

В. Н. Евдокименков

В. Г. Динеев

К. А. Карп

**Инженерные методы
вероятностного
анализа авиационных
и космических систем**



Посвящается 80-летию
Московского авиационного института (МАИ)

**В. Н. Евдокименков,
В. Г. Динеев, К. А. Карп**

**Инженерные методы
вероятностного анализа
авиационных
и космических систем**

Под редакцией профессора,
доктора технических наук
К. А. Карпа



МОСКВА
ФИЗМАТЛИТ®
2010

УДК 519
ББК 39.62
Е 15



*Издание осуществлено при поддержке
Российского фонда фундаментальных
исследований по проекту 09-08-07038*

Евдокименков В.Н., Динеев В.Г., Карп К.А. **Инженерные методы вероятностного анализа авиационных и космических систем.** — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2010. — 320 с. — ISBN 978-5-9221-1165-2.

Рассматриваются задачи анализа сложных технических систем с использованием вероятностных критериев качества функционирования. Приводятся теоретические основы алгоритмов численного решения этих задач и сами алгоритмы. Подробно рассмотрен ряд инженерных задач, связанных с вероятностным анализом авиационных и ракетно-космических систем различных типов, таких как пассажирские самолеты, воздушно-космические самолеты (типа «Буран») и ракеты-носители.

Для специалистов, разрабатывающих новые авиационные и космические аппараты, а также для студентов и аспирантов авиационных вузов.

ISBN 978-5-9221-1165-2

© ФИЗМАТЛИТ, 2010

© В. Н. Евдокименков, В. Г. Динеев,
К. А. Карп, 2010

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	6
Глава 1. Вероятностный анализ функций	11
1.1. Постановка задачи и традиционные методы ее решения	12
1.1.1. Исходная задача (12). 1.1.2. Эквивалентные оптимизационные задачи (24). 1.1.3. Задачи безусловной оптимизации (31). 1.1.4. Пары оптимизационных задач (33). 1.1.5. Условия оптимальности доверительных множеств (34). 1.1.6. Двусторонние оценки вероятности и квантили (38).	
1.2. Анализ систем при наличии линейных ограничений.	45
1.2.1. Линейные ограничения (45). 1.2.2. Оценки вероятности и квантили (45).	
1.3. Анализ систем при наличии выпуклых ограничений	51
1.3.1. Построение регулярной сети точек (52). 1.3.2. Направленное интегрирование плотности вероятности для нахождения квантили (55). 1.3.3. Направленное интегрирование плотности вероятности для нахождения вероятности (61).	
1.4. Анализ сложных систем	63
1.4.1. Построение случайной сети точек (64). 1.4.2. Адаптивный алгоритм метода Монте-Карло для нахождения вероятности (65). 1.4.3. Адаптивный алгоритм метода Монте-Карло для нахождения квантили (70). 1.4.4. Гарантированное нахождение оценки квантили (71). 1.4.5. Нахождение оценки квантили на параметрическом доверительном множестве (76). 1.4.6. Гарантированное нахождение оценок вероятности (78).	
1.5. Аппроксимация функции распределения	80
1.5.1. Общая схема алгоритма (80). 1.5.2. Структура алгоритма оценивания (84). 1.5.3. Точность оценок вероятности и квантили (89).	
Глава 2. Вероятностный анализ динамических систем	91
2.1. Постановка задачи и традиционные методы ее решения	92
2.1.1. Исходная задача (92). 2.1.2. Эквивалентные оптимизационные задачи (98).	
2.2. Анализ линейных динамических систем с использованием необходимых и достаточных условий оптимальности.	100
2.2.1. Нахождение квантили (100). 2.2.2. Нахождение вероятности (105).	

2.3. Анализ линейных динамических систем с использованием переходной функции	109
2.3.1. Нахождение квантили и вероятности на основе переходной функции (110). 2.3.2. Методика построения критического возмущения (113). 2.3.3. Матричный способ построения дискретной весовой функции (117).	
2.4. Анализ линейных динамических систем при задании случайного возмущения в форме канонического разложения	120
2.4.1. Нахождение квантили и вероятности при задании канонического разложения (121). 2.4.2. Методика построения наиболее вероятного возмущения при его задании в форме канонического разложения (122).	
2.5. Анализ линейных динамических систем при наличии выпуклых ограничений	127
2.5.1. Сведение к задаче вероятностного анализа функций (127). 2.5.2. Нахождение оценки квантили на параметрическом доверительном множестве (131). 2.5.3. Нахождение оценки вероятности на параметрическом доверительном множестве (134).	
2.6. Анализ нелинейных динамических систем	135
2.6.1. Сведение к статической задаче вероятностного анализа (135). 2.6.2. Нахождение оценки квантили на параметрическом множестве достижимости (139). 2.6.3. Нахождение оценки вероятности на параметрическом множестве достижимости (142).	
Глава 3. Вероятностный анализ авиационных и космических систем	144
3.1. Вероятностный анализ управления траекторией предпосадочного маневрирования воздушно-космического летательного аппарата	146
3.1.1. Математические модели движения ВКЛА и возмущений (146). 3.1.2. Наведение и управление ВКЛА на участке предпосадочного маневрирования (152). 3.1.3. Вероятностный анализ точности управления (164).	
3.2. Вероятностный анализ точности радионавигационных средств посадки орбитального корабля	171
3.2.1. Техническая постановка задачи (172). 3.2.2. Математическая постановка задачи (176). 3.2.3. Методика решения задачи (180). 3.2.4. Результаты (186).	
3.3. Оценка текущего состояния авиационной техники в процессе эксплуатации	190
3.3.1. Математическая постановка задачи вероятностно-гарантированного оценивания состояния ВС (191). 3.3.2. Требования к выбору характерных точек траектории ВС и формированию множества контролируемых параметров (195). 3.3.3. Структура алгоритма оценки состояния ВС и его систем в процессе эксплуатации (198).	
3.4. Вероятностный анализ взлетно-посадочных режимов самолета	212
3.4.1. Анализ движения самолета при разбеге по ВПП (213). 3.4.2. Анализ движения самолета на глиссаде снижения (227).	

3.5. Вероятностный анализ линейной системы стабилизации ЛА с учетом динамики твердого тела, изгибных колебаний и исполнительных органов	238
3.5.1. Постановка задачи (238). 3.5.2. Результаты решения (240).	
3.6. Вероятностный анализ движения твердотопливной ракеты-носителя	250
3.6.1. Основные характеристики ракеты-носителя (250).	
3.6.2. Анализ точности движения (254).	
3.7. Вероятностный анализ управляемого движения жидкостной ракеты	287
3.7.1. Математическая модель управляемого движения жидкостной ракеты (287). 3.7.2. Методика вероятностного анализа движения жидкостной ракеты (297).	
Список литературы	310

ПРЕДИСЛОВИЕ

Одно из актуальных направлений современной теории управления связано с решением вероятностных задач, объективно возникающих вследствие того, что эксплуатация любой технической системы осложняется присутствием неконтролируемых возмущений. Необходимость достижения целей, возлагаемых на эти системы, с одной стороны, и ограниченные возможности по парированию действующих возмущений, с другой стороны, приводят к обязательному учету этих возмущений на этапе разработки при анализе и оптимизации показателей эффективности сложных систем.

Одним из классов современных сложных управляемых динамических систем являются аэрокосмические летательные аппараты (ЛА), такие, как военные и гражданские самолеты, орбитальные корабли и ракеты-носители. Эти ЛА функционируют в условиях присутствия возмущений различной природы: разбросы тяги двигательной установки, случайные вариации параметров атмосферы и аэродинамических характеристик, ошибки навигационных измерений, погрешности работы системы управления и др. Случайные возмущения приводят к тому, что показатель, количественно характеризующий достижение заданной цели функционирования ЛА, также является случайным. Поэтому в качестве наиболее адекватного критерия, позволяющего выбрать предпочтительный вариант ЛА и его систем, выступает вероятность того, что показатель, характеризующий качество функционирования авиационной или космической системы, ограничен требуемым значением. Иногда применяется обратный критерий — квантиль, определяющий такое значение показателя, которое не будет превышено в условиях наличия случайных возмущений с заданной вероятностью.

Отметим важность использования вероятности в качестве критерия. Обычно вероятность используется для оценки эффективности аэрокосмических аппаратов в целом. Так, в соответствии с нормами Международной федерации гражданской авиации (ИКАО) вероятность безаварийного полета пассажирского самолета должна превышать 0,999 999; требование к вероятности успешного полета орбитального корабля «Буран» составляло не менее 0,995; вероятность выведения спутника на орбиту или вероятность попадания ракеты в цель также должна быть не менее требуемой. Однако, несмотря на важность вероятностных критериев, в задачах анализа, оптимизации, управления и оценивания,

связанных в основном с оценкой эффективности функционирования подсистем ЛА и предполагающих исследование моделей движения, часто используются другие, более простые и удобные в методическом и в вычислительном плане критерии, например математическое ожидание или дисперсия, позволяющие лишь косвенно учитывать вероятность. В результате значение вероятности может оказаться меньше требуемого. Путем достижения требуемой эффективности функционирования технической системы является непосредственное использование в качестве критерия вероятности или квантили.

Для решения задач анализа точности, оптимизации, управления и оценивания состояния в динамических системах в настоящее время разработан ряд подходов.

Традиционно в инженерной практике для задач исследования движения ЛА используются детерминированные, минимаксные или среднеквадратические критерии, а нелинейные модели движения во многих случаях линеаризуются. Такой подход связан с трудностями непосредственного использования вероятности или квантили в качестве критериев при решении прикладных задач, что объясняется их теоретической сложностью, нелинейностью по отношению к вектору состояния исследуемых систем и, как следствие, сложностью алгоритмов, обеспечивающих вычисление вероятностных критериев. С другой стороны эти критерии являются объективными и удобными для принятия решений показателями эффективности сложных систем, позволяющими перейти от задач многокритериальной оптимизации подсистем ЛА к задаче анализа и оптимизации единой целевой функции, характеризующей функционирование системы в целом.

Наиболее часто на практике для решения вероятностных и квантильных задач используется метод Монте-Карло, связанный с проведением статистического моделирования исследуемых систем и позволяющий оценить вероятность через частоту успешных испытаний. При работе с вероятностями, достигающими в технических задачах уровня 0,99–0,999 999, требуется проведение от 1000 до 10 000 000 испытаний на модели исследуемой системы. Так, при анализе точности автоматической посадки орбитального корабля «Буран» было проведено 8200 статистических испытаний. Такой объем статистического моделирования приводит к большим вычислительным затратам даже в задачах анализа. В задачах оптимизации и поиска оптимального управления вероятность приходится находить неоднократно, что еще больше затрудняет решение.

Один из возможных путей преодоления вычислительных трудностей при решении вероятностных задач связан с использованием доверительного подхода, предложенного в работах В. В. Малышева и А. И. Кибзуна, и близких к нему подходов, исследованных в работах

В. А. Ярошевского, В. П. Кузьмина, В. Г. Динеева и других авторов. Доверительный подход предполагает замену исходных вероятностных или квантильных задач на эквивалентные им задачи, имеющие минимаксную или максиминную структуру. Для решения эквивалентных задач во многих случаях удастся задать хорошее начальное приближение с учетом свойств моделей исследуемых систем, а также использовать известный аппарат решения минимаксных задач. На основе доверительного подхода успешно решен ряд прикладных задач, связанных с коррекцией движения спутника, автоматической посадкой орбитального корабля и др.

Данная монография посвящена рассмотрению алгоритмов численного решения задач анализа точности, возникающих при исследовании движения авиационных и космических ЛА, в которых в качестве критерия непосредственно используется вероятность или квантиль. Авторы прежде всего стремились представить эти алгоритмы в виде, доступном для инженеров, так как в области вероятностного анализа сложных авиационных и космических систем наиболее острой проблемой является не столько получение новых фундаментальных результатов, сколько наглядная интерпретация накопленного в этой области опыта, способная превратить аппарат вероятностного анализа в эффективный инструмент инженерной деятельности.

Глава 1 посвящена теоретическим основам алгоритмов численного нахождения значений вероятности или квантили. Традиционно используемый для этих целей метод Монте-Карло связан со значительными вычислительными затратами, которые можно сократить. Для этого предлагается рассмотреть пространство возмущений, действующих на исследуемый объект, выделив в этом пространстве область, в которой объект функционирует успешно. Для многих технических систем эта область соответствует «малым» по абсолютной величине возмущениям, тогда как «большие» возмущения могут приводить к неуспешному функционированию. Такая интерпретация позволяет рассмотреть задачу, в которой в априори вводятся начальные приближения областей, соответствующих успешному и неуспешному функционированию, а затем расположение этих областей уточняется в процессе решения оптимизационной задачи. За счет этого вместо всего пространства возмущений (как в методе Монте-Карло) исследуется лишь его малая часть, лежащая в окрестности областей успешного и неуспешного функционирования, что и обеспечивает сокращение вычислительных затрат. В гл. 1 приводятся оптимизационные задачи, позволяющие найти эти области, и показывается их эквивалентность исходным задачам нахождения вероятности и квантили.

Далее рассматриваются различные численные алгоритмы решения оптимизационных задач, позволяющие находить точные значения ве-

роятности и квантили, а также их двусторонние оценки при малом и большом количестве действующих возмущений. Также подробно описывается алгоритм нахождения вероятности и квантили, основанный аппроксимации функции распределения.

Глава 2 посвящена алгоритмам численного решения задач нахождения значения вероятности выполнения ограничений на состояние динамической системы или соответствующей квантили.

В этом случае также используется интерпретация этих задач как задач оптимизации областей, формируемых в пространстве возмущений и характеризующих успешное и неуспешное функционирование исследуемой системы. Из теории оптимального управления известно, что такие задачи могут рассматриваться как задачи математического программирования и, следовательно, для их решения применимы приведенные в гл. 1 численные методы. Однако при этом число возмущений, действующих на всех шагах движения динамической системы, велико настолько, что затрудняет использование подобных численных методов для нахождения вероятности и квантили. Поэтому при исследовании динамических систем используется ряд специальных численных методов, основанных на необходимых и достаточных условиях оптимальности. Кроме того, в гл. 2 рассматривается алгоритм вероятностного анализа динамических систем, базирующийся на нахождении переходной функции, и алгоритм, предполагающий задание возмущающего воздействия в виде канонического разложения.

В гл. 3 подробно рассмотрен ряд инженерных задач, связанных с вероятностным анализом ЛА различных типов.

Первой рассматривается задача анализа точности автоматического управления движением ОК «Буран» по траектории предпосадочного маневрирования в условиях действия ветровых возмущений и вариаций плотности атмосферы, заданных с помощью канонических разложений, при наличии случайных разбросов аэродинамических коэффициентов (подъемной силы и лобового сопротивления) относительно их номинальных значений, в условиях присутствия погрешностей навигационных измерений. Подробно излагается методика ее решения, основанная на предположении о возможности аппроксимации функции распределения.

Далее в гл. 3 приводится методика решения задачи вероятностного анализа точности наземных радиотехнических средств, обеспечивающих работу резервного контура управления на этапе предпосадочного маневрирования ОК «Буран». Методика решения включает в себя нахождение вероятности успешного завершения этапа предпосадочного маневрирования при заданных статистических характеристиках ошибок наземных измерительных средств, а также нахождение статистических характеристик ошибок наземных измерительных средств, при

которых обеспечивается успешное завершение этапа с вероятностью, не менее заданной.

Также описывается задача контроля воздушных судов по состоянию. Подробно рассматриваются виды функций, которые могут быть использованы для ее решения, обсуждаются их преимущества и недостатки, приводится методика решения задачи, формализованная в виде ряда последовательно выполняемых действий.

Кроме того, учитывая важность исследования взлетно-посадочных режимов самолета, как наиболее ответственных с точки зрения обеспечения безопасности полетов, рассмотрена методика вероятностного анализа движения пассажирского самолета на указанных пилотажных режимах. На примере исследования взлетно-посадочных режимов самолета демонстрируются возможности различных численных методов вероятностного анализа.

В завершение приводятся результаты решения задачи анализа системы управления ракетой, описываемой линейными дифференциальными уравнениями. Построены переходные функции для всего времени движения, позволяющие легко найти решение задачи вероятностного анализа. При этом анализируется движение только центра масс ракеты. Предлагается также методика вероятностного анализа управляемого движения жидкостной ракеты, предусматривающая анализ движения центра масс, движения вокруг центра масс, алгоритма наведения и работы системы стабилизации.

Авторы надеются, что материалы, представленные в монографии, будут способствовать активному внедрению методов вероятностного анализа в практику создания образцов авиационной и космической техники. Кроме того, монография может представлять интерес для студентов и аспирантов авиационных вузов.

Глава 1

ВЕРОЯТНОСТНЫЙ АНАЛИЗ ФУНКЦИЙ

Глава 1 посвящена численным алгоритмам нахождения вероятности и квантили при исследовании систем, описываемых целевыми функциями, отражающими качество их функционирования. При этом функции могут быть заданы явно и иметь известные свойства (например, быть линейными или выпуклыми), а могут быть и неявными, если исследуемая система представлена в виде «черного ящика», позволяющего только получить значение целевой функции на выходе системы при заданных входных сигналах.

В этой ситуации для нахождения вероятности и квантили традиционно используется стандартный метод Монте-Карло, предполагающий проведение многократного статистического моделирования исследуемой системы, что иногда приводит к значительным (а порой и к недопустимым) вычислительным затратам. Заметим, что при этом основное внимание уделяется моделированию действующих возмущений с заданной функцией распределения, а свойства самой исследуемой системы при вычислениях никак не учитываются. При таком подходе большая часть получаемой в процессе моделирования информации теряется, поскольку не несет новых данных о качестве функционирования исследуемой системы.

Можно снизить вычислительные затраты за счет учета в процессе моделирования свойств исследуемой системы в пространстве возмущений. В этом пространстве существует область, в которой исследуемая система функционирует успешно, а значит, вероятность попадания в эту область равна искомой вероятности. Заметим, что расположение этой области в пространстве возмущений связано со свойствами исследуемой системы. Исходя из этих свойств, можно попытаться задать некоторое начальное приближение области, а затем, в процессе моделирования, его уточнить. При этом вместо проведения статистического моделирования на всем пространстве возмущений (как в стандартном методе Монте-Карло), можно проводить статистическое моделирование анализируемой системы лишь в некоторой окрестности границы искомой области. Очевидно, что исследование функции, описывающей качество функционирования системы, лишь на некоторой части

пространства возмущений всегда проще, чем на всем пространстве. Это и позволяет сократить вычислительные затраты на нахождение вероятности или квантили.

Такой подход к нахождению вероятности и квантили назван доверительным. Он основан на замене исходных задач нахождения вероятности или квантили на эквивалентные им минимаксные или максиминные задачи, связанные с оптимизацией областей в пространстве возмущений. На доверительном подходе базируется ряд алгоритмов численного решения, позволяющих находить точные значения вероятности и квантили, а также их двусторонние оценки для систем, описываемых функциями различных видов и при различном числе действующих возмущений.

Заметим, что при этом, помимо значений вероятности и квантили, удастся найти «критические» возмущения, соответствующие этим значениям. Эти критические возмущения могут быть полезны в случае, когда после математического моделирования системы, описываемой целевой функцией, в дальнейшем предполагается ее полунатурное или натурное моделирование. Возможное число испытаний при таком моделировании еще более сильно ограничено (по сравнению с математическим моделированием). Использование «критических» возмущений позволяет корректно подтвердить вероятностные свойства исследуемой системы при малом числе испытаний.

Кроме того заметим, что в некоторых случаях бывает полезно учесть свойства функции распределения, описывающей качество функционирования исследуемой системы, и за счет этого также сократить вычислительные затраты на решение. Для этого используется алгоритм оценки вероятности и квантили, основанный на аппроксимации функции распределения.

1.1. Постановка задачи и традиционные методы ее решения

Рассмотрим свойства задач нахождения вероятности и квантили, называемых задачами вероятностного анализа. Покажем, что при решении этих задач с использованием традиционных методов вычислительные затраты велики. Для их сокращения исходные задачи вероятностного анализа преобразуем в так называемые эквивалентные оптимизационные задачи.

1.1.1. Исходная задача. Рассмотрим исходную задачу вероятностного анализа, выделив исследуемую функцию, накладываемые на нее ограничения и критерии вероятностного анализа.

Будем считать, что исследуемая функция имеет вид:

$$z = f^1(x), \quad (1.1)$$

где z — выходной вектор, описывающий отдельные характеристики исследуемой функции, $f^1(\cdot)$ — некоторая функция, $x = \text{col}(x_1, \dots, x_n)$ есть конечномерный вектор возмущений — стандартных гауссовских случайных величин (независимых, с нулевыми математическими ожиданиями и единичными дисперсиями). С помощью метода обратных функций, возмущения отличные от гауссовских, могут быть приведены к ним в случае, если их функция распределения является строго возрастающей [113].

На выходные характеристики z наложен ряд ограничений, которые должны выполняться совместно. Для описания всех этих ограничений используем выпуклую вектор-функцию

$$f^2(z) \equiv f^1(x) \quad (1.2)$$

размерности p и вектор Δ той же размерности, ограничивающий сверху значения элементов вектор-функции:

$$f_j^2(z) \leq \Delta^j, \quad j = \overline{1, p}. \quad (1.3)$$

Вектор Δ является вектором отдельных ограничений, наложенных на значения выходного вектора z .

Исследуемая функция, например, может характеризовать процесс успешной посадки самолета. В этом случае элементами выходного вектора z , описывающими процесс посадки, являются: отклонение от осевой линии ВПП, угол крена, угол тангажа, вертикальная скорость и др. Для обеспечения условий успешной посадки величины этих характеристик ограничены сверху заданными значениями. Необходимо проверить выполнение заданных ограничений с учетом того, что в процессе посадки на самолет действуют ветровые, навигационные и др. возмущения, имеющие случайную природу. Эти возмущения могут быть описаны с использованием вектора x .

В качестве формального индикатора, отражающего факт одновременного выполнения всех заданных ограничений, введем первичную целевую функцию (в частном случае — функционал)

$$\Phi_*(z) \equiv \Phi(x) = \max_{j=\overline{1, p}} \{f_j^2(z)/\Delta^j\}, \quad (1.4)$$

причем значения $\Phi_*(z) \leq 1$ отражают факт совместного выполнения всех ограничений (1.3), а $\Phi_*(z) > 1$ — невыполнения хотя бы одного из ограничений (1.3). (Здесь и далее под записью $\Phi_*(z) \equiv \Phi(x)$ будем понимать, что функция $\Phi_*(z)$ задана в пространстве выходных характеристик z , но в силу зависимости вектора z от вектора x в

соответствии с (1.1), может быть заменена на функцию $\Phi(x)$, заданную в пространстве вектора возмущений x).

В рассматриваемом примере анализа успешной посадки самолета значение функции $\Phi_*(z) \leq 1$ будет означать, что фактические величины отклонения от осевой линии ВПП, а также угла крена, угла тангажа и вертикальной скорости от номинальной величины будут все одновременно меньше заданных предельных значений, что и отражает факт успешной посадки.

Значения выходного вектора z будут случайными в силу зависимости от случайного вектора x . Поэтому о выполнении ограничений (1.3) можно говорить лишь в статистическом смысле. Потребуем, чтобы все ограничения выполнялись совместно с вероятностью не менее заданной α . Необходимо проверить выполнение этого условия. Здесь возможны две постановки задачи, называемой задачей вероятностного анализа. Первая из них имеет место в случае, если ограничение на состояние $\Phi_*(z) \leq 1$ должно обязательно выполняться, а заданная вероятность α может быть изменена, $\alpha = \text{var}$. Тогда в качестве критерия для анализа выполнения ограничений (1.3) рассматривается детерминированная вторичная целевая функция — вероятность

$$P_\varphi = P\{z: \Phi_*(z) \leq \varphi\} \quad (1.5)$$

при $\varphi \equiv 1$. Под вероятностью $P\{\cdot\}$ понимается интеграл от плотности вероятности по множеству, определяемому условием в фигурных скобках. Задачу (1.5) будем называть прямой задачей вероятностного анализа. Если после решения задачи (1.5) окажется, что вероятность $P_\varphi \geq \alpha$, то считается, что задача вероятностного анализа решена успешно, т.е. исследуемая функция удовлетворяет заданным ограничениям на вектор состояния с вероятностью не менее α . Для задачи анализа посадки самолета вероятность P_φ при $\varphi \equiv 1$ будет представлять собой вероятность выполнения успешной посадки, т.е. выполнения заданных ограничений. Такая постановка задачи имеет смысл в случае, если рассматривается уже существующий самолет и конкретный аэропорт посадки и требуется найти вероятность посадки этого самолета на взлетно-посадочную полосу (ВПП) этого аэропорта. Посадка может быть разрешена лишь в том случае, если вероятность P_φ окажется не меньше заданной вероятности α . Заметим при этом, что здесь заданная вероятность α может быть в принципе изменена, в то время как ограничения на состояние (1.3), определяемые конструктивными особенностями уже существующих самолета и ВПП аэропорта, изменяться не могут.

Вторая постановка задачи имеет место в случае, если вероятностное ограничение $P_\varphi \geq \alpha$ должно обязательно выполняться, а ограничение на состояние $\Phi_*(z) \leq \varphi$ может быть изменено, $\varphi = \text{var}$. Тогда вместо

вероятности P_φ более удобно использовать другую вторичную целевую функцию — квантиль

$$\Phi_\alpha = \min \{ \varphi : P_\varphi \geq \alpha \}, \quad (1.6)$$

которая определяет такой наименьший уровень φ , при котором ограничение на состояние $\Phi_*(z) \leq \varphi$ выполняется с вероятностью не менее заданной α . Задачу (1.6) будем называть обратной задачей вероятностного анализа. Если после решения задачи (1.6) окажется, что квантиль $\Phi_\alpha \leq 1$, то можно утверждать, что исследуемая система обеспечивает выполнение заданных ограничений с гарантированной вероятностью, не ниже α .

В задаче анализа посадки самолета квантиль Φ_α показывает, во сколько раз должны быть одновременно изменены все ограничения — по отклонению, по углам и по скорости, чтобы они выполнялись с заданной вероятностью. Такая постановка задачи обычно имеет смысл на этапе создания системы (например, самолета или ВПП аэродрома), когда задано основное требование — вероятность успешного полета, а характеристики самолета и ВПП, обеспечивающие достижение требуемой вероятности, должны быть выбраны, а затем обеспечены в процессе проектирования, изготовления и эксплуатации.

Заметим, что решение задачи вероятностного анализа в одной постановке сразу позволяет сделать вывод о выполнении ограничений (1.3) с заданной вероятностью и в другой постановке, поскольку вероятность P_φ и квантиль Φ_α являются взаимно обратными функциями параметров α и φ [87]: если $P_\varphi \geq \alpha$ ($\varphi \equiv 1$), то и $\Phi_\alpha \leq 1$, если $P_\varphi < \alpha$ ($\varphi \equiv 1$), то и $\Phi_\alpha > 1$, рис. 1.1. Это свойство вероятности и квантили широко используется при решении вероятностных задач.

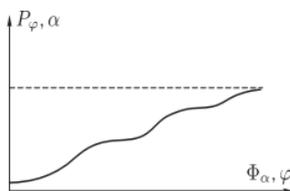


Рис. 1.1. Вероятность и квантиль

Каждое из отдельно взятых ограничений (1.3) вносит свой «вклад» в вероятность их совместного выполнения. Причем эти «вклады» могут существенно отличаться. Поэтому перед решением задач вероятностного анализа (1.5) или (1.6) бывает полезно найти вероятности выпол-

нения отдельных ограничений на элементы вектора состояния (1.3):

$$P_{\Delta^j} = P\{z: f_j^2(z) \leq \Delta^j\} \quad (1.7)$$

и сравнить их с заданной вероятностью α ; или найти отдельные ограничения на состояние, которые выполняются с вероятностью не менее заданной α :

$$\Phi_\alpha^j = \min \{\Delta^j: P_{\Delta^j} \geq \alpha\}. \quad (1.8)$$

В некоторых случаях решение задач (1.7) или (1.8) оказывается более простым по сравнению с задачами (1.5) или (1.6), например, когда $f_j^2(z)$, $j = \overline{1, p}$ — линейные функции.

Если в результате решения задачи (1.7) или (1.8) окажется, что $\min_{j=\overline{1, p}} P_{\Delta^j} < \alpha$ или $\max_{j=\overline{1, p}} \{\Phi_\alpha^j / \Delta^j\} > 1$, то всегда $P_\varphi < \alpha$ ($\varphi \equiv 1$) и $\Phi_\alpha > 1$, и, следовательно, сразу можно сделать вывод о совместном невыполнении ограничений (1.3) с заданной вероятностью α . При выполнении условия $\min_{j=\overline{1, p}} P_{\Delta^j} \geq \alpha$ или $\max_{j=\overline{1, p}} \{\Phi_\alpha^j / \Delta^j\} \leq 1$ можно перейти непосредственно к решению задачи (1.5) или (1.6).

Нахождение P_{Δ^j} и Φ_α^j в задаче анализа посадки самолета позволяет найти ограничения, наиболее «критичные» с точки зрения обеспечения успешной посадки. На удовлетворение этих ограничений и должны быть направлены основные усилия при разработке самолета и ВВП.

Рассмотрим некоторые традиционные методы решения задач вероятностного анализа. Для нахождения вероятности P_φ обычно применяется метод прямого интегрирования плотности вероятности и стандартный метод статистических испытаний (Монте-Карло) [113]. При использовании этих методов вероятность P_φ представляется как интеграл от плотности вероятности $p(x)$ по множеству $\Omega = \{x: \Phi(x) \leq \varphi\}$, на котором все возмущения приводят к выполнению заданных ограничений на состояние. Методы основаны на формировании в пространстве случайных возмущений сети точек (регулярной — при прямом интегрировании плотности вероятности, случайной — в методе Монте-Карло). При этом само пространство разбивается на непересекающиеся подмножества, окружающие точки сети.

При использовании прямого интегрирования плотности вероятности регулярная сеть задается не на всем пространстве, а на его подмножестве Ξ с вероятностной мерой $\beta \gg P_\varphi$. При этом методическая погрешность вычисления P_φ не превышает $1 - \beta$. На Ξ строится регулярная равномерная сеть точек, а само Ξ разбивается на M подмножеств одинакового объема S , причем на каждом подмножестве лежит только одна точка x_i , $i = \overline{1, M}$, сети. В каждой точке x_i , $i = \overline{1, M}$, находится значение плотности вероятности $p(x_i)$, $i = \overline{1, M}$, и функции $\Phi(x_i)$,

$i = \overline{1, M}$. Затем приближенно вычисляется вероятность

$$P_\varphi \approx \hat{P}_\varphi = \int_{\Xi} p(x)\chi(x) dx \approx \sum_{i=1}^M p(x_i)S\chi(x_i) = S \sum_{i=1}^M p(x_i)\chi(x_i), \quad (1.9)$$

где

$$\chi(x_i) = \begin{cases} 1, & \Phi(x_i) \leq \varphi, \\ 0, & \Phi(x_i) > \varphi, \end{cases} \quad i = \overline{1, M}. \quad (1.10)$$

Фактически при использовании этого метода строится ступенчатая функция распределения $F(\varphi)$, позволяющая найти P_φ для различных φ . Максимальная величина «ступеньки», определяющая погрешность метода прямого интегрирования, равна

$$\max_{i=\overline{1, M}} p(x_i)S. \quad (1.11)$$

Поскольку объем S подмножеств, окружающих каждую точку сети, обратно пропорционален числу M точек сети, то ясно, что для достижения требуемой точности при использовании метода прямого интегрирования плотности вероятности необходимо увеличивать число точек M , что ведет к увеличению вычислительных затрат на нахождение значений функции $\Phi(x_i)$, $i = \overline{1, M}$, во всех точках сети. Заметим, что практическая невозможность сформировать регулярную сеть точек в пространстве размерности больше трех ограничивает применение метода прямого интегрирования плотности вероятности.

При использовании стандартного метода Монте-Карло, применимого в пространстве любой размерности, сеть, состоящая из M точек, задается таким образом, чтобы каждое подмножество обладало вероятностной мерой $1/M$. Заметим, что каждое подмножество имеет объем S_i , $i = \overline{1, M}$, а плотность вероятности в точке x_i , принадлежащей подмножеству, равна $p(x_i)$, так что $1/M \approx p(x_i)S_i$, $i = \overline{1, M}$. В каждой точке x_i , $i = \overline{1, M}$, вычисляется значение функции $\Phi(x_i)$, $i = \overline{1, M}$. Оценка вероятности находится по формуле

$$P_\varphi \approx \hat{P} \approx \sum_{i=1}^M \frac{1}{M} \chi(x_i) = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \chi(x_i) = \sum_{i=1}^M p(x_i)S_i\chi(x_i). \quad (1.12)$$

Видно, что данное выражение отличается от (1.9) только тем, что в данном случае все объемы S_i , $i = \overline{1, M}$, различны.

При этом вероятность P_φ удается определить дискретно, с шагом $1/M$. Здесь, как и в методе прямого интегрирования плотности вероятности, видно, что для увеличения точности необходимо увеличивать

число точек M . Заметим также, что в силу статистической природы оценки вероятности (1.12) для нее можно найти дисперсию

$$D[\hat{P}_\varphi] = \frac{P_\varphi(1 - P_\varphi)}{M}. \quad (1.13)$$

Очевидно, что чем меньше дисперсия, тем больше точность получаемой оценки. А для уменьшения дисперсии в соответствии с (1.13) нужно увеличивать число точек M . Следовательно, в силу дискретного вида оценки, получаемой с использованием стандартного метода Монте-Карло, для подсчета вероятностей, близких к 1 (порядка $\alpha = 1 - 10^k$), необходимо не менее 10^k вычислений функции $\Phi(x)$, а для статистической устойчивости получаемой оценки (т. е. для обеспечения малой дисперсии $D[\hat{P}_\varphi]$) — на несколько порядков больше — $10^{k+2} - 10^{k+3}$ вычислений, что затрудняет (а в некоторых случаях делает невозможным) получение решения.

Например, при анализе успешной посадки самолета заданная вероятность может варьировать от 0,999 до 0,999999. При этом требуется провести от 10^5 до 10^9 статистических испытаний модели движения, на каждое из которых требуется (в зависимости от сложности используемой модели) от нескольких минут до нескольких часов компьютерного времени. Отсюда видно, что на исследование процесса посадки с использованием стандартного метода Монте-Карло может потребоваться несколько лет, что недопустимо.

Один из методов уменьшения вычислительных затрат при подсчете вероятности основан на неравенстве Чебышева [87]. Для применения этого неравенства вначале находится математическое ожидание $m = M[\Phi(x)]$ и дисперсия $\sigma^2 = D[\Phi(x)]$ функции $\Phi(x)$. Оценка снизу вероятности получается с помощью выражения [87]:

$$P_\varphi = \begin{cases} 1 - \sigma^2/(\varphi - m)^2, & \varphi - m \geq \sigma, \\ 0, & \varphi - m < \sigma, \end{cases} \quad (1.14)$$

а оценка сверху квантили:

$$\bar{\Phi}_\alpha = \sqrt{\frac{\sigma^2}{1 - \alpha}} + m. \quad (1.15)$$

Однако в неравенстве Чебышева для нахождения вероятности используются промежуточные показатели — математическое ожидание m и дисперсия σ^2 . Как правило, для произвольной функции $\Phi(x)$ эти показатели неизвестны, и вместо них приходится использовать их оценки

$$\hat{m} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \Phi(x), \quad (1.16)$$

$$\widehat{\sigma}^2 = \frac{1}{M-1} \sum_{i=1}^M (\Phi(x) - \widehat{m})^2. \quad (1.17)$$

Из (1.16) и (1.17) видно, что при получении оценок \widehat{m} и $\widehat{\sigma}^2$ возникают такие же трудности, как и при непосредственном подсчете вероятности. Они связаны с необходимостью проведения статистического моделирования и случайной природой оценок \widehat{m} и $\widehat{\sigma}^2$. Кроме того, неравенство Чебышева не позволяет «приблизить» оценку снизу вероятности и оценку сверху квантили к их истинным значениям.

Рассмотрим другой метод снижения вычислительных затрат. Как уже говорилось выше, используя прямое интегрирование плотности вероятности или метод Монте-Карло (при тех же вычислительных затратах), можно получить всю функцию распределения $F(\varphi)$ при $\varphi \in (-\infty, \infty)$. Для уточнения функции распределения в окрестности заданной вероятности можно использовать метод частичного аналитического интегрирования [113]. При использовании этого метода в пространстве \mathbb{R}^n случайных возмущений априори задается множество Ω_1 простого вида (шар, куб), в котором все возмущения приводят к выполнению ограничения на состояние $\Phi(x) \leq \varphi$, и множество Ω_3 , в котором ограничения не выполняются — $\Phi(x) > \varphi$. Вид множеств подбирается так, чтобы обеспечить простоту расчета их вероятностных мер. Вычисления значений функции $\Phi(x)$ проводятся только лишь на множестве $\Omega_2 = \mathbb{R}^n / (\Omega_1 \cup \Omega_3)$. Множество Ω_2 характерно тем, что на нем значения функции $\Phi(x)$ близки к заданному уровню φ , в то время как на множествах Ω_1 и Ω_3 они значительно отличаются от φ . Отсюда следует, что выполнять моделирование функции $\Phi(x)$ на Ω_1 и Ω_3 бессмысленно, поскольку результат его очевиден. Но за счет этого можно увеличить число статистических испытаний, приходящихся на множество Ω_2 . При проведении M статистических испытаний на множестве Ω_2 каждое из них имеет вес $P(\Omega_2)/M$ — меньший, чем при испытаниях на всем \mathbb{R}^n . Пусть \widehat{P}_2 — частота успешных испытаний на Ω_2 :

$$\widehat{P}_2 = \frac{P(\Omega_2)}{M} \sum_{i=1}^M \chi(x_i). \quad (1.18)$$

Тогда вероятность P_φ оценивается по формуле

$$\widehat{P}_\varphi = P(\Omega_1) + \widehat{P}_2, \quad (1.19)$$

а дисперсия оценки вероятности \widehat{P}_φ равна дисперсии

$$D[\widehat{P}_2] = \frac{P_2(P(\Omega_2) - P_2)}{M}, \quad (1.20)$$

поскольку вероятностная мера $P(\Omega_1)$ находится аналитически. Применение метода частичного аналитического интегрирования обеспечивает более точное по сравнению со стандартной схемой метода Монте-Карло построение части функции распределения — с шагом дискретизации $P(\Omega_2)/M$. Из сравнения (1.13) и (1.20) видно, что уменьшение дисперсии оценки вероятности при фиксированном числе испытаний M и $\Omega_3 = \emptyset$ пропорционально P_2/P_φ . Однако априорное выделение множеств Ω_1 , Ω_2 и Ω_3 для сложных функций $\Phi(x)$ практически невозможно, что затрудняет применение метода частичного аналитического интегрирования.

Такой случай имеет место при исследовании процесса посадки самолета, поскольку для описания движения обычно используются сложные нелинейные модели, включающие систему дифференциальных уравнений высокого порядка. Для такой системы вопрос об априорном выделении множеств Ω_1 , Ω_2 и Ω_3 сравним по сложности с самой задачей нахождения вероятности. Поэтому использование метода частичного аналитического интегрирования в задаче вероятностного анализа посадки самолета затруднено.

Перечисленные недостатки традиционных методов решения и их модификаций приводят к необходимости использования специальных алгоритмов, позволяющих снизить вычислительные затраты при нахождении вероятностей, близких к 1. Рассмотрим более общие (по сравнению с методом частичного аналитического интегрирования) методы снижения вычислительных затрат на основе комбинации методов Монте-Карло, групповой и существенной выборок.

Метод групповой выборки предполагает разделение n -мерного пространства случайных величин x не на три множества (как в методе частичного аналитического интегрирования), а на систему непересекающихся множеств $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_L$. В этом случае событие $A(\varphi) = \{x: \Phi(x) \leq \varphi\}$, при котором выполняются все заданные ограничения на состояние, можно представить на основе операций пересечения и объединения событий $\{A(\varphi)\}, \{G_l\}, l = 1, \dots, L$, где $G_l = \{x: x \in \Omega_l\}$,

$$A(\varphi) = \bigcup_{l=1}^L [G_l \cap A(\varphi)]. \quad (1.21)$$

Согласно формуле полной вероятности:

$$P_\varphi = P(A(\varphi)) = \sum_{l=1}^L P(G_l)P(A(\varphi)/G_l). \quad (1.22)$$

Для вычисления оценок P_φ необходимо определить входящие в (1.22) вероятности. Заметим, что вероятности $P(G_l), l = 1, \dots, L$, можно рассчитать аналитически, если специальным образом подобрать

множества Ω_l , $l = 1, \dots, L$. Это возможно при разделении пространства случайных величин вложенными в друг друга кольцевыми шарами с последующим делением образовавшихся кольцевых множеств на симметричные доли (рис. 1.2)

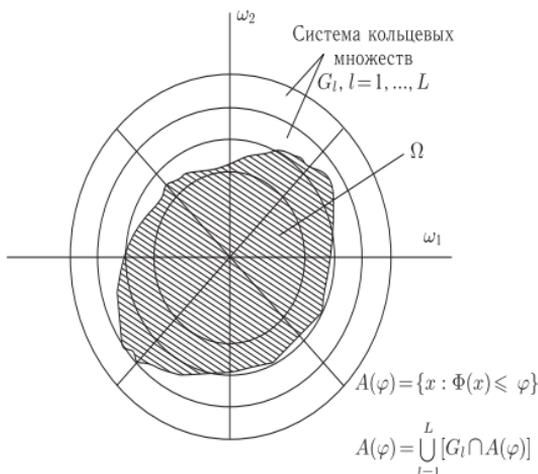


Рис. 1.2. Схема разбиения пространства случайных факторов

Другой способ задания множеств Ω_l , $l = 1, \dots, L$ связан с разделением пространства \mathbb{R}^n на прямоугольники, ориентированные в каком-либо выбранном направлении, не обязательно совпадающем с осями координат.

Для вероятностей $P\{A(\varphi)/G_l\}$, $l = 1, \dots, L$ можно, на основе специальным образом организованного статистического моделирования, получить оценки, отличные от 1 даже при достаточно больших значениях φ . Это достигается за счет моделирования случайных точек x^{il} , $l = 1, \dots, L$ в каждом из множеств Ω_l , $l = 1, \dots, L$. При этом плотность вероятности $p_l(x)$ определяется в виде

$$p_l(x) = \begin{cases} p(x)/P(G_l), & x \in \Omega_l, \\ 0, & x \notin \Omega_l. \end{cases} \quad (1.23)$$

Проведение статистического моделирования по данной схеме с использованием метода групповой выборки так же, как и при использовании метода частичного аналитического интегрирования, снижает объем вычислительных затрат, требуемых для получения значений вероятности P_φ , близких к единице.

Метод существенной выборки основан на представлении

$$P_\varphi = \int_{x \in E_\varphi} p(x) dx = \int_{x \in E_\varphi} p(x) \frac{p_M(x)}{p_M(x)} dx = \int_{x \in E_\varphi} p_M(x) \frac{p(x)}{p_M(x)} dx, \quad (1.24)$$

позволяющем при моделировании вместо плотности вероятности $p(x)$ использовать новую плотность $p_M(x)$, определяющую «механизм» выбрасывания реализаций вектора x .

С учетом (1.24) выражение для расчета вероятности P_φ можно записать следующим образом:

$$P_\varphi = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \left[\frac{p(x_j)}{p_M(x_j)} \right] \chi(x_j), \quad (1.25)$$

где $\chi(x_j)$ — индикаторная функция.

С помощью рассмотренных методов групповой и существенной выборки можно реализовать схему последовательного (адаптивного) планирования статистического моделирования. В методе групповой выборки это может быть достигнуто за счет коррекции в процессе статистических испытаний системы множеств Ω_l , $l = 1, \dots, L$, что позволит выбирать наиболее эффективные с точки зрения оценки вероятности P_φ области моделирования в пространстве случайных факторов. В методе существенной выборки это обеспечивается за счет коррекции плотности распределения вероятностей $p_M(x)$.

Оптимальное разбиение пространства случайных величин на множества Ω_l , $l = 1, \dots, L$, и оптимальный выбор функции $p_M(x)$, видимо, определяются линиями уровня функции $\Phi(x)$. Строго реализовать оптимальное задание множество и моделирующей функции в общем случае не представляется возможным, так как вычислительные трудности, связанные с исследованием функции $\Phi(x)$, в этом случае соизмеримы с трудностями, возникающими при использовании традиционного метода Монте-Карло.

Однако можно ограничиться более простым решением и по текущей информации $\Phi(x_j)$, $j = 1, \dots, N$, накопленной после выполнения конечного объема статистических испытаний N , попытаться построить «макет» $\Phi^*(x)$ функции $\Phi(x)$, например, в квадратичном виде:

$$\Phi^*(x) = x^T A x + B^T x + C, \quad (1.26)$$

где A — матрица $n \times n$; B — вектор $n \times 1$; C — скаляр, уточняемые в процессе проведения статистических испытаний, т. е. по мере накопления информации о функции $\Phi(x)$.

Макет $\Phi^*(x)$ может быть и более детальным, если проводить не общую квадратичную аппроксимацию вида (1.25) на всем пространстве \mathbb{R}^n , а использовать несколько таких аппроксимаций на отдельных под-

множествах. При этом необходимо иметь в виду, что любое усложнение макета приводит к увеличению объема вычислительных затрат на его построение путем статистического моделирования.

Параметры A, B, C в (1.26) могут быть определены на основе метода наименьших квадратов:

$$J = \sum_{j=1}^N [\Phi(x_j) - \{x_j^T A x_j + B^T x_j + C\}] \rightarrow \min_{A, B, C}. \quad (1.27)$$

Решение задачи оптимизации (1.27) может быть получено аналитически, если ввести n^* -мерный ($n^* = n^2 + n + 1$) вектор параметров

$$\theta = (A^{sq}(s = 1, \dots, n; q = 1, \dots, n), B^s(s = 1, \dots, n), C). \quad (1.28)$$

В этом случае

$$J = [\Phi^N(x) - \Lambda^N(x)\theta]^T [\Phi^N(x) - \Lambda^N(x)\theta] \rightarrow \min_{\theta}, \quad (1.29)$$

где $\Phi^N(x)$ — N -мерный вектор измерений макета $\Phi^*(x)$:

$$\Phi^N(x) = \begin{bmatrix} \Phi(x_1) \\ \dots \\ \Phi(x_N) \end{bmatrix}; \quad (1.30)$$

$\Lambda^N(x)$ — матрица линейной модели измерений размерности $N \times (n^2 + n + 1)$:

$$\Lambda^N(x) = \begin{bmatrix} \varphi^T(x_1) \\ \dots \\ \varphi^T(x_N) \end{bmatrix}; \quad (1.31)$$

$$\varphi^T(x_j) = (x_j^S x_j^q(s = 1, \dots, n; q = 1, \dots, n), x_j^S(s = 1, \dots, n), 1). \quad (1.32)$$

Оптимальная оценка запишется в виде

$$\theta^* = [(\Lambda^N(x))^T \Lambda^N(x)]^{-1} (\Lambda^N(x))^T \Phi^N(x).$$

Отметим, что на практике можно определять не все элементы матрицы A , а лишь диагональные. В этом случае размерность вектора n^* существенно понижается (до $2n + 1$). Коррекцию оценок θ^* целесообразно осуществлять периодически — по мере накопления некоторого объема реализаций $\Phi(x)$.

На основе информации о целевой функции $\Phi(x)$ в виде ее макета $\Phi^*(x)$ можно сформировать систему кольцевых множеств $\Omega_l, l = 1, \dots, L$ в методе групповой выборки:

$$\Omega_l = \{x: \Phi^*(x) \leq \varphi_l\}, \quad (1.33)$$

где уровни φ_l подбираются с таким расчетом, чтобы вероятностная мера множества Ω_l была достаточно близкой к единице

В методе существенной выборки моделирующая плотность $p_M(x)$, уточненная после получения реализации функции $\Phi(x)$, задается в виде

$$p_M(x) = k_1 \exp\{-k_2 \Phi^*(x)\}, \quad (1.34)$$

где коэффициент k_1 подбирается из условия нормировки, а коэффициент k_2 уточняется эмпирическим путем и может быть использован в качестве дополнительного параметра оптимизации.

1.1.2. Эквивалентные оптимизационные задачи. Для сокращения вычислительных затрат на решение задач вероятностного анализа будем использовать так называемые эквивалентные оптимизационные задачи, позволяющие учесть свойства первичной целевой функции. Такой подход к решению вероятностных задач назван доверительным [87]. Этот подход основан на том, что, как правило, на основе априорной информации о функции $\Phi(x)$ можно сделать предположение о расположении в пространстве случайного вектора x множества, соответствующего событию $\Phi(x) < \varphi$. Это позволяет при нахождении значения квантили Φ_α и вероятности P_φ исследовать функцию $\Phi(x)$ только в окрестности границы этого множества, а не на всем пространстве случайных возмущений. Под свойствами первичной целевой функции, которые используются в эквивалентных оптимизационных задачах, будем понимать выпуклость и квазивыпуклость. Например, во многих технических системах функция $\Phi(x)$ хорошо мажорируется и минорируется выпуклыми функциями (рис. 1.3).

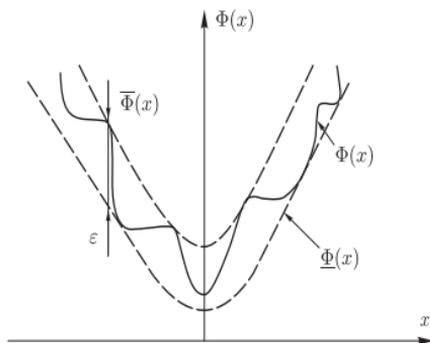


Рис. 1.3. Функция, мажорируемая и минорируемая выпуклыми функциями

Так, система управления самолета в отсутствии возмущений или при некоторых «небольших» по модулю возмущениях (ветре, навига-

ционных ошибках и др.) обеспечивает выполнение успешной посадки. В тоже время очевидно, что «значительные» возмущения, например, сильный боковой ветер, не позволяют выполнить успешную посадку. Вопрос о том, какие по величине возмущения являются «небольшими», а какие «значительными», здесь не конкретизируется. Принципиальным моментом является именно малые значения функции $\Phi(x)$ при «небольших» по модулю возмущениях, и большие — при «значительных». Именно такая ситуация и наблюдается для функции $\Phi(x)$, характеризующей качество посадки самолета, а также для функций, с помощью которых можно описать поведение многих других технических систем.

Степень близости мажоранты $\bar{\Phi}(x)$ и миноранты $\underline{\Phi}(x)$ функции $\Phi(x)$ характеризует число $\varepsilon = \sup_x |\bar{\Phi}(x) - \underline{\Phi}(x)|$. Для таких функций оказывается эффективной замена исходных задач нахождения квантили и вероятности на эквивалентные задачи, имеющие оптимизационную структуру.

Покажем порядок преобразования исходных задач в эквивалентные.

Отметим, что исследуемая первичная целевая функция $\Phi(x) \in \mathbb{R}^1$ зависит от случайного вектора $x \in \mathbb{R}^n$. Значения функции $\Phi(x)$ являются случайными с неизвестной функцией распределения $F(\varphi)$. Событие

$$S_\varphi(\mathbb{R}^1) \triangleq \{\Phi(x): \Phi(x) \leq \varphi\}, \quad (1.35)$$

закрывающееся в том, что значения функции $\Phi(x)$ не превышают заданный уровень φ , называется основным. Событие

$$S^\varphi(\mathbb{R}^1) \triangleq \{\Phi(x): \Phi(x) > \varphi\}, \quad (1.36)$$

закрывающееся в том, что значения функции $\Phi(x)$ строго больше заданного уровня φ , называется дополнительным. Поскольку $\Phi(x)$ является функцией x , то основное событие $S_\varphi(\mathbb{R}^1)$ в пространстве \mathbb{R}^1 порождается событием

$$S_\varphi(\mathbb{R}^n) = \{x: \Phi(x) \leq \varphi\} \quad (1.37)$$

в пространстве \mathbb{R}^n случайного вектора x . Аналогично дополнительное событие S^φ в пространстве \mathbb{R}^1 порождается событием

$$S^\varphi(\mathbb{R}^n) = \{x: \Phi(x) > \varphi\}. \quad (1.38)$$

События $S_\varphi(\mathbb{R}^1)$ и $S^\varphi(\mathbb{R}^1)$ образуют полную группу в \mathbb{R}^1 :

$$\mathbb{R}^1 = S_\varphi(\mathbb{R}^1) \cup S^\varphi(\mathbb{R}^1), \quad (1.39)$$

а события $S_\varphi(\mathbb{R}^n)$ и $S^\varphi(\mathbb{R}^n)$ — полную группу в \mathbb{R}^n :

$$\mathbb{R}^n = S_\varphi(\mathbb{R}^n) \cup S^\varphi(\mathbb{R}^n). \quad (1.40)$$

Исходная постановка задачи (1.5) предполагает определение вероятности

$$P_\varphi \triangleq P\{S_\varphi(\mathbb{R}^1)\} \triangleq P\{S_\varphi(\mathbb{R}^n)\} \quad (1.41)$$

появления основного события $S_\varphi(\mathbb{R}^1)$. Также можно определить вероятность

$$P^\varphi \triangleq P\{S^\varphi(\mathbb{R}^1)\} \triangleq P\{S^\varphi(\mathbb{R}^n)\} \quad (1.42)$$

появления дополнительного события $S^\varphi(\mathbb{R}^1)$. Заметим, что вероятности P_φ и P^φ в силу (1.39), (1.40) связаны соотношением

$$P_\varphi + P^\varphi = 1, \quad (1.43)$$

поэтому нахождение P^φ позволяет определить P_φ , и наоборот.

В соответствии с постановкой исходной задачи, для нахождения квантили необходимо реализовать соотношение (1.6). Покажем, что вместо квантили Φ_α можно искать число

$$\Phi^{1-\alpha} = \sup\{\varphi: P^\varphi > 1 - \alpha\}, \quad (1.44)$$

представляющее собой такой наибольший уровень φ значений функции $\Phi(x)$, который не будет ниже φ с вероятностью более $1 - \alpha$.

Пусть задана функция $\varphi \rightarrow P_\varphi: \mathbb{R}^1 \rightarrow (0, 1)$. Тогда

$$\Phi_\alpha = \Phi^{1-\alpha}. \quad (1.45)$$

Функция $\varphi \rightarrow P_\varphi: \mathbb{R}^1 \rightarrow (0, 1)$ является неубывающей по $\varphi \in \mathbb{R}^1$ (по свойству, аналогичному свойству функции распределения). Подставляя (1.43) в (1.44), получим

$$\begin{aligned} \Phi^{1-\alpha} &= \sup\{\varphi: 1 - P_\varphi > 1 - \alpha\} = \sup\{\varphi: P_\varphi < \alpha\} = \\ &= \min\{\varphi: P_\varphi \geq \alpha\} = \Phi_\alpha. \end{aligned} \quad (1.46)$$

Рассмотрим основанные на доверительном подходе преобразования исходных задач в эквивалентные, позволяющие при использовании априорной информации о виде функции $\Phi(x)$ упростить численное решение. Запишем задачу (1.6) в виде

$$\Phi_\alpha = \min_{\varphi: P_\varphi \geq \alpha} \varphi = \min_{\varphi \in E_{\alpha, \varphi}(\mathbb{R}^1)} \varphi, \quad (1.47)$$

где класс множеств $E_{\alpha, \varphi}(\mathbb{R}^1)$ определяется как

$$E_{\alpha, \varphi}(\mathbb{R}^1) = \{\varphi: P_\varphi \geq \alpha\}. \quad (1.48)$$

Множества $E_{\alpha, \varphi}(\mathbb{R}^1)$ являются множествами таких φ , при которых вероятность $P_\varphi \geq \alpha$. С другой стороны, из (1.14) и (1.16) следует, что

$$\varphi = \sup_{x \in S_\varphi(\mathbb{R}^n)} \Phi(x). \quad (1.49)$$

Видно, что значение φ однозначно определяется множеством $S_\varphi(\mathbb{R}^n)$. Подставим (1.49) в (1.47) с учетом замены ограничения на φ на ограничение по $S_\varphi(\mathbb{R}^n)$:

$$\Phi_\alpha = \min_{S_\varphi(\mathbb{R}^n) \in E_{\alpha, \varphi}(\mathbb{R}^n)} \sup_{x \in S_\varphi(\mathbb{R}^n)} \Phi(x), \quad (1.50)$$

где класс множеств

$$E_{\alpha, \varphi}(\mathbb{R}^n) = \{S_\varphi(\mathbb{R}^n) : P_\varphi \geq \alpha\}. \quad (1.51)$$

Условие $S_\varphi(\mathbb{R}^n) \in E_{\alpha, \varphi}(\mathbb{R}^n)$ является избыточным, поскольку $E_{\alpha, \varphi}(\mathbb{R}^n)$ в соответствии с (1.49) состоит

- а) только из множеств $S_\varphi(\mathbb{R}^n)$;
- б) обладающих вероятностной мерой не менее α .

Оставим только условие б):

$$\Phi_\alpha = \min_{S_\varphi(\mathbb{R}^n) \in E_\alpha} \sup_{x \in S_\varphi(\mathbb{R}^n)} \Phi(x), \quad (1.52)$$

где класс множеств

$$E_\alpha = \{E : P(E) \geq \alpha\}, \quad (1.53)$$

E — произвольное множество в \mathbb{R}^n , которое будем называть доверительным.

Возьмем произвольное множество $E \in E_\alpha$ и множество $S_{\Phi_\alpha}(\mathbb{R}^n) \in E_\alpha$, соответствующее квантили порядка α для заданной функции $\Phi(x)$. Теоретически возможны 3 варианта расположения этих множеств:

- 1) $E \supset S_{\Phi_\alpha}(\mathbb{R}^n)$;
- 2) $E \cap S_{\Phi_\alpha}(\mathbb{R}^n) \neq \emptyset$, $E \not\subset S_{\Phi_\alpha}(\mathbb{R}^n)$, $S_{\Phi_\alpha}(\mathbb{R}^n) \not\subset E$;
- 3) $E \subset S_{\Phi_\alpha}(\mathbb{R}^n)$.

Пусть $E \supset S_{\Phi_\alpha}(\mathbb{R}^n)$. Тогда

$$\sup_{x \in E} \Phi(x) \geq \Phi_\alpha. \quad (1.54)$$

Пусть $E \cap S_{\Phi_\alpha}(\mathbb{R}^n) \neq \emptyset$, $E \not\subset S_{\Phi_\alpha}(\mathbb{R}^n)$, $S_{\Phi_\alpha}(\mathbb{R}^n) \not\subset E$. Тогда также выполняется (1.54). Пусть $E \subset S_{\Phi_\alpha}(\mathbb{R}^n)$. Тогда обязательно выполняется условие

$$\sup_{x \in E} \Phi(x) \equiv \Phi_\alpha, \quad (1.55)$$

так как в противном случае

$$\sup_{x \in E} \Phi(x) < \Phi_\alpha \quad (1.56)$$

и найдется $\varphi < \Phi_\alpha$, такое, что $P(S_\varphi(\mathbb{R}^n)) = \alpha$, а это означает, что Φ_α — не квантиль уровня α в соответствии с (1.6). Следовательно, заменив $S_\varphi(\mathbb{R}^n)$ на $E \in E_\alpha$ в операции \sup в (1.52), получим оценку сверху

квантили Φ_α , которую можно уменьшить точно до величины квантили (на основе (1.55)), заменив также $S_\varphi(\mathbb{R}^n)$ на $E \in E_\alpha$ в операции \min . Основываясь на проведенных преобразованиях, сформулируем следующее утверждение.

Задача (1.6) эквивалентна следующей оптимизационной задаче:

$$\Phi_\alpha = \min_{E \in E_\alpha} \sup_{x \in E} \Phi(x), \quad (1.57)$$

где E_α — класс множеств с вероятностной мерой не менее α , определяемой по (1.53).

Выигрыш от использования эквивалентной оптимизационной задачи (1.57) вместо исходной задачи (1.6) основан на том, что она позволяет исследовать лишь часть пространства \mathbb{R}^n , лежащую в окрестности начального доверительного множества E_0 в процессе его оптимизации, в то время как задача (1.6) предполагает исследование всего пространства \mathbb{R}^n . В этом смысле решение задачи (1.57) аналогично решению задач направленной оптимизации, в которой задано начальное приближение — множество E_0 , в то время как решение задачи (1.6) аналогично решению задач ненаправленной оптимизации. Замена ненаправленной оптимизации на направленную и обеспечивает сокращение вычислительных затрат.

Эквивалентная постановка задачи нахождения квантили впервые в полном виде, с доказательством, была приведена в [81].

Аналогично преобразуя задачу (1.42), можно сформулировать следующее утверждение.

Задача (1.44) эквивалентна следующей оптимизационной задаче:

$$\Phi^{1-\alpha} = \sup_{D \in E^{1-\alpha}} \inf_{x \in D} \Phi(x). \quad (1.58)$$

При этом в \mathbb{R}^n рассматривается класс множеств с вероятностной мерой более $1 - \alpha$:

$$E^{1-\alpha} = \{D: P(D) > 1 - \alpha\}, \quad (1.59)$$

где D — произвольное множество, которое также будем называть доверительным.

Так же, как и задача (1.57), задача (1.58) позволяет сократить вычислительные затраты на решение по сравнению с задачей (1.44) за счет использования методов направленной оптимизации.

Заметим, что если P_φ — строго возрастающая непрерывная по φ функция, то выражение для квантили принимает более простой вид [81, 87]:

$$\Phi_\alpha = \{\varphi: P_\varphi = \alpha\}, \quad (1.60)$$

а выражение для числа $\Phi^{1-\alpha}$ — вид:

$$\Phi^{1-\alpha} = \{\varphi: P^\varphi = 1 - \alpha\}. \quad (1.61)$$

В этих условиях эквивалентная задача (1.57) также примет более простой вид [81, 87]:

$$\Phi_\alpha = \min_{E \in \bar{E}_\alpha} \sup_{x \in E} \Phi(x), \quad (1.62)$$

где

$$\bar{E}_\alpha = \{E: P(E) = \alpha\}, \quad (1.63)$$

а задача (1.58) —

$$\Phi^{1-\alpha} = \sup_{D \in \bar{E}^{1-\alpha}} \inf_{x \in D} \Phi(x), \quad (1.64)$$

где

$$\bar{E}^{1-\alpha} = \{D: P(D) = 1 - \alpha\}. \quad (1.65)$$

В задачах (1.62) и (1.64) используются множества с фиксированной вероятностной мерой α и $1 - \alpha$ соответственно, что позволяет более определенно задать их начальные приближения.

Для эквивалентности задач (1.6) и (1.62) достаточно, чтобы сумма атомов меры $P(\cdot)$ в \mathbb{R}^n не превышала α [87]. Под атомом меры $P(\cdot)$ понимается такое измеримое множество $A \subset \mathbb{R}^n$ с мерой $P(A) \neq 0$, при котором из условия $\bar{B} \subset A$ следует: $P(B) = 0$ или $P(A \setminus B) = 0$. Если функция распределения $F(x)$ случайного вектора x непрерывна, то у меры $P(\cdot)$ нет атомов. Расширим условие эквивалентности.

Пусть

1) $a_i, i = \overline{1, k}$ — атомы меры $P(\cdot)$, занумерованные в некотором порядке,

2) при некотором l выполняется одно из условий

$$\sum_{i=1}^{l \leq k} P(a_i) = \alpha, \quad \sum_{i=1}^k P(a_i) < \alpha. \quad (1.66)$$

Тогда всегда можно выделить множество E с вероятностной мерой $P(E) = \alpha$.

Пусть выполнены условия (1.66) для различного порядка нумерации атомов меры $P(\cdot)$. Тогда множество E не единственное.

Рассмотрим задачу (1.5) и случайное событие $S_\varphi(\mathbb{R}^1)$. При этом событию $S_\varphi(\mathbb{R}^1)$, как видно из (1.35), соответствует множество $S_\varphi(\mathbb{R}^n)$, а вероятность P_φ равна вероятностной мере этого множества. Рассмотрим в пространстве \mathbb{R}^n множество $E \subseteq S_\varphi(\mathbb{R}^n)$.

Задача (1.5) эквивалентна оптимизационной задаче [81]:

$$P_\varphi = \sup_{E \subseteq S_\varphi(\mathbb{R}^n)} P(E). \quad (1.67)$$

Задача (1.67) предполагает задание начального доверительного множества с известной вероятностной мерой, а затем его перестроение в оптимальное. При этом вероятность находится не на всем пространстве случайных возмущений, а лишь на множестве, представляющем собой разницу начального множества и оптимального. Это обеспечивает сокращение вычислительных затрат по сравнению с задачей (1.5).

Для любого множества $E \subseteq S_\varphi(\mathbb{R}^n)$ вероятностная мера

$$P(E) \leq P(S_\varphi(\mathbb{R}^n)), \quad (1.68)$$

если $E \equiv S_\varphi(\mathbb{R}^n)$, то

$$P(E) \equiv P(S_\varphi(\mathbb{R}^n)). \quad (1.69)$$

Следовательно, перебирая множества $E \subseteq S_\varphi(\mathbb{R}^n)$, можно максимизировать вероятностную меру $P(E)$, и этот \sup будет равен P_φ .

Задача (1.42) эквивалентна следующей оптимизационной задаче [81]:

$$P^\varphi = \sup_{D \subseteq S^\varphi(\mathbb{R}^n)} P(D), \quad (1.70)$$

Здесь $S^\varphi(\mathbb{R}^n)$ — множество в \mathbb{R}^n , определяемое (1.38).

Выигрыш от использования задачи (1.70) вместо задачи (1.42) аналогичен выигрышу от применения (1.67) вместо (1.5).

При численной реализации оптимизационных задач (1.67), (1.70) возникают трудности, связанные с выделением вписанных множеств в пространстве \mathbb{R}^n . Рассмотрим задачу нахождения числа

$$\psi(E) = \sup_{x \in E} \Phi(x). \quad (1.71)$$

Если $\psi(E) \leq \varphi$, то $E \subseteq S_\varphi(\mathbb{R}^n)$, что следует из определения множества $S_\varphi(\mathbb{R}^n)$. Тогда задачу (1.67) можно представить в более удобном для решения виде и сформулировать следующее утверждение.

Задача (1.5) эквивалентна оптимизационной задаче

$$P_\varphi = \sup_{E: \psi(E) \leq \varphi} P(E). \quad (1.72)$$

Рассмотрим задачу нахождения числа

$$\chi(D) = \inf_{x \in D} \Phi(x). \quad (1.73)$$

Если $\chi(D) > \varphi$, то $D \subseteq S^\varphi(\mathbb{R}^n)$, что следует из определения множества $S^\varphi(\mathbb{R}^n)$. Тогда задачу (1.56) можно представить в более удобном для решения виде и сформулировать следующее утверждение.

Задача (1.28) эквивалентна оптимизационной задаче

$$P^\varphi = \sup_{D: \chi(D) > \varphi} P(D). \quad (1.74)$$