Боголюбов Н.Н.

Избранные труды по математике

МОСКВА
ФИЗМАТЛИТ ®

УДК 517.95
ББК 22.311
Б 74

Издание осуществлено при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований по проекту 04-01-14118д

Боголюбов Н. Н. **Избранные труды по математике** / Под ред. В.С. Владимирова, А.Д. Суханова; ред.-сост. А.Д. Суханов. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. — 560 с. — ISBN 5-9221-0616-3.

Книга содержит избранные статьи академика Н.Н. Боголюбова по математике за период 1925–1990 гг. Эти работы в свое время открыли новые направления в вариационном исчислении, теории дифференциальных уравнений, теории вероятностей и сыграли решающую роль в становлении математических основ нелинейной механики, статистической механики и квантовой теории поля.

Издание, содержащее работы, признанные ныне классическими, будет полезно научным работникам, аспирантам и студентам, специализирующимся в области математики, математической физики и истории математики.

ISBN 5-9221-0616-3

СОДЕРЖАНИЕ

От редакции

Предлагаемая вниманию читателей книга представляет собой сборник избранных трудов по математике академика Н. Н. Боголюбова. Ее автор — всемирно известный ученый, прославивший отечественную науку выдающимися результатами в области математики, нелинейной и статистической механики, квантовой теории поля и теории элементарных частиц. Общепризнано, что труды Боголюбова входят в сокровищницу мировой науки. Однако многие его работы либо давно не переиздавались, либо известны только по журнальным публикациям, докладам и препринтам, причем не всегда доступным русскоязычному читателю. Это обстоятельство обусловило необходимость переиздания наиболее важных его работ.

Инициатива издания данного сборника была проявлена в период празднования 95-летия со дня рождения Н. Н. Боголюбова руководством Объединенного института ядерных исследований (г. Дубна) и Математического института им. В. А. Стеклова РАН. Было признано целесообразным издать отдельно работы Боголюбова по математике, охватывающие период с 1925 по 1990 г. Вышедшее в свет в 1969–1971 гг. трехтомное прижизненное издание его работ (*Боголюбов Н. Н.* Избранные труды. Киев: Наукова думка) содержало только 15 собственно математических работ, опубликованных до 1958 г. При подготовке данного издания были уточнены тексты ранее сделанных переводов, исправлены замеченные опечатки в формулах, а также впервые переведен ряд статей, опубликованных ранее на английском, французском и немецком языках. Редакция выражает благодарность А. В. Беркову, Ю. П. Рыбакову и С. В. Козыреву за проделанную работу по переводу и сотрудникам издательского отдела ОИЯИ во главе с Т. Я. Жабицкой за качественный набор и редактирование рукописи.

Издание математических трудов Н. Н. Боголюбова, содержащее работы, признанные ныне классическими, бесспорно, будет полезно научным работникам, аспирантам и студентам, специализирующимся в области математики, математической физики и истории математики.

В. С. Владимиров, А. Д. Суханов

О ПРИНЦИПЕ РЭЛЕЯ В ТЕОРИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ И ОБ ОДНОМ ЭЙЛЕРОВОМ МЕТОДЕ В ВАРИАЦИОННОМ ИСЧИСЛЕНИИ [*)]

Совместно с Н. М. Крыловым

Как известно из механических теорий, переход от дискретного к непрерывному можно осуществить двумя различными способами.

Еще в период становления анализа бесконечно малых математики XVIII в. ввели переход к пределу в уравнениях движения дискретной системы и отсюда получили известные уравнения математической физики, которые, таким образом, можно считать уравнениями движения предельной непрерывной системы.

Впрочем, этот переход к пределу можно осуществить не только в уравнениях задачи, но и в решениях этих уравнений в конечных разностях.

Отсюда возникает вопрос, приводят ли к одному и тому же результату оба указанных способа перехода к пределу.

Математики и в особенности физики, руководствуясь интуицией, давали на этот трудный вопрос положительный ответ, и такие ученые, как Рэлей и Пуанкаре, использовали принцип Рэлея как эвристический метод для исследования некоторых важных задач математической физики, в особенности для так называемых краевых задач (boundary value problems).

Эта область, достойная широких математических исследований, к сожалению, еще мало разработана, в чем читатель может лично убедиться,

---

[*)] Про Rayleigh'ів принцип в теорії диференціальних рівнянь математичної фізики та про одну ейлерову методу в варіяційнім численні // Труди фізико-математичного відділу Української Академії наук. 1926. Т. 3, вип. 3. С. 3–20.

Поводом к этому исследованию послужила беседа на судне «Caronia» по дороге в Канаду (на математический конгресс в Торонто, 1924 г.) с известным английским ученым Л. Ричардсоном, который обратил мое внимание на эту задачу; в данной статье я с моим учеником Н. Боголюбовым даем решение этой задачи (*проф. Н. Крылов).*

обратившись, например, к статье М. Бохера о работах Штурма [1], а также к недавно появившейся статье Р. Кармичеля [2].

Одна статья М.順 順Планшереля [3] (которая появилась недавно) преследовала цель математически обосновать принцип Рэлея, но рассуждения автора, а также некоторых других ученых, изучавших этот же вопрос [4], не дают, на наш взгляд, возможности подсчитать порядок малости ошибки, которая появляется, если ограничиться n-м приближением.

Вычисление этой ошибки интересно прежде всего с практической точки зрения, ибо во многих вопросах инженерных наук приходится иметь дело фактически не с дифференциальными уравнениями, а с уравнениями в конечных разностях, получаемыми при помощи условий задачи, причем решают их инженеры алгебраически.

Итак, мы ставим своей целью здесь изложить *способы вычисления порядка малости ошибки*, рассматривая, для краткости изложения, лишь наипростейшие случаи дифференциальных уравнений, так как обобщение в различных направлениях можно сделать без особых затруднений, в чем читатель сам легко может убедиться.

§1. Вычисление порядка малости ошибки в n-м приближении

Вычислим порядок малости в случае дифференциальной системы

$$\begin{aligned} &\frac{d^2y(x)}{dx^2} = q(x)y(x) + f(x) \quad (q(x) > 0), \\ &y(0) = y(1) = 0, \end{aligned} \tag{1}$$

т. е. порядок малости выражения

$$|y(x_k) - y^{(n)}(x_k)| = |y_k - y_k^{(n)}|,$$

где $y_k^{(n)}$ — решения системы в конечных разностях

$$\begin{aligned} &\frac{\Delta^2 y_k^{(n)}}{\Delta x^2} = q(x_k)y_k^{(n)} + f(x_k) \quad (k = 0, 1, 2, \ldots, n-2), \\ &y_0^{(n)} = y_n^{(n)} = 0, \quad \Delta x = \frac{1}{n}. \end{aligned} \tag{2}$$

[1] *Bôcher M.* The Published and Unpublished Work of Charles Sturm on Algebraic and Differential Equations // Bull. Am. Math. Soc. 1911. V. 18, No. l.

[2] *Carmichael R. D.* Boundary Value and Expansion Problems: oscillation, comparison and expansion theorems // Am. J. Math. 1922. V. 44, No. 2.

[3] *Plancherel M.* Sur la Méthode d'integration de Ritz // Bull. des Sci. Math. 2-e ser. 1923. V. XLVII.

[4] *Robbins.* A Method in the Calculus of Variations // Am. J. Math. 1917. V. XXXIX.

Очевидно, что функция Грина

$$G(x,t) = \begin{cases} (1-x)t, & t \leqslant x, \\ (1-t)x, & t \geqslant x, \end{cases}$$

соответствующая дифференциальной системе

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 0, \quad y(1) = y(0) = 1, \tag{2'}$$

сливается в точках деления интервала $(0,1)$ с функцией Грина

$$G_{i,k} = G^{(n)}(r_i, t_k) = \begin{cases} \left(1 - \dfrac{i}{k}\right)\dfrac{k}{n}, & k \leqslant i, \\ \left(1 - \dfrac{k}{n}\right)\dfrac{i}{n}, & k \geqslant i, \end{cases}$$

которая соответствует системе в конечных разностях

$$\frac{\Delta^2 y_k^{(n)}}{\Delta x^2} = 0, \quad y_0^{(n)} = y_n^{(n)} = 0 \quad (k = 0, 1, 2, \ldots, n-2). \tag{2''}$$

Приняв это во внимание, представим системы (1) и (2) в виде

$$\begin{gathered} y(x) = -\int\limits_0^1 G(x,t)q(t)y(t)dt + F(x), \\ y_k^{(n)} = -\sum_{i=0}^{n} G(x_k, t_i)q_i y_i^{(n)} \Delta t + F_n(x_k), \end{gathered} \tag{3}$$

где

$$\begin{gathered} F(x) = -\int\limits_0^1 G(x,t)f(t)dt, \\ F(x_k) = -\sum_{1}^{k} G(x_k, t_i)f(t_i)\Delta t. \end{gathered} \tag{4}$$

Отсюда

$$(y_k^{(n)} - y_k) = -\sum_{i=0}^{n} G(x_k, t_i)q_i(y_i^{(n)} - y_i)\Delta t + \varepsilon_k^{(n)}, \tag{5}$$

где

$$\varepsilon_k^{(n)} = -\left[\sum_{i=0}^{n} G(x_k, t_i)q_i y_i \Delta t - \int\limits_0 G(x_k, t)q(t)y(t)dt\right] + [F_n(x_k) - F(x_k)]$$

имеет порядок малости $1/n^2$. Действительно, благодаря краевым условиям суммы, образованные по Риману для определенного интеграла, совпадают с формулой трапеции, а эта формула в нашем случае точна до порядка малости $1/n^2$, если $f'(x)$ и $q'(x)$ удовлетворяют условию Липшица, ибо функция Грина имеет, как известно, первую производную ограниченной вариации.

Умножая (5) на $(y_k^{(n)} - y_k)q_k\Delta t$ и суммируя по k, получаем

$$\sum_{k=0}^{n} q_k[y_k^{(n)} - y_k]^2\Delta t = -\sum_k\sum_i G(x_k, t_i)q_iq_k[y_i^{(n)} - y_i][y_k^{(n)} - y_k]\Delta x\Delta t + \\ + \sum_{k=0}^{n} q_k\varepsilon_k^{(n)}[y_k^{(n)} - y_k]\Delta t. \quad (6)$$

Способом, аналогичным тому, который используют в теории интегральных уравнений [1]), можно показать, что

$$\sum_k^n\sum_i^n G_{ki}q_iq_kh_ih_k\Delta x\Delta t > 0, \quad (7)$$

какой бы ни была функция $h(x)$. Поэтому из (6) на основании неравенства Коши находим

$$\sum_{k=0}^{n} q_k[y_k^{(n)} - y_k]^2\Delta t \leqslant \sqrt{\max|\varepsilon_k^{(n)}|^2}\sqrt{\sum_{k=0}^{n} q_k^2[y_k^{(n)} - y_k]^2\Delta t}\,, \quad (8)$$

откуда

$$\sum_{k=0}^{n} q_k[y_k^{(n)} - y_k]^2\Delta t < \max|\varepsilon_k^{(n)2}q|. \quad (9)$$

Но из (5), очевидно, получим

$$|y_k^{(n)} - y_k| \leqslant \left|\sum_{i=0}^{n} G(x_k, t_i)q_i(y_i^{(n)} - y)\Delta t\right| + |\varepsilon_k^{(n)}| \leqslant \\ \leqslant \sqrt{\sum_{i=0}^{n} G_{ki}^2q_i\Delta t}\sqrt{\sum_{i=0}^{n} q_i[y_i^{(n)} - y_i]^2\Delta t} + |\varepsilon_k^{(n)}|,$$

а значит,

$$|y_k^{(n)} - y_k| \leqslant M|\varepsilon_k^{(n)}|,$$

[1]) Если доказывается, что «ядро» $G(x,t)q(x)q(t)$ определенно положительное.

где M — постоянная, и порядок малости $|\varepsilon_k^{(n)}|$ равен $1/n^2$, если $f(x)$ и $q(x)$ ограничить вышеуказанными условиями.

Это следствие дает нам одновременно как математическое обоснование принципа Рэлея, так и искомый порядок приближения.

§2. Общий случай

Исследование общего случая

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \lambda q(x)y = f(x), \quad y(0) = y(1) = 0 \tag{10}$$

способом, которым мы пользовались в предыдущем параграфе, приводит к формуле

$$y_k^{(n)} - y_k = -\lambda \sum_{i=0}^{n} G(x_k, t_i) q_i (y_i^{(n)} - y_i)\Delta t + \varepsilon_k^{(n)}, \tag{11}$$

где

$$\varepsilon_k^{(n)} = -\lambda \left[\sum_{i=0}^{n} G(x_k, t_i) q_i y_i \Delta t - \int_0^1 G(x_k, t) q(t) y(t) dt \right] + F_n(x_k) - F(x_k).$$

Воспользовавшись соображениями, обычно применяемыми в теории интегральных уравнений для вывода известного разложения Шмидта, получим

$$y_i^{(n)} - y_i = -\sum_{k=1}^{n-2} z_i^{(k)} \frac{\sum\limits_{i=0}^{n} \varepsilon_i^{(n)} q_i z_i^{(n)} \Delta t}{\lambda - \lambda_k^{(n)}} - \varepsilon_i^{(n)}, \tag{12}$$

где $z_i^{(k)}$ $(k = 1, 2, \ldots, n-2)$ являются решениями однородной системы в конечных разностях

$$\begin{gathered} \frac{\Delta^2 z_i^{(k)}}{\Delta x^2} = \lambda_k^{(n)} q_i z_i^{(k)} \quad (k = 1, 2, \ldots, n-2), \\ z_0^{(k)} = z_n^{(k)} = 0; \end{gathered} \tag{13}$$

они соответствуют значениям параметра λ: $\lambda_1^{(n)}, \lambda_2^{(n)}, \ldots, \lambda_{n-2}^{(n)}$, следовательно, их можно назвать «разностными характеристическими числами».

Приняв во внимание тождество

$$\lambda - \lambda_k^{(n)} = \lambda - \lambda_k + \lambda_k - \lambda_k^{(n)},$$

заметим, что трудность вопроса состоит, таким образом, в вычислении порядка малости $|\lambda_k - \lambda_k^{(n)}|$. Допустив, что порядок малости $|\lambda_k - \lambda_k^{(n)}|$ равен $1/n$

(см. § 3) и что λ_k является характеристическим числом, которое ближе всех лежит к рассматриваемому значению параметра λ, легко получим из (12)

$$\sum_{i=0}^{n} q_i[y_i^{(n)} - y_i]^2 \Delta t \leqslant \frac{2}{|\lambda - \lambda_k^{(n)}|^2} \sqrt{\sum_{i=0}^{n} \varepsilon_i^{(n)2} \Delta t} + 2\sum_{i=0}^{n} \varepsilon_i^{(n)2} q_i \Delta t \leqslant \frac{M}{d} |\varepsilon_i^{(n)}|,$$

где $|\lambda - \lambda_k| = d$, а M — некоторая числовая постоянная.

Применяя соображения, изложенные в конце § 1, можем теперь вычислить искомую степень приближения.

§3. Вычисление характеристических чисел и функций

Для того чтобы вычислить первое характеристическое число, прежде всего обратим внимание на то, что максимум двойной суммы

$$\sum_{i,j} G_{ij} h_i h_j \Delta x \Delta t \tag{14}$$

при условии

$$\sum_{i} q_i h_i^2 \Delta t = 1 \tag{15}$$

(где G_{ij} — функция Грина для системы $(2'')$, умноженная на $q_i q_j$) является не чем иным, как $1/\lambda_1^{(n)}$, где $\lambda_1^{(n)}$ представляет собой первое разностное характеристическое число, т. е. первое значение параметра λ, для которого система

$$\frac{\Delta^2 y_k^{(n)}}{\Delta x^2} = \lambda q(x_k) y_k^{(n)}, \quad y_0^{(n)} = y_n^{(n)} = 0 \tag{16}$$

имеет решение, отличное от нуля.

Заметим также, что

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda_1^{(n)}} - \frac{1}{\lambda_1} &= \sum_{i,j}^{n} G_{ij} h_i^{(n)} h_j^{(n)} \Delta x \Delta t - \int_0^1\!\!\int_0^1 G(x,t)\varphi_1(x)\varphi_1(t)\,dx dt = \\ &= \left(\sum_{i,j}^{n} G_{ij} h_i^{(n)} h_j^{(n)} \Delta x \Delta t - \sum_{i,j}^{n} G_{ij} h_i h_j \Delta x \Delta t \right) + \\ &\quad + \left(\sum_{i,j}^{n} G_{ij} h_i h_j \Delta x \Delta t - \int_0^1\!\!\int_0^1 G(x,t)\varphi_1(x)\varphi_1(t)\,dx dt \right), \end{aligned} \tag{17}$$

где

$$\sum_{i=0}^{n} q_i h_i^2 \Delta t = 1, \quad \sum_{i=0}^{n} q_i h_i^{(n)2} \Delta t = 1,$$

причем $h_i^{(n)}$ дают двойной сумме (14) при условиях (15) абсолютный максимум. Следовательно, первая разность второй части (17) является положительной, а разность $1/\lambda_1^{(n)} - 1/\lambda_1$ — отрицательной, так как $\varphi_1(x)$ — характеристическая функция; таким образом,

$$\left| \frac{1}{\lambda_1^{(n)}} - \frac{1}{\lambda_1} \right| = \left| \sum_{i,j}^{n} G_{ij} h_i h_j \Delta x \Delta t - \int_0^1 \int_0^1 G(x,t) \varphi_1(x) \varphi_1(t) dx dt \right|. \qquad (18)$$

Используя теорему о среднем значении, можно представить условие

$$\int_0^1 q(x) \varphi_1^2(x) dx = 1$$

в виде

$$\sum_{i=0}^{n} q(\xi_i) \varphi_1^2(\xi_i) \Delta x = 1.$$

Достаточно теперь положить

$$h_i = \sqrt{\frac{q(\xi_i)}{q(x_i)}}\, \varphi_1(\xi_i),$$

чтобы убедиться в том, что двойная сумма правой части (18) является суммой Римана относительно содержащегося в ней интеграла. Поэтому, учитывая дифференциальные свойства функций $\varphi_1(x)$ и $G(x,t)$, видим, что порядок малости $|1/\lambda_1^{(n)} - 1/\lambda_1|$, а значит, и $|\lambda_1^{(n)} - \lambda_1|$ равен $1/n$.

Чтобы определить порядок малости $|\varphi_1^{(n)}(x) - \varphi(x)|$ (где $\varphi_1^{(n)}(x)$ является первой разностной характеристической функцией, а $\varphi_1(x)$ — первой обычной характеристической функцией), используем способ, который легко обобщить и на случай $k \neq 1$, если известен порядок малости $|\lambda_k^{(n)} - \lambda_k|$.

Прежде всего заметим, что

$$\frac{\Delta^2 \varphi_1(x_i)}{\Delta x^2} + \lambda_1^{(n)} q(x_i) \varphi_1(x_i) = \varepsilon_n(x_i) \quad (i = 1, 2, \ldots, n-1), \qquad (19)$$

где

$$\varepsilon_n(x_i) = \left[\frac{\Delta^2 \varphi_1(x_i)}{\Delta x^2} - \frac{d^2 \varphi_1(x_i)}{dx^2} \right] + (\lambda_1^{(n)} - \lambda_1) q(x_i) \varphi_1(x_i),$$

при этом порядок малости $\varepsilon_n(x_i)$ легко вычислить.

Действительно, предыдущий вывод дает возможность вычислить порядок малости $|\lambda_1 - \lambda_1^{(n)}|$, а согласно теории конечных разностей порядок малости $|d^2\varphi_1/dx^2 - \Delta^2\varphi_1/\Delta x^2|$ равен $1/n$, если существует ограниченная третья производная $d^3\varphi_1/dx^3$.

Из (19) получаем

$$\varphi_1(x_i) = \sum_{m=2}^{n} \frac{\varphi_m^{(n)}(x_i) \sum\limits_{j=1}^{n} q(x_j)\varepsilon_n(x_j)\varphi_m^{(n)}(x_j)\Delta x}{\lambda_m^{(n)} - \lambda_1^{(n)}} + C\varphi_1^{(n)}(x_i), \quad C = \text{const}. \tag{20}$$

Но

$$\int\limits_0^1 q(x)\varphi_1^2(x)dx = 1,$$

поэтому согласно краевым условиям для $\varphi_1(x)$ и ранее сделанным замечаниям

$$\sum_{i=0}^{n} q(x_i)\varphi_1^2(x_i)\Delta x = 1 - \frac{\eta}{n^2},$$

где $|\eta| \leqslant A = \text{const}$.

С другой стороны,

$$\sum_{i=0}^{n} q(x_i)[\varphi_k^{(n)}(x_i)]^2\Delta = 1.$$

(Здесь и впредь $\Delta = \Delta x = \Delta t$. — *Прим. ред.*)
Поэтому, принимая во внимание, что

$$\sum_{i=0}^{n} q(x_i)\varphi_k^{(n)}(x_i)\varphi_l^{(n)}(x_i)\Delta = 0 \quad (k \neq l),$$

из (20) находим

$$C = \sqrt{1 - \frac{\eta}{n^2} - \sum_{m=2}^{n}\left[\frac{\sum\limits_{j=1}^{n} q_j\varepsilon_n(x_j)\varphi_m^{(n)}(x_j)\Delta}{\lambda_m^{(n)} - \lambda_1^{(n)}}\right]^2} \geqslant \sqrt{1 - \frac{\eta}{n^2} - \frac{\varepsilon_n^2 \max|q_j|}{[\lambda_2^{(n)} - \lambda_1^{(n)}]^2}}\,.$$

Воспользовавшись снова выражением (20), получим

$$\left|\varphi_1(x_i) - \varphi_1^{(n)}(x_i)\right| \leqslant \left|1 - \sqrt{1 - \frac{\eta}{n^2} - \frac{\varepsilon_n^2}{[\lambda_2^{(n)} - \lambda_1^{(n)}]^2}}\right| + \max|\varepsilon_n| M,$$

где
$$M = \max \sum_{m=2}^{n} \frac{1}{[\lambda_m^{(n)} - \lambda_1^{(n)}]^2} \leqslant \text{const}.$$

Итак, порядок малости $|\varphi_1^{(n)}(x) - \varphi_1(x)|$ равен порядку малости $|\varepsilon_n|$. Этот способ рассуждения, очевидно, можно применить и для определения порядка малости величины $|\varphi_k^{(n)}(x) - \varphi_k(x)|$ при любом k, если вначале найден порядок малости $|\lambda_k^{(n)} - \lambda_k|$.

Рассмотрим для вычисления порядка малости $|\lambda_3^{(n)} - \lambda_3|$ метод, применимый также для $|\lambda_k^{(n)} - \lambda_k|$, при условии предварительного вычисления $|\lambda_i^{(n)} - \lambda_i|$, $|\varphi_i^{(n)} - \varphi_i|$, где $i = 1, 2, \ldots, k-1$. Действительно, рассуждая, как и ранее, получаем
$$\left| \frac{1}{\lambda_3^{(n)}} - \frac{1}{\lambda_3} \right| < \left| \sum_{i,j} G_{ij} h_i h_j \Delta^2 - \int_0^1 \int_0^1 G(x,t) \varphi_3(x) \varphi_3(t) dx dt \right|, \tag{21}$$
где h_i — произвольные числа, удовлетворяющие соотношениям
$$\sum_{i}^{n} q_i h_i^2 \Delta = 1, \quad \sum_{i}^{n} q_i h_i^{(1)} h_i \Delta = 0, \quad \sum_{i}^{n} q_i h_i^{(2)} h_i \Delta = 0, \tag{22}$$
в которых $h_i^{(1)}, h_i^{(2)}, \ldots$ — наперед определенные разностные фундаментальные функции.

Пусть
$$h_i - \varphi_3(x_i) = \varepsilon_i, \quad h_i^{(1)} - \varphi_1(x_i) = \eta_i, \quad h_i^{(2)} - \varphi_2(x_i) = \zeta_i. \tag{23}$$
В соответствии с предыдущими выводами степени малости η_i и ζ_i можно взять равными $1/n$, тогда нашей целью будет определение порядка малости ε_i. На основании (23) первую формулу из (22) можно записать в виде
$$\sum_{i=1}^{n} q_i [\varphi_3^2(x_i) + 2\varepsilon_i \varphi_3(x_i) + \varepsilon_i^2] \Delta = 1.$$
Но
$$1 - \sum_{i=1}^{n} q_i \varphi_3^2(x_i) \Delta = \frac{k_1}{n},$$
где $|k_1| < A_1 = \text{const}$, следовательно,
$$\sum_{i=1}^{n} q_i [\varepsilon_i^2 + 2\varepsilon_i \varphi_3(x_i)] \Delta x = \frac{k_1}{n}. \tag{24}$$

Аналогично найдем также

$$\sum_i \varepsilon_i q_i[\varphi_1(x_i)+\eta_i]\Delta = \frac{k_2}{n}, \quad \sum_i \varepsilon_i q_i[\varphi_2(x_i)+\zeta_i]\Delta = \frac{k_3}{n}. \tag{25}$$

Формулы (24), (25), очевидно, можно переписать следующим образом:

$$\sum_i q_i[\varepsilon_i^2 + 2\varepsilon_i\varphi_3(x_i)]\Delta = \frac{k_1}{n}, \quad \sum_i q_i\varepsilon_i h_i^{(1)}\Delta = \frac{k_2}{n}, \quad \sum_i q_i\varepsilon_i h_i^{(2)}\Delta = \frac{k_3}{n},$$
$$|k_1|, |k_2|, |k_3| \leqslant \mathrm{const}.$$

Поэтому если положить

$$\varepsilon_i = \frac{\alpha}{n},\ 0 \leqslant i \leqslant i_1, \varepsilon_i = \frac{\beta}{n},\ i_1+1 \leqslant i \leqslant i_2, \varepsilon_i = \frac{\gamma}{n},\ i_2+1 \leqslant i \leqslant n,$$

то

$$\begin{aligned}
\frac{\alpha^2}{n^2}\left(\frac{i_1}{n}\right) + \frac{\beta^2}{n^2}\left(\frac{i_2-i_1}{n}\right) + \frac{\gamma^2}{n^2}\left(\frac{n-i_2}{n}\right) + \frac{\alpha}{n}\theta_1 + \frac{\beta}{n}\theta_2 + \frac{\gamma}{n}\theta_3 &= \frac{k_1}{n},\\
\frac{\alpha}{n}\psi_1^{(1)} + \frac{\beta}{n}\psi_2^{(1)} + \frac{\gamma}{n}\psi_3^{(1)} &= \frac{k_2}{n},\\
\frac{\alpha}{n}\psi_1^{(2)} + \frac{\beta}{n}\psi_2^{(2)} + \frac{\gamma}{n}\psi_3^{(2)} &= \frac{k_3}{n},
\end{aligned} \tag{26}$$

где

$$\theta_1 = 2\sum_0^{i_1} q_i\varphi_3(x_i)\Delta, \qquad \theta_2 = 2\sum_{i_1+1}^{i_2} q_i\varphi_3(x_i)\Delta, \qquad \theta_3 = 2\sum_{i_2+1}^{n} q_i\varphi_3(x_i)\Delta,$$
$$\psi_1^{(1)} = \sum_0^{i_1} q_i h_i^{(1)}\Delta, \qquad \psi_2^{(1)} = 2\sum_{i_1+1}^{i_2} q_i h_i^{(1)}\Delta, \qquad \psi_3^{(1)} = \sum_{i_2+1}^{n} q_i h_i^{(1)}\Delta,$$
$$\psi_1^{(2)} = \sum_0^{i_1} q_i h_i^{(2)}\Delta, \qquad \psi_2^{(2)} = 2\sum_{i_1+1}^{i_2} q_i h_i^{(2)}\Delta, \qquad \psi_3^{(2)} = \sum_{i_2+1}^{n} q_i h_i^{(2)}\Delta.$$

Система (26), очевидно, разрешима относительно α, β, γ, так как определитель

$$\psi_2^{(1)}\psi_3^{(2)} - \psi_3^{(1)}\psi_2^{(2)} = \sum_{i_1+1}^{i_2} q_i h_i^{(1)}\Delta \sum_{i_2+1}^{n} q_i h_i^{(2)}\Delta - \sum_{i_2+1}^{n} q_i h_i^{(1)}\Delta \sum_{i_1+1}^{i_2} q_i h_i^{(2)}\Delta$$

не равен тождественно нулю. Действительно, допустив обратное, мы с помощью перехода к пределу пришли бы к невозможному тождеству

$$\int_x^y \varphi_1(x)dx \int_y^1 \varphi_2(x)dx - \int_y^1 \varphi_1(x)dx \int_x^y \varphi_2(x)dx \equiv 0, \tag{27}$$

ибо если бы это тождество было верным, то симметричная функция

$$\frac{\int_x^y \varphi_1(x)dx}{\int_x^y \varphi_2(x)dx}$$

была бы функцией [1] одного лишь y.

Из двух последних уравнений (26) определяем β и γ в форме

$$\beta = A\alpha + B, \quad \gamma = A^1\alpha + B^1, \tag{27$'$}$$

где $|A|$, $|A^1|$, $|B|$, $|B^1|$ ограничены независимо от n. Подставив эти значения β и γ в первое уравнение (26), получим для определения α квадратное уравнение

$$\frac{N\alpha^2}{n} + M\alpha = C$$

($|M|$, $|N|$, $|C|$ также ограничены независимо от n), которое не имеет мнимых корней, так как множитель при α^2 стремится к нулю вместе с $1/n$. Принимая вместо α ограниченный независимо от n корень этого уравнения и подставляя его вновь в ($27'$), убеждаемся в том, что $|\alpha|$, $|\beta|$, $|\gamma|$ ограничены независимо от n.

Определив α, β, γ, видим, что порядок малости $|h_i - \varphi_3(x_i)|$ равен $1/n$. Следовательно, рассуждая, как и ранее, убеждаемся, что порядок малости $|\lambda_3^{(n)} - \lambda_3|$ также равен $1/n$.

§4. Применение принципа минимума для доказательства справедливости принципа Рэлея

В случае $q(x) > 0$ применение принципа минимума для доказательства справедливости принципа Рэлея можно осуществить в формулировке, данной для системы в конечных разностях

$$\frac{\Delta^2 y_i^{(n)}}{\Delta x^2} = q_i y_i^{(n)} + f_i, \quad y_0^{(n)} = y_n^{(n)} = 0, \tag{28}$$

[1] Можно без всяких затруднений использовать те же самые соображения, что и в случае конечного n.

которую можно считать уравнением Эйлера, соответствующим сумме

$$\sum_{i=1}^{n}\left[\left(\frac{\Delta y_i^{(n)}}{\Delta x}\right)^2 + q_i y_i^{(n)2} + 2f_i y_i^{(n)}\right]\Delta. \tag{29}$$

Принимая во внимание сделанное ранее допущение о том, что $q(x) > 0$, видим, что система (28) разрешима относительно y. Действительно, сумму (29) можно представить в виде

$$\sum_{i=1}^{n}\left[\left(\frac{\Delta y_i^{(n)}}{\Delta x}\right)^2 + q_i\left(y_i^{(n)} + \frac{f_i}{q_i}\right)^2\right]\Delta x + \text{const}, \tag{30}$$

поэтому определитель системы (28) не равен нулю, и, следовательно, она имеет единственное решение.

Обозначим $y_n(x)$ ломаную, соединяющую точки $(0, 1/n), (1/n, y_2^{(n)}), \ldots, (y_n^{(n-1)}, 1)$, и рассмотрим разность

$$I[y_n] - \mathop{\mathrm{S}}_{i=1}^{n}(y_i^{(n)}) = \int\limits_0^1\left[\left(\frac{dy_n(x)}{dx}\right)^2 + q(x)y_n^2(x) + 2f(x)y_n(x)\right]dx -$$

$$- \sum_{i=0}^{n}\left[\left(\frac{\Delta y_i^{(n)}}{\Delta x}\right)^2 + q_i[y_i^{(n)}]^2 + 2f_i y_i^{(n)}\right]\Delta x,$$

которая, очевидно, равна

$$\sum_i\left\{\int\limits_{x_i}^{x_i+\Delta}[q(x)y_n^2(x) + 2f(x)y_n(x)]dx - [q_i y_i^{(n)2} + 2f_i y_i^{(n)}]\Delta\right\}.$$

Отсюда на основании теоремы о среднем значении находим

$$\left|I[y_n] - \mathop{\mathrm{S}}_{i=1}^{n}(y_i^{(n)})\right| \leqslant \Delta\max\left|\frac{d[q(x)y_n^2(x) + 2f(x)y_n(x)]}{dx}\right|. \tag{31}$$

Заметим, далее, что сумма (30) ограничена независимо от n. Значит, и сумма

$$\sum_{i=1}^{n-1}\left[\frac{\Delta y_i^{(n)}}{\Delta x}\right]^2\Delta$$

также ограничена; поэтому

$$|y_i^{(n)}| < M,$$

где $M = \text{const}$, независимая от i и n. Из данного уравнения в конечных разностях следует, что $|\Delta^2 y_i^{(n)}/\Delta x^2|$ ограничены независимо от n, на основании чего делаем вывод об ограниченности первых разностей $y_i^{(n)}$. Следовательно, порядок малости $\left|I[y_n] - \overset{n}{\underset{i=1}{\mathrm{S}}}(y_i^{(n)})\right|$ равен $1/n$. Учитывая, что на основании известных теорем вариационного исчисления решение рассмотренного дифференциального уравнения имеет для интеграла $I[y]$ абсолютный минимум, получаем

$$\overset{n}{\underset{i=0}{\mathrm{S}}}(y_i^{(n)}) - I[y] = \left[\overset{n}{\underset{i=0}{\mathrm{S}}}(y_i^{(n)}) - \overset{n}{\underset{i=0}{\mathrm{S}}}(y_i)\right] + \left[\overset{n}{\underset{i=0}{\mathrm{S}}}(y_i) - I[y]\right],$$

где $\overset{n}{\underset{i=0}{\mathrm{S}}}(y_i^{(n)})$ — сумма Римана для интеграла $I[y]$.

Само понятие минимума дает

$$\overset{n}{\underset{i=0}{\mathrm{S}}}(y_i^{(n)}) - I[y] \geqslant 0, \quad \overset{n}{\underset{i=0}{\mathrm{S}}}(y_i^{(n)}) - \overset{n}{\underset{i=0}{\mathrm{S}}}(y_i) \leqslant 0,$$

откуда

$$\left|\overset{n}{\underset{i=0}{\mathrm{S}}}(y_i^{(n)}) - I[y]\right| \leqslant \left|\overset{n}{\underset{i=0}{\mathrm{S}}}(y_i) - I[y]\right|; \tag{32}$$

принимая же во внимание краевые условия для $y(x)$, из (32) находим для $\left|\overset{n}{\underset{i=0}{\mathrm{S}}}(y_i^{(n)}) - I[y]\right|$ порядок малости, в каждом случае не меньший $1/n$. Учитывая, что

$$|I[y_n] - I[y]| < \left|I[y_n] - \overset{n}{\underset{i=0}{\mathrm{S}}}(y_i^{(n)})\right| + \left|\overset{n}{\underset{i=0}{\mathrm{S}}}(y_i^{(n)}) - I[y]\right|,$$

определяем из предыдущего, что порядок малости $|I[y_n] - I[y]|$ равен $1/n$. Благодаря этому, воспользовавшись разложением в ряд Тейлора, можем фиксировать порядок малости $|y - y_n|$ и с помощью данного дифференциального и соответствующего разностного уравнений убеждаемся в том, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\Delta^2 y_i^{(n)}}{\Delta x^2} = \frac{d^2 y(x_i)}{dx^2},$$

где $x_i = i/n$, и что порядок малости $|\Delta^2 y_i^{(n)}/\Delta x^2 - d^2 y(x_i)/dx^2|$ можно также фиксировать.

Случай $q(x) < 0$. Применение принципа минимума к вычислению сингулярных значений параметра и сингулярных функций можно строго провести, используя mutatis mutandis соображений, изложенных в § 3.

Если поставить, например, задачу минимума для конечной суммы

$$\overset{n-1}{\underset{i=0}{\mathrm{S}}}(y_i) = \sum_{i=1}^{n-1} \left\{ \left| \frac{\Delta y_i}{\Delta x} \right]^2 + q(x) y_i^2 \right\} \Delta x$$

при условиях

$$y_0 = y_n = 0, \quad \sum_{i=0}^{n} |q(x_i)| y_i^2 \Delta x = 1, \tag{33}$$

то легко можно убедиться в существовании решения.

Обычным рассуждением доказываем, что «минимизирующие» числа $y_i^{(n)}$ удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{gathered} \frac{\Delta^2 y_i^{(n)}}{\Delta x^2} = k^{(n)} q(x_i) y^{(n)} \quad (k^{(n)} = \mathrm{const} \neq 0), \\ y_0^{(n)} = y_n^{(n)} = 0, \quad \sum_{i=0}^{n} |q(x_i)| y_i^{(n)2} \Delta = 1 \end{gathered} \tag{34}$$

и являются единственными. Если обозначить через $\Delta(\lambda)$ определитель системы

$$\frac{\Delta^2 y_{i,n}}{\Delta x^2} = \lambda q(x_i) y_{i,n}, \quad y_{0,n} = y_{n,n} = 0,$$

а через $\lambda_1^{(n)}, \lambda_2^{(n)}, \ldots, \lambda_{n-2}^{(n)}$ — его корни, то можно увидеть, что $\Delta(k^{(n)})$ обязательно должно быть нулем, а поэтому $k^{(n)}$ должно быть одним из $\lambda_i^{(n)}$. Ясно, что $k^{(n)}$ равно наименьшему из $\lambda_i^{(n)}$, а именно $\lambda_1^{(n)}$. Учитывая это, можем записать

$$|\lambda_1^{(n)} - \lambda_1| \leqslant \left| \overset{n}{\underset{i=1}{\mathrm{S}}}(h_i) - I[y] \right|,$$

где $\varphi_1(x)$ — первая характеристическая функция, а h_i — произвольные числа, удовлетворяющие (33). Положив

$$h_i = \sqrt{\frac{q(\xi_i)}{q(x_i)}}\, \varphi_1(\xi_i),$$

где

$$\sum_{i=0}^{n} |q(\xi_i)| \varphi_1^2(\xi_i) \Delta = 1,$$

видим, что порядок малости $|\lambda_1^{(n)} - \lambda_1|$ можно легко определить с помощью соображений, изложенных в предыдущих параграфах.

§5. Простейшая задача вариационного исчисления с точки зрения принципа Рэлея

В своих первых исследованиях вариационного исчисления Эйлер, как известно, рассматривал конечные суммы вместо интегралов, получив эвристически, между прочим, хорошо известные уравнения Эйлера. В дальнейшем историческом развитии метод Эйлера, насколько нам известно, был забыт, и лишь недавно появилась статья Роббинса [1)], где он рассматривает ту же самую задачу с точки зрения метода Эйлера при очень широких допущениях относительно функции под знаком интеграла. Впрочем, метод Роббинса не приводит непосредственно, как нам кажется, к вычислению порядка малости ошибки, которую мы совершаем, останавливаясь на n-м приближении. Изложенный ниже способ вычисления порядка малости ошибки, основанный на теоремах о существовании абсолютного минимума, требует, впрочем, более узких ограничений относительно вида функций под знаком интеграла.

Пусть минимизирующийся интеграл имеет вид

$$\int\limits_0^1 f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) dx = I[y], \tag{35}$$

и допустим, что выполнены ограничительные условия

$$\frac{d^2 f}{dy'^2} \geqslant \alpha_1 > 0, \quad \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y'}\right)^2 - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y'^2} \leqslant -\beta < 0. \tag{36}$$

При помощи простого рассуждения можно убедиться, что сумма

$$\overset{n}{\underset{1}{\mathrm{S}}}[y_i] = \sum_{i=1}^{n} f\left(x_i, y_i, \frac{\Delta y_i}{\Delta x}\right) \Delta x \tag{37}$$

допускает существование абсолютного минимума.

Действительно, очевидно, что

$$f(x, y, p) = f(x, 0, 0) + f'_y(x, 0, 0)y + f'_p(x, 0, 0)p + \\ + \frac{1}{2}\left[\frac{\widetilde{\partial^2 f}}{\partial y^2} y^2 + 2\frac{\widetilde{\partial^2 f}}{\partial y \partial p} yp + \frac{\widetilde{\partial^2 f}}{\partial p^2} p^2\right], \tag{38}$$

где, как обычно, волнистые линии над вторыми производными означают, что эти производные взяты при аргументах, которые лежат соответственно между 0, y и 0, p.

Из условий (36) видим, что квадратическая форма в правой части формулы (38) является определенно положительной. Поэтому, применяя рас-

[1)] *Robbins.* A Method in the Calculus of Variations // Am. J. Math. 1917. V. XXXIX.

суждение, использованное в предыдущем параграфе (для доказательства существования конечного нижнего предела), видим, что

$$f(x,y,p) - c(x) \geqslant \alpha[(y+k_1)^2 + (p+k_2)^2], \tag{39}$$

где $c(x)$ зависит только от x,

$$k_1 = \frac{f'_y(x,0,0)}{2\alpha}, \quad k_2 = \frac{f'_p(x,0,0)}{2\alpha}.$$

Из (37) и (39) непосредственно получаем неравенство

$$\overset{n}{\underset{0}{\mathrm{S}}}[y_i - k_1] - \overset{n}{\underset{0}{\mathrm{S}}}[c(x_i)] > \alpha \sum_{i=0}^{n} y_i^2 \Delta, \tag{40}$$

причем из этого неравенства следует, что точки $Y^{(m)}$ в n-мерном пространстве (с координатами $y_{i,m}$, для которых сумма (37) стремится к нижнему пределу при фиксированном Δ) лежат на гиперсфере радиуса $\sqrt{k|c|/(\alpha\Delta x)}$, где $\left|\overset{n}{\underset{0}{\mathrm{S}}}[y_{i,m} - k]\right| \leqslant k$.

Указанное рассуждение пригодно для всех значений m, поэтому на основании теоремы Вейерштрасса заключаем, что точки $Y^{(m)}$ имеют по крайней мере одну точку сгущения, которая в силу непрерывности суммы (37) и реализует абсолютный минимум.

Для доказательства единственности абсолютного минимума допустим противное. Пусть $y_i^{(n)}$ и $z_i^{(n)}$ — две различные системы чисел, реализующие абсолютный минимум $\overset{n}{\underset{0}{\mathrm{S}}}[y_i]$. Тогда, положив $y_i^{(n)} - z_i^{(n)} = \eta_i^{(n)}$, получим

$$\overset{n}{\underset{0}{\mathrm{S}}}[y_i^{(n)}] - \overset{n}{\underset{0}{\mathrm{S}}}[z_i^{(n)}] = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \overset{n}{\underset{0}{\mathrm{S}}}[z_i^{(n)}]}{\partial z_i^{(n)}} \eta_i^{(n)} \Delta +$$
$$+ \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \left\{ \widetilde{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}} \eta_i^{(m)2} + 2\widetilde{\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial p}} \eta_i^{(m)} \frac{\Delta \eta_i^{(m)}}{\Delta x} + \widetilde{\frac{\partial^2 f}{\partial p^2}} \left[\frac{\Delta \eta_i^{(m)}}{\Delta x}\right]^2 \right\} \Delta. \tag{41}$$

Но первая сумма правой части (41) вследствие условий минимума равна нулю, а поэтому левая часть, т. е. $\overset{n}{\underset{0}{\mathrm{S}}}[y_i^{(n)}] - \overset{n}{\underset{0}{\mathrm{S}}}[z_i^{(n)}]$, больше нуля на основании условий (36). Однако это невозможно, так как $z_i^{(n)}$ реализуют абсолютный минимум $\overset{n}{\underset{0}{\mathrm{S}}}[y_i]$. Следовательно, $\eta_i^{(m)} = 0$ $(i = 1, 2, \ldots)$, что и доказывает наше утверждение. Таким образом, $y_i^{(n)}$ — единственная система чисел, реализующая абсолютный минимум системы (37).

В силу того что любая система решений уравнений

$$\begin{gathered}\Delta f_y(x_i, y_i, p_i) - \{f_p(x_{i+1}, y_{i+1}, p_{i+1}) - f_p(x_i, y_i, p_i)\} = 0\\ (i = 0, 1, 2, \ldots, n-2),\\ y_0 = y_n = 0, \quad p_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{\Delta x},\end{gathered} \tag{42}$$

реализует, благодаря (36), абсолютный минимум $\overset{n}{\underset{0}{\mathrm{S}}}[y_i^{(n)}]$, $y_i^{(n)}$ является единственной системой решений этих уравнений. Установив это, заметим, что

$$\overset{n}{\underset{0}{\mathrm{S}}}(y_i^{(n)}) - I[y] = \left\{\overset{n}{\underset{0}{\mathrm{S}}}(y_i^{(n)}) - \overset{n}{\underset{0}{\mathrm{S}}}(y_{i,n})\right\} + \left\{\overset{n}{\underset{0}{\mathrm{S}}}(y_{i,n}) - I[y]\right\}. \tag{43}$$

Однако на основании определения минимума

$$\left[\overset{n}{\underset{0}{\mathrm{S}}}(y_i^{(n)}) - \overset{n}{\underset{0}{\mathrm{S}}}(y_{i,n})\right] \leqslant 0, \quad \left[\overset{n}{\underset{0}{\mathrm{S}}}(y_i^{(n)}) - I[y]\right] \geqslant 0,$$

следовательно,

$$\left|\overset{n}{\underset{0}{\mathrm{S}}}(y_i^{(n)}) - I[y]\right| \leqslant \left|\overset{n}{\underset{0}{\mathrm{S}}}(y_{i,n}) - I[y]\right|. \tag{44}$$

Но благодаря краевым условиям сумму $\overset{n}{\underset{0}{\mathrm{S}}}[y_{i,n}]$ можно отождествить с суммой, полученной из формулы трапеций для интеграла $I[y]$, поэтому порядок малости левой части (44) равен $1/n^2$. С другой стороны,

$$\begin{aligned}&\left|\overset{n}{\underset{0}{\mathrm{S}}}(y_i^{(n)}) - I[y^{(n)}]\right| =\\ &\qquad = \left|\sum_{i=1}^{n-1} \Delta \left[f\left(x_i, y^{(n)}, \frac{\Delta y_i^{(n)}}{\Delta x}\right) + \frac{1}{\Delta}\int\limits_{x_i}^{x_i+\Delta} f\left(x, y^{(n)}, \frac{\Delta y_i^{(n)}}{\Delta x}\right) dx\right]\right| \leqslant\\ &\qquad\qquad \leqslant \Delta \left\{\max\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|_n + \max\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|_n \max\left|\frac{\Delta y_i^{(n)}}{\Delta x}\right|\right\},\end{aligned} \tag{45}$$

где $y^{(n)}(x)$ обозначает, как и ранее, ломаную с вершинами в точках $(i/n, y_{i+1}^{(n)})$. Используя разложение Тейлора, видим, что

$$\sum_{i=0}^{n-1} \left[\frac{\Delta y_i^{(n)}}{\Delta x} \right]^2 \Delta x < M = \text{const}, \tag{46}$$

так как $\overset{n}{\underset{0}{\mathrm{S}}}[y_i^{(n)}]$ ограничены независимо от n.

Систему (42) можно записать в виде

$$\widetilde{f''_{y^2}} \frac{\Delta^2 y_i^{(n)}}{\Delta x^2} = f'_y - \widetilde{f''_{y'x}} - \widetilde{f''_{y'y}} \frac{\Delta y_i^{(n)}}{\Delta x}, \tag{47}$$

где знак «$\sim$» означает, что аргументы вторых производных взяты соответственно между (x_i, y_i, p_i) и $(x_{i+1}, y_{i+1}, p_{i+1})$. Следовательно, если допустить, что

$$|f''_{yp}| \leqslant M = \text{const}, \quad |f'_y|, |f''_{yx}| \leqslant N|p| + P|y| + C \tag{48}$$

(где M, N, P, C — const), то из (46) и (47) вытекает, что сумма

$$\sum_{i=0}^{n-2} \left[\frac{\Delta^2 y_i^{(n)}}{\Delta x^2} \right]^2 \Delta x$$

ограничена независимо от n, а поэтому $|\Delta y_i^{(n)}/\Delta x|$ и $|y_i^{(n)}|$ также ограничены независимо от n. Рассматривая вновь формулу (45) и комбинируя ее с (44), получаем

$$|I[y] - I[y^{(n)}]| \leqslant \frac{k}{n}, \tag{49}$$

где $k = \text{const}$. Используя теперь разложение Тейлора, уравнение Эйлера и ограничительные условия относительно функции под знаком интеграла, легко можем вычислить порядок малости $|y - y^{(n)}|$.

Итак, приходим к следующей теореме.

Если в простейшей задаче вариационного исчисления функция под знаком интеграла удовлетворяет ограничительным условиям (36) *и* (48), *то возможно не только строго доказать принцип Рэлея, но и вычислить порядок малости той ошибки, которую совершаем, останавливаясь на* n*-м приближении.*

§6. Применение метода наименьших квадратов к приближенному решению уравнений в конечных разностях

В соответствии с основной идеей метода наименьших квадратов минимизируем сумму

$$\sum_{i=0}^{n}\left[\frac{\Delta^2 y_{i,n}}{\Delta x^2}-q_i y_{i,n}-f_i\right]^2\Delta x \tag{50}$$

с помощью разложения

$$y_{i,n}^{(k)}=\sum_{j=1}^{k}a_{ij}\Psi_j^i, \tag{51}$$

где $k\leqslant n$, а Ψ_j^i — решения системы в конечных разностях

$$\begin{gathered} n^2\Delta^2 u+\lambda_j u_i=0 \quad (i=0,1,\ldots,n-2,\quad j=1,2,\ldots,n-2),\\ u_0=u_n=0, \end{gathered} \tag{52}$$

т. е.

$$\Psi_j^i=\sqrt{2}\,\sin\frac{ij\pi}{n} \quad (i=0,1,\ldots,k,\quad j=0,1,\ldots,n).$$

Условия минимума дают для определения коэффициентов a_{ij} систему k линейных уравнений, которая, очевидно, разрешима при $q_i>0$; в нашем исследовании рассматривается исключительно этот случай [1)].

Для дальнейшего исследования вопроса введем в рассмотрение сумму

$$Y_{i,n}^{(k)}=\sum_{j=1}^{k}A_j\Psi_j^i,$$

которая представляет собой формулу тригонометрической интерпретации для решения $y_{i,n}$ данной системы в конечных разностях.

Пользуясь рассуждением, основанным на понятии минимума и неоднократно здесь употребляемым, получаем

$$|\sigma_0^1[y_{i,n}^{(k)}]-\sigma_0^1[y_{i,n}]|\leqslant|\sigma_0^1[Y_{i,n}^{(k)}]-\sigma_0^1[y_{i,n}]|=\varepsilon_{k,n}, \tag{53}$$

[1)] Этот случай соответствует случаю $q(x)>0$, рассмотренному для дифференциальных уравнений (boundary value problem) в статье: *Kryloff N.* Sur une mèthode, basée sur le principe de minimum pour l'integration approchée des équations diffèrentielles // Comptes Rendus de L'Acad. de Sci. de Paris. 1925. T. 181. P. 86–88. (См. также: *Крылов Н. М.* Избранные труды. Т. 1. Киев, 1961. С. 259–261.)

где, как легко убедиться,

$$\varepsilon_{k,n} = \sum_{i=0}^{n} \left[\frac{\Delta^2 (Y_{i,n}^{(k)} - y_{i,n})}{\Delta x^2} - q_i (Y_{i,n}^{(k)} - y_{i,n}) \right]^2 \Delta x.$$

Следовательно,

$$\varepsilon_{k,n} = 2 \sum_{i=0}^{n-2} \left[\frac{\Delta^2 [Y_{i,n}^{(k)} - y_{i,n}]}{\Delta x^2} \right]^2 \Delta x + 2 \max [q_i^2] \sum_{i=0}^{n} [Y_{i,n}^{(k)} - y_{i,n}]^2 \Delta x,$$

откуда на основании граничных условий

$$\varepsilon_{k,n} \leqslant M \sum_{i=0}^{n-2} \left[\frac{\Delta^2 [Y_{i,n}^{(k)} - y_{i,n}]}{\Delta x^2} \right]^2 \Delta x,$$

где

$$M = \left\{ 2 + \frac{1}{4} \max [q_i]^2 \right\}.$$

Учитывая, что

$$\frac{\Delta^2 (Y_{i,n}^{(k)} - y_{i,n})}{\Delta x^2} = \left[\frac{\Delta^2 y_{i,n}}{\Delta x^2} \right]_k - \frac{\Delta^2 y_{i,n}}{\Delta x^2},$$

где

$$[\varphi_{i,n}]_k = \sum_{i=0}^{k} \Psi_j^i \left(\sum_{l=1}^{n} \varphi_{l,n} \Psi_j^l \Delta x \right),$$

находим

$$\varepsilon_{k,n} \leqslant M \sum_{j=k+1}^{n} \left[\sum_{l=1}^{n} \frac{\Delta^2 y_{i,n}}{\Delta x^2} \Psi_j^l \Delta x \right]^2 \leqslant M \frac{n-k}{n} \frac{1}{k} \sum_{l} \left[\frac{\Delta^3 y_{i,n}}{\Delta x^3} \right]^2 \Delta x, \tag{54}$$

ибо

$$\left| \sum_{l} \varphi_{l,n} \Psi_j^l \Delta x \right| \leqslant \frac{1}{j} \sqrt{\sum_{l} \left[\frac{\Delta \varphi_{l,n}}{\Delta x} \right]^2 \Delta x}$$

и

$$\sum_{j=k+1}^{n} \frac{1}{j^2} < \frac{n-k}{n} \frac{1}{k}.$$

Допуская теперь, что

$$|q_{i+1} - q_i| < \lambda_1 \Delta, \quad |f_{i+1} - f_i| < \lambda_2 \Delta,$$

где λ_1 и λ_2 — постоянные, из (54) легко получаем

$$\varepsilon_{k,n} \leqslant M\frac{n-k}{k}\frac{1}{k}L,$$

где L — постоянная, зависящая лишь от λ_1, λ_2 и $\max|q(x_i)|$. Выяснив это, из формулы (53) найдем

$$\sum_{i=0}^{n}\left[\frac{\Delta^2(y_{i,n}^{(k)}-y_{i,n})}{\Delta x^2}-q_i(y_{i,n}^{(k)}-y_{i,n})\right]^2\Delta x < ML\frac{n-k}{n}\frac{1}{k}$$

и с помощью рассуждения, подобного приведенному в вышеупомянутой статье [1]), получим

$$|y_{i,n}-y_{i,n}^{(k)}| \leqslant A\sqrt{\varepsilon_{k,n}} < A\sqrt{ML}\sqrt{\frac{n-k}{nk}}, \tag{55}$$

где A — постоянная. *Этот вывод дает нам порядок малости ошибки, которую мы совершаем, принимая $y_{i,n}^{(k)}$ равным $y_{i,n}$.*

Возвратимся вновь к задаче приближенного решения дифференциального уравнения, которое соответствует рассматриваемой системе в конечных разностях. В таком случае, как было выяснено в предыдущих параграфах, $\lim y_{i,n} = y(x_i)$, если $i/n \to x_i$, $n \to \infty$; поэтому метод, рассматриваемый в этом параграфе, можно считать также методом приближенного решения дифференциальных уравнений с граничными условиями, и, возможно, он будет иметь определенное преимущество с точки зрения повышения порядка малости ошибки.

§7. Некоторые замечания относительно граничной задачи математической физики (задача двух измерений)

Чтобы упростить изложение, будем детализировать лишь простейший пример, т. е. дифференциальную систему

$$\begin{gathered}\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2}-q(x,y)u(x,y)=f(x,y), \quad q(x,y)>0,\\ u(x,y)=0, \text{ если точка } (x,y) \text{ лежит на контуре } C.\end{gathered} \tag{56}$$

Однако есть основания допустить, что нижеприведенный метод можно обобщить и на более широкие случаи, например такие, которые были рассмотрены с точки зрения метода Ритца в известном труде順Планшереля [2]).

[1]) См. примечание на с. 24.

[2]) *Plancherel M.* Sur la Méthode d'integration de Ritz // Bull. des Sci. Math. 1924. V. XLVIII.

Допустим, что контур C является квадратом с вершинами $(0,0), (1,0), (0,1), (1,1)$, и рассмотрим систему в конечных разностях [1]), которая соответствует системе (56):

$$\begin{aligned}
&\frac{\Delta^2 u_{i,j}^{(n)}}{\Delta x^2} + \frac{\Delta^2 u_{i,j}^{(n)}}{\Delta y^2} - q(x_i, y_i) u_{i,j}^{(n)} = f(x_i, y_j),\\
&u_{i,j}^{(n)} = 0, \text{ если точка } (i/n, j/n) \text{ лежит на } C, \text{ т. е.}\\
&u_{0j} = u_{nj} = u_{i0} = u_{in} = 0.
\end{aligned} \tag{57}$$

Вычтя почленно (56) из (57), очевидно, получим

$$\begin{aligned}
&\frac{\Delta^2 \Upsilon_{ij}}{\Delta x^2} + \frac{\Delta^2 \Upsilon_{ij}}{\Delta y^2} - q(x_i, y_j)\Upsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^{(n)},\\
&\Upsilon_{0j} = \Upsilon_{nj} = \Upsilon_{i0} = \Upsilon_{in} = 0,
\end{aligned} \tag{58}$$

где

$$\Upsilon_{ij} = u_{ij}^{(n)} - u_{ij},$$

$$\varepsilon_{ij}^{(n)} = \frac{\partial^2 u(x_i, y_i)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x_i, y_i)}{\partial y^2} - \frac{\Delta^2 u_{ij}}{\Delta x^2} - \frac{\Delta^2 u_{ij}}{\Delta y^2},$$

при этом порядок малости $\varepsilon_{ij}^{(n)}$ равен, очевидно, $1/n$, если $f(x,y)$ и $q(x,y)$ имеют, например, первую производную.

Умножив (58) на $\Upsilon_{ij}\Delta x\Delta y$, просуммируем эту формулу по всем значениям i/n, j/n, которые лежат внутри квадрата; тогда, применив формулу Грина, получим

$$\sum_{i,j}\left[\left[\frac{\Delta\Upsilon_{ij}}{\Delta x}\right]^2 + \left[\frac{\Delta\Upsilon_{ij}}{\Delta y}\right]^2 + q(x_i, y_i)\Upsilon_{ij}^2 + \varepsilon_{ij}\Upsilon_{ij}\right]\Delta x\Delta y = 0,$$

[1]) В силу условия $q(x,y) > 0$ систему (57), очевидно, можно разрешить.

откуда с помощью неравенства Коши найдем

$$\begin{aligned} &\sum_{i,j}\left[\frac{\Delta(u_{ij}^{(n)}-u_{ij})}{\Delta x}\right]^2\Delta x\Delta y<\zeta_\Delta^{(1)},\\ &\sum_{i,j}\left[\frac{\Delta(u_{ij}^{(n)}-u_{ij})}{\Delta y}\right]^2\Delta x\Delta y<\zeta_\Delta^{(2)},\\ &\sum_{i,j}\left[u_{ij}^{(n)}-u_{ij}\right]^2\Delta x\Delta y<\zeta_\Delta^{(3)}, \end{aligned}\tag{59}$$

где порядки малости $\zeta_\Delta^{(1)}$, $\zeta_\Delta^{(2)}$, $\zeta_\Delta^{(3)}$ равны $1/n^2$.

Применим теперь mutatis mutandis анализа профессора Ричардсона [1]), которым он пользовался для доказательства существования фундаментальных решений двумерной задачи. Для этого рассмотрим функцию

$$V_{ij}=\frac{\Delta\Upsilon_{ij}}{\Delta x}.$$

Эта функция, очевидно, удовлетворяет системе

$$\begin{gathered} \frac{\Delta^2 v_{ij}}{\Delta x^2}+\frac{\Delta^2 v_{ij}}{\Delta^2 y}=q_{ij}v_{ij}+\frac{\Delta q_{ij}}{\Delta x}\Upsilon_{ij}+\frac{\Delta\varepsilon_{i,j}^{(n)}}{\Delta x},\\ v_{i0}=v_{in}=0,\ \frac{\Delta v_{i0}}{\Delta x}=\frac{\Delta v_{in}}{\Delta x}=0,\ \frac{\Delta v_{0j}}{\Delta x}=\varepsilon_{0j},\ \frac{\Delta v_{nj}}{\Delta x}=\varepsilon_{nj}. \end{gathered}\tag{60}$$

Умножая (60) на $v_{ij}\Delta x\Delta y$ и применяя частичное суммирование, получаем

$$\begin{aligned} \sum_{i,j}\left\{\left[\frac{\Delta v_{ij}}{\Delta x}\right]^2+\left[\frac{\Delta v_{ij}}{\Delta y}\right]^2\right\}\Delta x\Delta y= \\ =-\sum_{i,j}\left[q_{ij}v_{ij}^2+\frac{\Delta q_{ij}}{\Delta x}v_{ij}\Upsilon_{ij}+\frac{\Delta\varepsilon_{ij}^{(n)}}{\Delta x}v_{ij}\right]\Delta x\Delta y+ \\ +\sum_{(c)}\left[\frac{\Delta v_{ij}}{\Delta x}\right]v_{ij}\Delta y-\sum_{(c)}\left[\frac{\Delta v_{ij}}{\Delta y}\right]v_{ij}\Delta x, \end{aligned}\tag{61}$$

откуда, учитывая граничные условия, находим

$$\sum_{(c)}\left[\frac{\Delta v_{ij}}{\Delta y}\right]v_{ij}\Delta x=0$$

[1]) Trans. Am. Math. Soc. 1917. Oct. V. 18.

и

$$\left|\sum_{(c)}\left[\frac{\Delta v_{ij}}{\Delta x}\right]v_{ij}\Delta y\right| < \frac{k}{n},$$

где $k = \mathrm{const}$. Применяя к (61) неравенство Коши и принимая во внимание (59), получаем

$$\sum_{i,j}\left\{\left[\frac{\Delta v_{ij}}{\Delta x}\right]^2 + \left[\frac{\Delta v_{ij}}{\Delta y}\right]^2\right\}\Delta x\Delta y \leqslant \frac{c}{n},$$

где $c = \mathrm{const}$, если $q(x, y)$ и $f(x, y)$ имеют производные до 3-го порядка включительно. С другой стороны, на основании граничных условий

$$|\Upsilon_{ij}| \leqslant \sqrt{\sum_{i,j}\left[\frac{\Delta^2\Upsilon_{ij}}{\Delta x\Delta y}\right]^2\Delta x\Delta y} \leqslant \sqrt{\sum_{i,j}\left\{\left[\frac{\Delta v_{ij}}{\Delta x}\right]^2 + \left[\frac{\Delta v_{ij}}{\Delta y}\right]^2\right\}\Delta x\Delta y}\,;$$

следовательно, порядок малости $|\Upsilon_{ij}| = |u - u_{ij}^{(n)}|$ равен $1/\sqrt{n}$, если $q(x, y)$ и $f(x, y)$ имеют производные до 3-го порядка включительно. К тому же очевидно, что порядок малости этой разности можно повысить в зависимости от дополнительных ограничительных условий для $q(x, y)$ и $f(x, y)$.

Соответствующие рассуждения, приведенные в статье профессора Ричардсона, позволяют допустить, что указанные выводы можно распространить и на случай $q(x, y) < 0$, который соответствует наличию сингулярных функций, а также на случай контуров, отличающихся от прямоугольника.

О ПРИБЛИЖЕННОМ РЕШЕНИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ *)

Рассмотрим уравнение
$$\frac{d^2x}{dt^2} = f(x, t), \tag{1}$$
которое было предметом исследований Штермера, при начальных условиях
$$x(0) = a, \quad x'(0) = b, \tag{2}$$
где $f(x, t)$ — функция двух переменных x и t, удовлетворяющая относительно x условию Липшица, непрерывная относительно t и ограниченная при ограниченных x и t.

Чтобы приближенно найти функцию $x(t)$, приведем дифференциальную систему (1), (2) к виду
$$x(t) = \int\limits_0^t (t-\xi) f(x(\xi), \xi) d\xi + a + bt. \tag{3}$$
Обозначив выражением
$$\sum_{i=0}^{k} A_i^{(k)} F(t_i) \Delta t_i \tag{4}$$
некоторую формулу приближенного вычисления интеграла
$$\int\limits_0^t F(t) dt, \tag{5}$$

*) Про наближене розв'язання диференціальних рівнянь // Збірник праць Інституту технічної механіки Української Академії наук. 1927. №2. С. 79–87.

что соответствует n точкам деления интервала $(0,1)$, рассмотрим уравнения

$$x_n(t_k) = \sum_{i=0}^{k} A_i^{(k)}(t_k - t_i) f(x_n(t_i), t_i)\Delta t_i + a + bt_k. \tag{6}$$

Взяв число делений n достаточно большим и выбрав надлежащим образом формулу (4), получим ряд соотношений для приближенного вычисления искомой функции $x(t)$. Необходимо, однако, определить степень точности полученных приближений. Для этого прежде всего покажем, что $x_n(t_k)$ ограничены в совокупности, если разности Δt_i — порядка малости $1/n$ при $n \to \infty$.

Действительно, для функции двух переменных $f(x,t)$ $(0 \leqslant t \leqslant 1, -\infty \leqslant x \leqslant \infty)$ можно найти такую функцию $\Phi(x)$, что

$$|f(x,t)| \leqslant \Phi(x), \quad 0 \leqslant t \leqslant 1, \quad -\infty \leqslant x \leqslant \infty.$$

Тогда очевидно, что

$$|x_n(t_k)| \leqslant X_n(t_k),$$

где $X_n(t_n)$ удовлетворяет уравнению

$$X_n(t_k) = M \sum_{i=0}^{k-1} \Phi[X_n(t_i)]\Delta t_i + |a| + |b|,$$

при этом

$$M = \max |A_i^{(k)}| \quad (k = 0, 1, \ldots, n, \quad i = 0, 1, \ldots, k)$$

или

$$\frac{X_n(t_k) - X_n(t_{k-1})}{t_k - t_{k-1}} = M\Phi[X_n(t_k)], \quad X_n(0) = |a| + |b|.$$

Отсюда очевидно [1)], что $x_n(t_k)$ не только ограничены в совокупности, но и стремятся при $n \to \infty$ к решению уравнения

$$\frac{d\overline{X}}{dt} = M\Phi[\overline{X}], \quad \overline{X}_{t=0} = |a| + |b|.$$

Следовательно, все $|X_n(t_i)|$ ограничены числом N, которое не зависит ни от i, ни от n; вычитая теперь из уравнения (3) уравнение (6), получаем

$$[x(t_k) - x_n(t_k)] = \sum_{i=0}^{k} A_i^{(k)}(t_k - t_i)[f(x(t_i), t_i) - f(x_n(t_i), t_i)]\Delta t_i +$$

[1)] См., например: *Goursat*. Cours d'Analyse Mathematique. T. I. Paris, 1902.

$$+\left[\int_0^{t_k}(t_k-\xi)f(x(\xi),\xi)d\xi-\sum_{i=0}^{k}A_i^{(k)}(t_k-t_i)f(x(t_i),t_i)\Delta t_i\right]. \quad (7)$$

Пусть

$$\lambda=\max\left|\frac{df}{dx}\right| \quad (0\leqslant t\leqslant 1,\ -N\leqslant x\leqslant N),$$

$$A=\max|A_i^{(k)}| \quad (i=0,1,\ldots,k,\ k=0,1,\ldots,n),$$

$$E_n=\max\left|\int_0^{t_k}(t_k-\zeta)f(x(\zeta),\zeta)d\zeta-\sum_{i=0}^{k}A_i^{(k)}(t_k-t_i)f(x(t_i),t_i)\Delta t_i\right|.$$

Тогда из (7) следует, что

$$|x(t_k)-x_n(t_k)|\leqslant r_n(t_k),$$

где

$$r_n(t_k)=A\lambda\sum_{i=0}^{k-1}r_n(t_i)\Delta t_i+E_n.$$

Отсюда, принимая во внимание, что

$$r_n(t_k)=E_n(1+A\lambda\Delta t)(1+A\lambda\Delta t_1)\ldots(1+A\lambda\Delta t_{k-1}),$$

получаем

$$|x(t_k)-x_n(t_k)|\leqslant E_n(1+A\lambda\Delta t)(1+A\lambda\Delta t_1)\ldots(1+A\lambda\Delta t_{k-1}). \quad (8)$$

В частности, при равномерном разделении $\Delta t_i=\Delta t=1/n$ находим

$$|x(t_k)-x_n(t_k)|\leqslant E_n\left\{\left(1+\frac{A\lambda}{n}\right)^{n/(A\lambda)}\right\}^{A\lambda(k/n)}=E_n\mathrm{e}^{A\lambda(k/n)}+\eta_nE_n, \quad (9)$$

где η_n стремится к нулю вместе с n.

Следовательно, погрешность, которую мы совершаем, взяв $x_n(t_k)$ вместо $x(t_k)$, пропорциональна величине E_n. Поэтому, чтобы определить максимум погрешности, нужно вычислить величину E_n.

Допустим, что формула

$$\int_0^{t_k}\varphi(t)dt=\sum_{i=0}^{k}A_i^{(k)}\varphi(t_i)\Delta t$$

точна́ для кривых, которые в интервалах $m\Delta t$ (подразумевается, что n делится на m) состоят из полиномов степени $k \geqslant 1$. Допустим далее, что

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \int\limits_0^t \Theta(t)dt + c$$

(это будет, когда $f(x,t)$ удовлетворяет условию Липшица не только относительно x, но и относительно t). Тогда

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \operatorname{sign}(t-\xi)\Theta(\xi)d\xi + c'$$

и

$$E_n = \max\left|\int\limits_0^{t_k}(t_k-\zeta)\frac{d^2x}{dt^2}d\zeta - \sum_{i=0}^{k} A_i^{(k)}(t_k-t_i)\Big(\frac{d^2x}{dt^2}\Big)_{t=t_i}\Delta t\right| =$$

$$= \frac{1}{2}\max\left|\int\limits_0^{t_k}(t_k-\xi)\left[\int\limits_0^1 \operatorname{sign}(\xi-\zeta)\Theta(\zeta)d\zeta\right]d\xi - \sum_{i=0}^{k} A_i^{(k)}(t_k-t_i)\times\right.$$

$$\left.\times\left[\int\limits_0^1 \operatorname{sign}(t_i-\zeta)\Theta(\zeta)d\zeta\right]\Delta t\right| = \frac{1}{2}\max\left|\int\limits_0^1 \Theta(\zeta)\left\{\int\limits_0^{t_k}(t_k-\xi)\operatorname{sign}(\xi-\zeta)d\xi-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\sum_{i=0}^{k} A_i^{(k)}(t_k-t_i)\operatorname{sign}(t_i-\zeta)\Delta t\right\}d\zeta\right|.$$

Отсюда, обозначая величину, которая стоит в фигурных скобках, $\eta_n(\zeta)$ и принимая во внимание неравенство Шварца, находим

$$E_n \leqslant \frac{1}{2}\sqrt{\int\limits_0^1 \Theta^2(\xi)d\xi}\,\sqrt{\int\limits_0^1 \eta_n^2(\xi)d\xi}\,.$$

Далее получаем

$$|\eta_n(\zeta)| = \left|\int\limits_0^{t_k}(t_k-\xi)\operatorname{sign}(\xi-\zeta)d\xi - \sum_{i=0}^{k} A_i^{(k)}(t_k-\zeta)\operatorname{sign}(t_i-\zeta)\Delta t-\right.$$

$$- \left(\int_0^{t_k} |\xi - \zeta| d\xi - \sum_{i=0}^{k} A_i^{(k)} |t_k - \zeta| \Delta t \right) \Bigg| \leqslant \left| \int_0^{t_k} \operatorname{sign}(\xi - \zeta) d\xi - \right.$$

$$\left. - \sum_{i=0}^{k} A_i^{(k)} \operatorname{sign}(t_i - \zeta) \Delta t \right| + \left| \int_0^{t_k} |\xi - \zeta| d\xi - \sum_{i=0}^{k} A_i^{(k)} |t_i - \zeta| \Delta t \right| = \eta_1(\zeta) + \eta_2(\zeta).$$

Для вычисления η_1 и η_2 следует только заметить, что неравенство нулю η_1 и η_2 зависит от наличия в интервале $(0,\ t_k)$ интервала $m\Delta t_{\zeta=\xi}$, в котором лежит точка $\xi = \zeta$. Пусть $\Phi(\xi, \zeta)$ — кривая, которая вне $m\Delta t_{\xi=\zeta}$ совпадает с $\operatorname{sign}(\xi - \zeta)$, а внутри этого интервала — с прямой, проходящей через точки $(t_s, \operatorname{sign}(t_s - \zeta))$ и $(t_s + m\Delta t, \operatorname{sign}(t_s + m\Delta t - \zeta))$, когда t_s является начальной точкой интервала $m\Delta t$, где лежит точка $\xi = \zeta$.

Поскольку для $\Phi(\xi, \zeta)$ рассмотренная формула приближенного нахождения величины интеграла точна́, то

$$\eta_1 = \left| \int_0^{t_k} \operatorname{sign}(\xi - \zeta) d\xi - \sum_{i=0}^{k} A_i^{(k)} \operatorname{sign}(t_i - \zeta) \Delta t \right| \leqslant$$

$$\leqslant \left| \int_0^{t_k} [\operatorname{sign}(\xi - \zeta) - \Phi(\xi, \zeta)] d\xi \right| + \left| \sum_{i=0}^{k} A_i^{(k)} [\operatorname{sign}(t_i - \zeta) - \Phi(t_i, \zeta)] \Delta t \right|.$$

Далее, так как вне $m\Delta t_{\zeta=\xi}$ $\Phi(\xi, \zeta)$ совпадает с $\operatorname{sign}(\xi - \zeta)$, то

$$\eta_1 \leqslant \left| \int_{t_s}^{t_s + m\Delta t} [\operatorname{sign}(\xi - \zeta) - \Phi(\xi, \zeta)] d\xi \right| +$$

$$+ \left| \int_{i=s}^{s+m} A_i^{(k)} [\operatorname{sign}(t_i - \zeta) - \Phi(t_i, \zeta)] \Delta t \right| \leqslant (1 + A) d m \Delta t,$$

если A есть $\max |A_i^{(k)}|$, а d — погрешность, с которой в интервале $(t_s,\ t_s + m\Delta t)$ может быть приближена $\operatorname{sign}(\xi - \zeta)$ до прямой, проходящей через точки $(t_s, \operatorname{sign}(t_s - \zeta))$ и $(t_s + m\Delta t, \operatorname{sign}(t_s + m\Delta t))$. Очевидно, $d \leqslant 1$. Поэтому

$$\eta_1 \leqslant (1 + A) m\Delta t.$$

Аналогично

$$\eta_2 \leqslant (1 + A)(m\Delta t)^2.$$

Поэтому окончательно

$$E_n \leqslant \frac{1+A}{2}\sqrt{\int\limits_0^1 \Theta^2(\zeta)d\zeta\,[m\Delta t+(m\Delta t)^2]}.$$

Допустим далее, что $n > v_1 + 1$ и

$$\frac{d^{3+v_1}x}{dt^{3+v_1}} = \int\limits_0^t \Theta(t)dt + \mathrm{const}.$$

Тогда

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{1}{(1+v_1)!}\int\limits_0^1 (t-\zeta)^{v_1}(t-\zeta)\Theta(\zeta)d\zeta + P_{1+v_1}(t),$$

где $P_{1+v_1}(t)$ — некоторый полином степени $1+v_1$.

Рассуждая аналогично, находим

$$E_n \leqslant \frac{(1+A)m\Delta t}{2(1+v_1)!}[d_1+d_2]\sqrt{\int\limits_0^1 \Theta^2(\xi)d\xi}\,,$$

где d_1 и d_2 — в сущности те погрешности, с которыми в интервале $(t_\zeta,$ $t_\zeta + m\Delta t)$ могут быть аппроксимированы функции $(\xi-\zeta)^{v_1}|\xi-\zeta|^n$ полиномами k-й степени.

С помощью преобразования интервала $(t_\xi,\ t_\xi + m\Delta t)$ к $(-1,+1)$ и теоремы Бернштейна находим

$$d_1 \leqslant \left(\frac{m\Delta t}{2k}\right)^{1+v_1}, \quad d_2 \leqslant \left(\frac{m\Delta t}{2k}\right)^{2+v_1}.$$

Отсюда

$$E_n \leqslant \frac{(1+A)m\Delta t}{2(1+v_1)!}\left[\left(\frac{m\Delta t}{2k}\right)^{1+v_1} + \left(\frac{m\Delta t}{2k}\right)^{2+v_1}\right].$$

Аналогично получаем

$$E_n \leqslant \frac{(1+A)\,(m\Delta t/(2k))\,m\Delta t}{k!}\sqrt{\int\limits_0^1 \Theta^2(t)dt}\,,$$

если

$$\frac{d^{2+k}x}{dt^{2+k}} = \int\limits_0^t \Theta(t)dt + \text{const}.$$

Применим наши формулы в случае, когда (4) является формулой Лапласа

$$\left[\frac{1}{2}\varphi_0 + \varphi_1 + \ldots + \varphi_{k-1} + \frac{1}{2}\varphi_k\right]\Delta t - \frac{\Delta t}{12}[\Delta\varphi_{k-1} - \Delta\varphi_0] - \frac{\Delta t}{24}[\Delta^2\varphi_{k-2} + \Delta^2\varphi_0].$$

Положив для краткости

$$x_n(t_k) = x_k, \quad f(x_n(t_k), t_k) = f_k,$$

запишем систему (6) в виде

$$x_k = \Delta t\left[\frac{1}{2}t_k f_0 + (t_k - \Delta t)f_1 + \ldots + \Delta t f_{k-1}\right] - \frac{\Delta t}{12}\{\Delta[(t_k - t_i)f_i]_{i=k-1} -$$
$$- \Delta[(t_k - t_i)f_i]_{i=0}\} - \frac{\Delta t}{24}\{\Delta^2[(t_k - t_i)f_i]_{i=k-2} + \Delta^2[(t_k - t_i)f_i)]_{i=0}\} + a + bt_k.$$

Заметив, что

$$\Delta[(t_k - t_i)f_i]_{i=k-1} = (t_k - t_k)f_k - (t_k - t_{k-1})f_{k-1} = -\Delta t f_{k-1},$$

$$\Delta^2[(t_k - t_i)f_i]_{i=k-2} = (t_k - t_k)f_k - 2(t_k - t_{k-1})f_{k-1} +$$
$$+ (t_k - t_{k-2})f_{k-2} = -2\Delta t\Delta f_{k-2},$$

перепишем нашу систему в виде

$$x_k = \Delta t\left[\frac{1}{2}t_k f_0 + (t_k - \Delta t)f_1 + \ldots + \Delta t f_{k-1}\right] +$$
$$+ \frac{(\Delta t)^2}{12}f_{k-1} + \frac{(\Delta t)^2}{12}\Delta f_{k-2} + A + Bt_k,$$

где A и B — постоянные, не зависящие от t_k. Отсюда, взяв вторую разность, находим

$$\Delta^2 x_{k-1} = (\Delta t)^2 f_k + \frac{(\Delta t)^2}{12}\Delta^2 f_{k-2} + \frac{(\Delta t)^2}{12}\Delta^3 f_{k-3}.$$

Следовательно, в нашем случае система (6) есть не что иное, как в скрытом виде формула Штермера. Поэтому для E_n из этой формулы получаем (ибо для нее $k = 3$, $m = 3$, $A = 1$):

$$\text{если } \frac{d^2x}{dt^2} = \int_0^t \Theta_1(t)dt + \text{const}, \text{ то } E_n \leqslant 3(\Delta t)^2(1 + 3\Delta t)\sqrt{\int_0^1 \Theta_1^2(t)dt}\,,$$

$$\text{если } \frac{d^3x}{dt^3} = \int_0^t \Theta_2(t)dt + \text{const}, \text{ то } E_n \leqslant \frac{3}{2}(\Delta t)^2\left(1 + \frac{1}{2}\Delta t\right)\sqrt{\int_0^1 \Theta_2^2(t)dt}\,,$$

$$\text{если } \frac{d^4x}{dt^4} = \int_0^t \Theta_3(t)dt + \text{const}, \text{ то } E_n \leqslant \frac{3}{8}(\Delta t)^3(1 + \Delta t)\sqrt{\int_0^1 \Theta_3^2(t)dt}\,,$$

$$\text{если } \frac{d^5x}{dt^5} = \int_0^t \Theta_4(t)dt + \text{const}, \text{ то } E_n \leqslant \frac{(\Delta t)^4}{8}\sqrt{\int_0^1 \Theta_4^2(t)dt}\,.$$

В силу того что на практике обычно функцию $f(x, t)$ задают графически и она удовлетворяет только условиям Липшица, можно лишь сказать, что E_n при $n \to \infty$ имеет тот же порядок малости, что и $1/n$. Однако на практике метод Штермера дает очень точные результаты.

Заметим, что на практике нет особой надобности в том, чтобы $x_n(t)$ быстро стремились к $x(t)$, важно только, чтобы они быстро стремились к $x_n(t + \varepsilon)$, где ε — практически сколь угодно малая величина.

Рассуждая таким образом, заменим $f(x, t)$ некоторым полиномом $P(x, t)$, выбранным так, чтобы разность

$$|f(x, t) - P(x, t)| = \varepsilon(x, t)$$

была очень малой величиной. Можно показать, что разность $|x - \overline{x}|$, где $\overline{x}$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2\overline{x}}{dt^2} = P(\overline{x}, t), \quad \overline{x}_0 = a, \quad \overline{x}'_0 = b,$$

также становится очень малой величиной.

Действительно,

$$\frac{d^2(x - \overline{x})}{dt^2} = \lambda(t)(x - \overline{x}) - \varepsilon(x, t),$$

где

$$\lambda(t) = P'_x(\overline{x} + \Theta(x - \overline{x}), t) \leqslant \lambda$$

(λ — коэффициент Липшица), $0 \leqslant \Theta \leqslant 1$. Отсюда

$$|x - \overline{x}| \leqslant \varepsilon e^{\lambda t} \leqslant \varepsilon e^{\lambda},$$

т. е. действительно при соответствующем выборе ε $|x - \overline{x}|$ очень малая величина. Тогда и разность $|\varepsilon_n - \overline{\varepsilon}| = \eta$ очень малая величина. Но так как $d^2\overline{x}/dt^2$ имеет бесчисленное множество производных, то $\overline{\varepsilon}_n$ быстро стремится к нулю, в силу чего ε_n быстро окажется очень малой величиной. Именно поэтому на практике метод Штермера оказывается очень точным.

Несколько слов о приближенном решении интегральных уравнений с переменными пределами.

Рассмотрим уравнение

$$y(x) = \int\limits_0^x \Phi(x, t, y(t))dt.$$

Заменим в нем интеграл суммой и выберем приближенную формулу так, чтобы в нее не входил последний член

$$\sum_{i=0}^{k-1} A_i^{(k)} \varphi_i \Delta t. \tag{10}$$

Тогда получим

$$y_n(x_k) = \sum_{i=0}^{k-1} A_i^{(k)} \Phi(x_k, x_i, y_n(x_i)).$$

Эта формула дает нам возможность последовательно вычислять значения $y_n(x_k)$. Погрешность, которую мы совершаем, взяв $y_n(x_k)$ вместо $y(x_k)$, можно подсчитать при помощи рассуждений, полностью аналогичных предыдущим. В частности, если

$$\Phi(x, t, y(t)) = \int\limits_0^t \psi(x, t)dt + \text{const}$$

и формула (10) точна́ для кривых, составленных в интервалах $m\Delta t$ из полиномов степени $k > 1$, то погрешность пропорциональна E_n, а

$$E_n \leqslant \frac{m\Delta t}{2}(1 + A)\sqrt{\int\limits_0^1 \Phi^2(x, t)dt}\,,$$

откуда следует, что процесс Штермера сходится, если $\Phi(x, t, y)$ удовлетворяет относительно x, t, y условиям Липшица.

Действительно,

$$y(x'') - y(x') = \int\limits_{x'}^{x''} \Phi(x'', t, y(t))dt + \int\limits_{0}^{x'} [\Phi(x'', t, y(t)) - \Phi(x', t, y(t))]dt.$$

Отсюда

$$|y(x'') - y(x')| \leqslant (M + \lambda)|x'' - x'|,$$

если

$$M = \max |\Phi(x, t, y(t))|,$$

где λ — коэффициент Липшица по x функции $\Phi(x, t, y(t))$. Следовательно,

$$|\Phi(x, t'', y(t'')) - \Phi(x, t', y(t'))| \leqslant N|t'' - t'|.$$

Применяя теорему Лебега, убеждаемся в справедливости сказанного.

Выражаю искреннюю благодарность академику Н. М. Крылову за предложенную мне тему.

О ВЫЧИСЛЕНИИ ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ, УДОВЛЕТВОРЯЮЩИХ НЕКОТОРЫМ НЕЛИНЕЙНЫМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ *)

В технике часто приходится встречаться с колебательным движением. Если допустить (что всегда можно сделать с незначительной для практики погрешностью), что основная сила пропорциональна отклонению, то движение описывается дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами и вопрос вычисления вынужденных колебаний решается просто. Однако вопрос чрезвычайно усложняется, если нельзя считать, что основная сила пропорциональна отклонению. Каждый раз в подобных случаях можно получить более точный вывод, считая основную силу многочленом третьей степени относительно отклонения.

Пусть x — отклонение, а t — время. Следовательно, если внешняя сила $\varphi(t) = k\sin\omega t$ (ограничимся для упрощения этим случаем), то уравнение движения имеет вид

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \alpha x - \beta x^2 - \gamma x^3 = k\sin\omega t.$$

Особое значение имеет случай, когда силовое поле симметрично относительно точки $x = 0$. Тогда $\beta = 0$.

Действительно, благодаря симметрии

$$|\alpha(-x) - \beta(-x)^2 - \gamma(-x)^3| = |\alpha x - \beta x^2 - \gamma x^3|,$$

следовательно,

$$|\alpha x + \beta x^2 - \gamma x^3| = |\alpha x - \beta x^2 - \gamma x^3|.$$

Этим случаем мы и ограничимся.

Итак, рассмотрим уравнение

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \alpha x - \gamma x^3 = k\sin\omega t. \tag{1}$$

---

*) Про обчислення вимушених хитань, що справджують певні нелінійні диференціальні рівняння // Збірник праць Інституту технічної механіки Української Академії наук. 1927. № 2. С. 89–92.