\right)}{h(2n+1)^2} = \frac{16}{\pi^3},$$

то

$$D \leq \frac{8}{\pi^2} \sum \frac{1}{(2n+1)^2} = 1.$$

Детальному исследованию этого частного примера посвящена статья Л.Н. Сретенского [2], в которой он, подсчитывая давление на стенки движущегося сосуда, приходит к аналогичному уравнению частот. Однако далее он делает вывод о возможности развивающихся колебаний. Последнее, как нами показано, неверно.

Ряд $\sum \frac{b_{2n+1} \alpha_{2n+1}}{\omega^2 + \sigma_{2n+1}^2}$, как это видно из (6), для любого $\omega^2 \neq -\sigma_{2n+1}^2$ сходится как $\frac{1}{n^4}$. Быстрая сходимость этого ряда обуславливает эф-

фективность метода при решении прикладных задач.

Для определения собственных частот может оказаться полезной следующая теорема:

Теорема. Сумма $\Delta_n = \left| \sigma_{2n+1}^2 + \omega_{2n+1}^2 \right|$ стремится к нулю с возрастанием числа n как величина $\frac{1}{n^2}$.

Через ω_{2n+1} мы обозначили корень уравнения частот, удовлетворяющий неравенству $-\sigma_{2n+3}^2 < \omega_{2n+1}^2 < \sigma_{2n+1}^2$.

Каждой из собственных частот $|\omega_i|$ может быть поставлена в соответствие приведенная масса сосуда равенством

$$M_i = \frac{K}{|\omega_i|^2}.$$

В общем случае M_i есть функция приведенной возвращающей силы K .

Литература

1. Жуковский Н.Е. О движении твердого тела, имеющего полости, наполненные однородной капельной жидкостью. Т. 3, с. 21. — М., 1936.
2. Сретенский Л.Н. Колебания жидкости в подвижном сосуде./Изв. АН СССР, ОТН, № 10 (1951), 1483—1494.

1952 г.

О колебаниях тяжелой идеальной и несжимаемой жидкости в сосуде

1. Как известно, потенциал скоростей малых движений жидкости в сосуде $\varphi(x, y, z, t)$ является функцией, гармонической внутри области τ , ограниченной стенками сосуда и плоскостью $z = 0$ свободной поверхности жидкости в положении равновесия, и удовлетворяющей граничным условиям:

на стенках:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0; \quad (1)$$

при $z = 0$:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = -\frac{1}{g} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}, \quad (2)$$

где g — ускорение силы тяжести.

Свободная поверхность определяется в этом случае условием:

$$\zeta(x, y, t) = -\frac{1}{g} \frac{\partial \varphi(x, y, 0, t)}{\partial t}. \quad (3)$$

2. Пусть $\{\varphi_n(x, y, z)\}$ — система функций, гармонических внутри τ , удовлетворяющих условию (1) и образующих полную ортонормированную систему функций на плоской фигуре S , являющейся сечением полости сосуда плоскостью $z = 0$.

Тогда потенциал φ можно искать в виде ряда:

$$\varphi = \sum_i f_i(t) \varphi_n. \quad (4)$$

Обозначая через a_{nm} коэффициенты Фурье в разложении при $z = 0$ функции $\partial \varphi_n / \partial z$:

Для опубликования в Докладах Академии наук СССР представлено академиком М.В. Келдышем.

$$\frac{\partial \varphi_n}{\partial z} = \sum_m a_{nm} \varphi_m(x, y, 0) \quad (5)$$

и используя условия (2), получим для определения функций $f_n(t)$ следующую бесконечную систему линейных уравнений:

$$f_n''(t) + g \sum_m a_{nm} f_m(t) = 0, \quad n, m = 1, 2, \dots \quad (6)$$

3. Пусть теперь функции $\{\psi_n(x, y)\}$ образуют некоторую полную ортонормированную на S систему. Положим

$$\zeta(x, y, t) = \sum_n q_n(t) \psi_n(x, y). \quad (7)$$

Тогда потенциал φ можно выразить формулой:

$$\varphi(x, y, z, t) = \iiint H(x, y, z, \xi, \eta, \zeta) \frac{\partial \varphi(\xi, \eta, \zeta, t)}{\partial n} d\sigma, \quad (8)$$

где H — функция Грина задачи Неймана, а интеграл распространен на всю поверхность, ограничивающую объем τ .

В силу (1) и (7) выражение (8) принимает вид:

$$\varphi(x, y, z, t) = \sum_n q_n'(t) \bar{\psi}_n(x, y, z),$$

где

$$\bar{\psi}_n = \int_S H(x, y, z, \xi, \eta, 0) \psi_n(\xi, \eta) d\xi d\eta.$$

Обозначая через b_{nm} коэффициенты Фурье в разложении

$$\bar{\psi}_n(x, y, 0) = \sum_m b_{nm} \psi_m(x, y), \quad (9)$$

получим из условия (3) следующую бесконечную систему уравнений для определения функций $q_n(t)$:

$$\sum_m b_{nm} q_m'' + g q_n = 0 \quad n, m = 1, 2, \dots \quad (10)$$

4. Собственными частотами главных колебаний будут корни характеристических уравнений (6) или (10), а для определения главных колебаний в общем случае нам надо разрешить одну из этих

систем. Возникает вопрос: каким должен быть базис $\{\varphi_n\}$ или $\{\psi_n\}$, чтобы система (6) или (10) распадалась на отдельные уравнения? Как нетрудно видеть, таким базисом является нормированная система собственных функций интегрального уравнения:

$$\psi_n(x, y) = \lambda_n \int_S H(x, y, 0, \xi, \eta, 0) \psi_n(\xi, \eta) d\xi d\eta, \quad (11)$$

так как в этом случае $b_{nm} = \delta_{nm} \frac{1}{\lambda_n}$, где δ_{nm} — символ Кронекера, и

система (10) приводится к виду

$$g_n'' + g\lambda_n q_n = 0. \quad (12)$$

Аналогично показывается, что $a_{nm} = \delta_{nm} \lambda_n$ т. е. функции $f_n(t)$ удовлетворяют той же системе дифференциальных уравнений (12).

5. Таким образом, мы приходим к следующей теореме:

Теорема. *Квадрат собственных частот свободных колебаний жидкости в сосуде равен произведению*

$$\zeta_n^2 = g\lambda_n,$$

где λ_n — собственные числа интегрального уравнения (11), а форма свободной поверхности, соответствующая главным колебаниям, определяется формулой

$$\zeta_n = A_n \sin(\sqrt{g\lambda_n} t + \theta_n) \psi_n(x, y),$$

где A_n и θ_n — произвольные постоянные, а ψ_n — собственные функции того же интегрального уравнения (11).

6. Вычислим энергию системы в переменных $q_n(t)$.

Кинетическая энергия T :

$$T = \frac{\rho}{2} \int_{\tau} (\nabla \varphi)^2 d\tau = \frac{\rho}{2} \sum \frac{q_n'^2}{\lambda_n};$$

потенциальная энергия U :

$$U = \frac{g\rho}{2} \int_s \zeta^2 dx dy = \frac{g\rho}{2} \sum q_n^2.$$

Составляя функцию Лагранжа $L = T - U$, мы убеждаемся что уравнения (12) суть уравнения Лагранжа второго рода малых движений жидкого континуума, если в качестве обобщенных координат возьмем счетную систему функций $\{q_n(t)\}$.

1952 г.

Задача о движении твердого тела, содержащего жидкие массы, имеющие свободную поверхность

Н.Е. Жуковским была рассмотрена в самой общей постановке задача о движении твердого тела, полости которого целиком наполнены несжимаемой жидкостью [1]. Данная работа посвящена анализу случая движения твердого тела при частичном заполнении полости. Более общая постановка задачи заставляет сузить класс рассматриваемых движений; мы ограничимся исследованием только малых движений около положения равновесия, т. е. внешние силы, действующие на сосуд, будем считать такими, что волны, возникающие в жидкости, обладают малыми амплитудами.

Рассматриваемая задача принципиально отличается от задачи Жуковского. Так, например, в случае, изученном Н.Е. Жуковским, можно ввести понятие эквивалентного твердого тела, т. е. такого твердого тела, движение которого при данных внешних силах эквивалентно движению тела с жидкостью. В нашем случае такого твердого тела не существует. Система сосуд — жидкость при наличии свободной поверхности будет системой с бесконечным числом степеней свободы, а это приводит к качественному отличию движения сосуда. Так, например, колебание физического маятника всегда устойчиво, как только его центр тяжести лежит ниже точки подвеса. В изучаемом случае последнее уже может быть не справедливо. Можно указать еще ряд простых примеров, иллюстрирующих это качественное различие.

Мы сохраняем основные предположения, принятые Н.Е. Жуковским: жидкость считаем идеальной и несжимаемой, движение жидкости в покоящемся сосуде — потенциальным. Таковым его можно считать и в последующие моменты времени относительно любой поступательно движущейся системы координат, если только массовые силы, действующие на жидкость, имеют силовую функцию. Последнее мы будем всегда предполагать. Более того, будем считать вектор напряженности массовых сил постоянным по направлению, а

его величину — функцией только времени. Таким образом, в качестве массовых сил рассматривается либо сила тяжести, либо сила инерции поступательного (параллельного некоторой прямой) движения.

Следовательно, в положении равновесия свободная поверхность представляет собой плоскость, перпендикулярную единичному вектору напряженности поля массовых сил $\vec{g}^0$.

В первых параграфах работы исследуется общий случай движения жидкости в подвижном и неподвижном сосудах; затем выясняется вид уравнений моментов и количества движения для случая малых движений сосуда около положения равновесия и выводится система дифференциальных уравнений движения системы сосуда с жидкостью. В последних параграфах рассматриваются несколько специальных случаев, имеющих определенный интерес для приложений. Конкретизация задач позволяет со значительной полнотой исследовать движение.

§ 1. Малые колебания тяжелой жидкости в сосуде*

1. Как известно, потенциал скоростей малых движений жидкости в сосуде $\varphi(x, y, z; t)$ является функцией, гармонической внутри области τ , ограниченной стенками сосуда и плоскостью $z=0$ свободной поверхности в положении равновесия и удовлетворяющей следующим граничным условиям:

$$\text{на стенках сосуда } \frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0, \quad (1.1)$$

$$\text{на поверхности } z=0 \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = -\frac{1}{g} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}, \quad (1.2)$$

где $-g$ — ускорение силы тяжести.

Свободная поверхность определяется в этом случае условием

$$\zeta(t; x, y) = -\frac{1}{g} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)_{z=0}. \quad (1.3)$$

2. Пусть $\{\varphi_n(x, y, z)\}$ — система функций, гармонических внутри τ , удовлетворяющих условию (1.1) и образующих полную ортонормированную систему функций на плоской фигуре S , являющейся сечением полости сосуда плоскостью $z=0$.

Потенциал φ можно искать в виде ряда

* Основные результаты этого параграфа изложены в нашей заметке [3].

$$\varphi(x, y, z; t) = \sum_n f_n(t) \varphi_n(x, y, z).$$

Обозначая через a_{nm} коэффициенты Фурье в разложении при $z=0$ функции $\frac{\partial \varphi_n}{\partial z}$:

$$\frac{\partial \varphi_n}{\partial z} = \sum_m a_{nm} \varphi_m \quad (1.4)$$

и используя условие (1.2), получим для определения функций f_n следующую бесконечную систему линейных дифференциальных уравнений второго порядка:

$$f_n'' + g \sum_m a_{nm} f_m = 0, \quad n=1, 2, \dots \quad (1.5)$$

В общем случае система (1.5) представляет собой систему совместных уравнений. В том частном случае, когда функции $\varphi_n(x, y, z)$ могут быть представлены в виде

$$\varphi_n(x, y, z) = \alpha_n(x, y) \beta_n(z),$$

система (1.5) распадается на отдельные уравнения, так как в этом случае

$$a_{nm} = \delta_{nm} \left(\frac{d\beta_n}{dz} \right)_{z=0},$$

где δ_{nm} — символ Кронекера, и мы сразу получаем уравнения главных колебаний

$$f_n'' + g \left(\frac{d\beta_n}{dz} \right)_{z=0} f_n = 0, \quad n=1, 2, \dots$$

3. Пусть функции $\{\psi_n(x, y)\}$ образуют некоторую полную ортонормированную на S систему. Положим

$$\zeta(t; x, y) = \sum_n q_n(t) \psi_n(x, y). \quad (1.6)$$

Тогда потенциал φ можно выразить следующей формулой:

$$\varphi(x, y, z; t) = \int_{\sigma} H(x, y, z; \xi, \eta, \zeta) \frac{\partial \varphi(\xi, \eta, \zeta)}{\partial n} d\sigma, \quad (1.7)$$

где H — функция Грина задачи Неймана и интеграл распространен по поверхности σ , ограничивающей объем τ .

В силу соотношений (1.1) и (1.6), выражение (1.7) принимает вид

$$\varphi(x, y, z; t) = \sum_{\sigma} q'_n(t) \bar{\psi}_n(x, y, z), \quad (1.8)$$

где

$$\bar{\psi}_n(x, y, z) = \int_S H(x, y, z; \xi, \eta, 0) \psi_n(\xi, \eta) d\xi d\eta. \quad (1.8')$$

Обозначая через b_{nm} коэффициенты Фурье в разложении

$$\bar{\psi}_n(x, y, 0) = \sum_m b_{nm} \psi_m(x, y),$$

получим из условия (1.3) следующую бесконечную систему уравнений для определения функций $q_n(t)$:

$$\sum_m b_{nm} q''_m + g q_n = 0. \quad (1.9)$$

4. Для определения главных колебаний и собственных частот нам надо разрешить одну из систем (1.5) или (1.9), которые в общем случае являются бесконечными системами совместных линейных уравнений. Если это возможно, то собственными частотами будут корни характеристических уравнений (1.5) или (1.9).

Возникает вопрос: каким должен быть базис $\{\psi_n(x, y, z)\}$ или $\{\psi_n(x, y)\}$, чтобы система (1.5) или (1.9) в общем случае распадалась на отдельные уравнения? Как нетрудно установить, таким базисом является нормированная система собственных функций интегрального уравнения

$$\psi_n(x, y) = \lambda_n \int_S H(x, y, 0; \xi, \eta, 0) \psi_n(\xi, \eta) d\xi d\eta. \quad (1.10)$$

В самом деле, в этом случае

$$b_{nm} = \delta_{nm} \frac{1}{\lambda_n}, \quad (1.11)$$

где δ_{nm} — символ Кронекера, и система (1.9) приводится к виду

$$q''_n + g \lambda_n q_n = 0. \quad (1.12)$$

Далее, положим

$$\psi_n(x, y) = \lambda_n \varphi_n(x, y, 0), \quad q'_n = f_n.$$

Тогда в линейном приближении тождество

$$\frac{d\zeta}{dt} = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)_{z=0}$$

примет вид

$$\sum_n f_n(t) \lambda_n \varphi_n(x, y, 0) = \sum_n f_n(t) \left(\frac{\partial \varphi_n}{\partial z} \right)_{z=0},$$

откуда находим, что

$$a_{nm} = \delta_{nm} \lambda_n,$$

т. е. функции $f_n(t)$ удовлетворяют той же системе дифференциальных уравнений (1.12).

5. Таким образом, мы приходим к следующей теореме:

Теорема. Квадрат собственной частоты свободных колебаний, жидкости в сосуде σ_n^2 равен произведению

$$\sigma_n^2 = g \lambda_n,$$

где λ_n — собственные числа интегрального уравнения (1.10), а форма свободной поверхности, соответствующая главным колебаниям, определяется формулой

$$\zeta_n(x, y; t) = A_n \sin(\sqrt{g \lambda_n} t + \theta_n) \psi_n(x, y),$$

где A_n и θ_n — произвольные постоянные и ψ_n — собственные функции того же интегрального уравнения.

6. Вычислим энергию жидкости в переменных $q_n(t)$. Кинетическая энергия T выражается формулой

$$T = \frac{\rho}{2} \int_{\tau} (\nabla \varphi)^2 d\tau.$$

Применяя теорему Грина и равенство (1.6), приведем эту формулу к виду

$$T = \frac{\rho}{2} \sum_n \frac{q_n'^2}{\lambda_n}. \quad (1.13)$$

Делая замену (1.6) в выражении потенциальной энергии U :

$$U = \frac{g\rho}{2} \int_S \zeta^2 dx dy,$$

получим:

$$U = \frac{g\rho}{2} \sum_n q_n^2. \quad (1.14)$$

Составляя функцию Лагранжа $L = T - U$, мы убеждаемся, что уравнения (1.12) суть уравнения Лагранжа второго рода для малых движений жидкости, если в качестве обобщенных координат взять счетную систему функций $q_n(t)$.

Примечание. Так как q_n — коэффициенты разложения свободной поверхности $\zeta(x, y; t)$ в ряд Фурье, то для любого момента времени ряд (1.14) сходится. Имея в виду, что

$$q_n(t) = A_n \sin(\sqrt{g\lambda_n}t + \theta_n),$$

убеждаемся также в сходимости ряда (1.13).

7. Результаты данного параграфа легко распространить на тот случай, когда сосуд движется поступательно с некоторым ускорением параллельно линии действия силы тяжести (или в случае отсутствия притяжения — параллельно некоторой прямой).

Система уравнений (1.12) будет при этом иметь вид

$$q_n'' + \lambda_n g(t) q_n = 0 \quad (n=1, 2, \dots), \quad (1.12')$$

где $g(t)$ следует считать заданной функцией времени. Так, например, если мы будем изучать колебания тяжелой жидкости в сосуде, стоящем на платформе, вибрирующей по синусоидальному закону, то система уравнений (1.12') примет вид

$$q_n'' + \lambda_n (g_0 + a \cos \omega t) q_n = 0, \quad (1.12'')$$

т. е. мы увидим, что каждая из переменных q_n удовлетворяет уравнению Матье. При определенных значениях a и ω стоячие волны будут иметь увеличивающуюся со временем амплитуду.

Однако развивающиеся колебания в жидкости могут возникнуть и при монотонном изменении ускорения. Так, например, можно показать, что если $g'(t) \leq \varepsilon < 0$, где ε — некоторая отрицательная постоянная, то в сосуде колебания будут развивающимися.

В самом деле, уравнение

$$q_n'' + \lambda_n g(t) q_n = 0$$

при помощи замены независимого переменного

$$\tau = \int_0^t [g(t)]^{\frac{1}{2}} dt$$

может быть приведено к виду

$$\frac{d^2 q_n}{d\tau^2} + \frac{1}{2} \frac{d}{d\tau} (\ln g) \frac{dq_n}{d\tau} + \lambda_n q_n = 0.$$

Составляя выражение энергии, отнесенной к координате q_n :

$$2V_n = \left(\frac{dq_n}{d\tau} \right)^2 + \lambda_n q_n^2,$$

убеждаемся, что если $\frac{dg}{d\tau} \geq 0$, то движение устойчиво, так как $V_n' \leq 0$.

В противном случае энергия V_n , отнесенная к каждой из координат, будет увеличиваться.

Характер изменения амплитуды стоячих волн в ряде случаев можно оценить количественно, пользуясь известными формулами асимптотических представлений:

$$q_n(t) = \frac{A_n}{\sqrt[4]{g(t)}} \cos \left(\int_0^t \sqrt{\lambda_n g(t)} dt + \theta_n \right),$$

где A_n и θ_n — произвольные постоянные, так как во многих практически важных задачах произведение $\lambda_n g$ велико даже для малых номеров n .

§ 2. Движение жидкости в движущемся сосуде

1. Свяжем с твердым телом подвижную систему координат ξ, η, ζ так, чтобы невозмущенная поверхность жидкости совпала с плоскостью $\xi O_1 \eta$. Обозначим через O точку, совпадающую в положении равновесия с центром тяжести системы сосуд — жидкость и неподвижную относительно сосуда. Свяжем с точкой O поступательно движущуюся систему координат x, y, z , такую, что в положении равновесия орты обеих систем коллинеарны. Будем предполагать, что оси подвижной системы координат x, y, z , все время параллельны осям некоторой «неподвижной» системы отсчета X, Y, Z .

Если переносное движение сосуда — поступательное, то движение жидкости относительно сосуда будет потенциальным, так как силы инерции, определяющие относительное движение жидкости, будут обладать силовой функцией

$$U(\xi, \eta, \zeta) = -X''\xi - Y''\eta - Z''\zeta,$$

где X, Y, Z — координаты начала подвижной системы отсчета.

Если переносное движение будет вращательным, то относительное движение будет вихревым.

2. Рассмотрим сначала движение жидкости относительно сосуда, который движется поступательно. Это задача эквивалентна задаче о колебаниях жидкости в неподвижном сосуде под действием сил, имеющих потенциал

$$V = F_\xi \xi + F_\eta \eta - g(t)\zeta.$$

Пользуясь интегралом Коши, можно представить уравнение свободной поверхности в виде

$$\zeta(\xi, \eta; t) = -\frac{1}{g} \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) \right]_{\zeta=0} + F_\xi \xi - F_\eta \eta. \quad (2.1)$$

Обозначая через $\{\varphi_n(\xi, \eta)\}$ систему собственных функций интегрального уравнения (1.10), а через λ_n — его собственные числа, положим:

$$\left. \begin{aligned} \zeta(\xi, \eta; t) &= \sum_n q_n(t) \varphi_n(\xi, \eta), \\ \varphi(\xi, \eta, 0; t) &= \sum_n q'_n(t) \frac{\varphi_n(\xi, \eta)}{\lambda_n}. \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

Разлагая функции ξ и η в ряды Фурье на S по собственным функциям $\{\varphi_n\}$:

$$\xi = \sum_n \beta_{\xi n} \varphi_n,$$

$$\eta = \sum_n \beta_{\eta n} \varphi_n$$

и сравнивая коэффициенты при одинаковых функциях в уравнении (2.1), получим следующую бесконечную систему уравнений для определения функций q_n :

$$q_n'' + g\lambda_n q_n = F_\xi \lambda_n \beta_{\xi n} + F_\eta \lambda_n \beta_{\eta n}. \quad (2.3)$$

Из уравнений (2.3) видно, что резонансными являются частоты лишь тех индексов n $\sigma_n^2 = g\lambda_n$, для которых один из коэффициентов $\beta_{\xi n}$ или $\beta_{\eta n}$ отличен от нуля. Так, например, если сосуд имеет форму параллелепипеда, то

$$\beta_{\xi 2n} = \beta_{\eta 2n} = 0,^*$$

т. е. резонансными являются только частоты нечетных индексов, а амплитуды стоячих волн четных индексов не могут быть изменены движением сосуда в горизонтальной плоскости.

3. В случае произвольно движущегося сосуда относительное движение жидкости будет вихревым. Поэтому будем рассматривать движение жидкости относительно системы координат x, y, z . Следуя Н.Е. Жуковскому, выразим потенциал этого движения в координатах ξ, η, ζ :

$$\varphi = \varphi(\xi, \eta, \zeta; t).$$

* См. § 7.

Эта функция на стенках полости должна удовлетворять граничному условию

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = v_n,$$

где v_n — нормальная составляющая скорости соответствующей точки поверхности полости относительно системы координат x, y, z . В силу предположения о малости колебаний, скорость частиц жидкости при $\zeta=0$ будет равна сумме

$$v_n + \frac{d\zeta}{dt}.$$

Поэтому потенциал скоростей можно представить в виде

$$\begin{aligned} \varphi(\xi, \eta, \zeta; t) = & \int_{\sigma} H(\xi, \eta, \zeta; \xi', \eta', \zeta') v_n(\xi', \eta', \zeta') d\sigma_{\xi\eta\zeta} + \\ & + \int_s H(\xi, \eta, 0; \xi', \eta', 0) \frac{d\zeta(\xi', \eta')}{dt} d\xi' d\eta'. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Первое слагаемое — не что иное как потенциал Н.Е. Жуковского [1]. Так как скорость v_n является линейной функцией проекций угловой скорости сосуда $\omega_\xi, \omega_\eta, \omega_\zeta$, то первое слагаемое может быть представлено в виде

$$\tilde{\varphi}(\xi, \eta, \zeta; t) = \omega_\xi(t) \psi_\xi(\xi, \eta, \zeta) + \omega_\eta(t) \psi_\eta(\xi, \eta, \zeta) + \omega_\zeta(t) \psi_\zeta(\xi, \eta, \zeta).$$

Функции $\psi_\xi, \psi_\eta, \psi_\zeta$ мы будем называть *функциями Жуковского*. Н.Е. Жуковский показал [1], что они являются гармоническими внутри τ и удовлетворяют на σ следующим граничным условиям:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \psi_\xi}{\partial n} &= (\eta - \eta_0) \gamma - (\zeta - \zeta_0) \beta, \\ \frac{\partial \psi_\eta}{\partial n} &= (\zeta - \zeta_0) \alpha - (\xi - \xi_0) \gamma, \\ \frac{\partial \psi_\zeta}{\partial n} &= (\xi - \xi_0) \beta - (\eta - \eta_0) \alpha, \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

где α, β, γ — направляющие косинусы внутренней нормали, а ξ_0, η_0, ζ_0 — координаты точки O .

Итак, потенциал скоростей движения жидкости относительно системы отсчета x, y, z в случае произвольного движения сосуда может быть представлен выражением

$$\varphi = \omega_{\xi} \Psi_{\xi} + \omega_{\eta} \Psi_{\eta} + \omega_{\zeta} \Psi_{\zeta} + \sum_n q'_n \bar{\varphi}_n,$$

где $\bar{\varphi}_n(\xi, \eta, \zeta)$ определяются по формулам (1.8').

Для определения функций $q_n(t)$ мы воспользуемся уравнением свободной поверхности, которое в этом случае будет иметь вид

$$\zeta(\xi, \eta; t) = -\frac{1}{g} \left\{ \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) \Big|_{\zeta=0} - [F_{\xi} + g_{\xi}] \xi - [F_{\eta} + g_{\eta}] \eta \right\}, \quad (2.6)$$

где g_{ξ} и g_{η} — проекции ускорения силы тяжести на оси $O_1\xi$ и $O_1\eta$. Определим составляющие векторов $\bar{F}$ и $\bar{g}$. Положение единичных векторов $\bar{\xi}^0, \bar{\eta}^0$ и $\bar{\zeta}^0$ относительно неподвижной системы координат определим параметрами θ_1, θ_2 и θ_3 (см. фиг. 1). Они аналогичны углам скольжения, атаки и крена, вводимым обычно в теории самолета. Пренебрегая малыми второго порядка, получим:

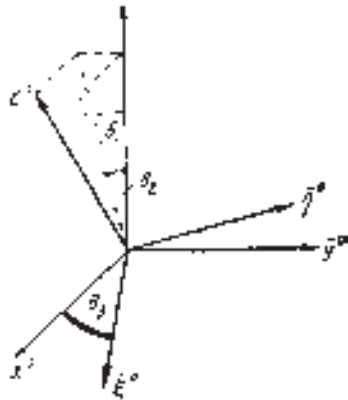
$$\left. \begin{aligned} \bar{\xi}^0 &= \bar{x}^0 - \theta_2 \bar{z}^0 + \theta_3 \bar{y}^0, \\ \bar{\eta}^0 &= \bar{y}^0 - \theta_1 \bar{z}^0 - \theta_3 \bar{x}^0, \\ \bar{\zeta}^0 &= \bar{z}^0 + \theta_2 \bar{x}^0 - \theta_1 \bar{y}^0, \\ \bar{\omega} &= \theta'_1 \bar{\xi}^0 + \theta'_2 \bar{\eta}^0 + \theta'_3 \bar{\zeta}^0, \end{aligned} \right\} \quad (2.7)$$

и, следовательно, с той же точностью

$$\begin{aligned} X'' \bar{X}^0 &= X'' \bar{\xi}^0, \\ Y'' \bar{Y}^0 &= Y'' \bar{\eta}^0, \end{aligned}$$

т. е. $F_{\xi} = -X''$, $F_{\eta} = -Y''$, и аналогично

$$g_{\xi} = g \theta_2, \quad g_{\eta} = -g \theta_1.$$



Фиг. 1

Разлагая в ряды Фурье функции Жуковского:

$$\psi_{\xi}(\xi, \eta, 0) = \sum_n \delta_{\xi n} \varphi_n, \quad \psi_{\eta}(\xi, \eta, 0) = \sum_n \delta_{\eta n} \varphi_n, \quad \psi_{\zeta}(\xi, \eta, 0) = \sum_n \delta_{\zeta n} \varphi_n, \quad (2.8)$$

из уравнения (2.6) получим следующую бесконечную систему уравнений для определения функций $q_n(t)$:

$$q_n'' + \sigma_n^2 q_n + X'' \lambda_n \beta_{\xi n} + Y'' \lambda_n \beta_{\eta n} - \theta_1'' \lambda_n \delta_{\xi n} + \theta_2'' \lambda_n \delta_{\eta n} + \\ + \theta_3'' \lambda_n \delta_{\zeta n} - \theta_1 g \lambda_n \beta_{\xi n} + \theta_2 g \lambda_n \beta_{\eta n} = 0, \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.9)$$

Каждое из уравнений этой системы может быть проинтегрировано независимо от других.

§ 3. Основные уравнения динамики системы сосуд — жидкость

В этом параграфе мы выясним тот вид, который принимают основные теоремы динамики в применении к данной системе в проекциях на выбранные нами оси.

1. *Количество движения сосуда с жидкостью и уравнение количества движения.* Как мы видели, движение твердого тела определяет движение заключенной в нем жидкости. В свою очередь, жидкость оказывает давление на стенки полости, которое зависит от скоростей частиц жидкости и от формы свободной поверхности. В общем случае главный вектор сил давления отличен от нуля, поэтому движение жидкости влияет на движение твердого тела. Так как свободная поверхность жидкости определяется счетным множеством коэффициентов Фурье ее разложения, то система сосуд — жидкость, если жидкость лишь частично его заполняет, представляет собой систему со счетным числом степеней свободы. Движение твердого тела, содержащего жидкие массы, мы будем представлять как сумму движений, поступательного и вращательного вокруг некоторой точки, неподвижной относительно сосуда. Такая точка зрения, как мы это видели, полностью применима и к исследованию жидкости в сосуде.

Введем следующие обозначения:

m_1 — масса сосуда,

m_2 — масса жидкости,

$M = m_1 + m_2$ — масса системы,

$\bar{v}_0$ — абсолютная скорость точки O ,

$\bar{v}$ — скорость частиц относительно системы x, y, z .

Тогда количество движения системы может быть представлено в следующем виде:

$$\bar{K} = M \bar{v}_0 + \sum_i m_i \bar{v}_i + \rho \int_{\tau} \bar{v} d\tau, \quad (3.1)$$

где сумма $\sum$ распространена на все частицы сосуда. Так как $\sum_i m_i \bar{v}_i = m_1 \bar{v}_1$, где $\bar{v}_1$ — относительная скорость центра тяжести сосуда, то (3.1) можно переписать в виде

$$\bar{K} = M \bar{v}_0 + m_1 \bar{v}_1 + \rho \int_{\tau} \nabla \tilde{\varphi} d\tau.$$

Слагаемое

$$\rho \int_{\tau} \nabla \tilde{\varphi} d\tau$$

представляет собой количество движения, которое имела бы жидкость, если бы свободную поверхность мы заменили твердой крышкой; поэтому

$$\rho \int_{\tau} \nabla \tilde{\varphi} d\tau = m_2 \bar{v}_2,$$

где $\bar{v}_2$ — относительная скорость центра тяжести отвердевшей жидкости в объеме τ . В силу несжимаемости жидкости имеем:

$$m_1 \bar{v}_1 + m_2 \bar{v}_2 = 0.$$

Поэтому получим окончательно:

$$\bar{K} = M \bar{v}_0 + \rho \int_{\tau} \nabla \bar{\varphi} d\tau. \quad (3.2)$$

Таким образом, количество движения системы сосуд — жидкость равно количеству движения, которое имел бы сосуд, если бы жидкость в нем отвердела, плюс количество движения, происходящего вследствие волн. Последнее слагаемое равно произведению массы жидкости на скорость движения ее центра тяжести относительно точки O .