ИНТЕРПОЛЯЦИЯ

Методы и компьютерные технологии их реализации

А. М. Половко
П. Н. Бутусов

bhv

Анатолий Половко

Павел Бутусов

Интерполяция

Методы и компьютерные технологии их реализации

Санкт-Петербург

«БХВ-Петербург»

2004

УДК 618.3.06
ББК 32.973
П52

Половко А. М., Бутусов П. Н.

П52 Интерполяция. Методы и компьютерные технологии их реализации. — СПб.: БХВ-Петербург, 2004. — 320 с.: ил.

ISBN 5-94157-493-2

Книга содержит основы теории интерполяции: приведена классификация методов, рассматриваются точные и приближенные, однопараметрические и многопараметрические методы. Методика и компьютерные технологии иллюстрируются на примерах решения задач с помощью универсальных программных средств символьной математики Mathematica, Maple, Derive, Mathcad, MATLAB. Впервые описаны программные средства, позволяющие автоматизировать выбор вида функции интерполяции (CurveExpert, TableCurve, Simple Formula). Материал сопровождается большим количеством примеров и решением задач из различных областей знаний: химии, биологии, экономики, теории и практики надежности, эдукологии, теории массового обслуживания, таксации.

Для преподавателей, студентов и специалистов, занимающихся проблемами моделирования, планирования и статистической обработки эксперимента

УДК 618.3.06
ББК 32.973

Группа подготовки издания:

Главный редактор	*Екатерина Кондукова*
Зав. редакцией	*Григорий Добин*
Редактор	*Римма Смоляк*
Компьютерная верстка	*Екатерины Трубниковой*
Корректор	*Евгений Камский*
Дизайн обложки	*Игоря Цырульникова*
Зав. производством	*Николай Тверских*

Рецензенты:

Доктор технических наук, профессор Санкт-Петербургского института государственной противопожарной службы МЧС России Щербаков О. В.
Доктор технических наук, профессор Санкт-Петербургской государственной лесотехнической академии им. С. М. Кирова Гуров С. В.

Лицензия ИД № 02429 от 24.07.00. Подписано в печать 25.03.04.
Формат $70\times100^{1}/_{16}$. Печать офсетная. Усл. печ. л. 25,80.
Тираж 3000 экз. Заказ №
"БХВ-Петербург", 190005, Санкт-Петербург, Измайловский пр., 29.

Гигиеническое заключение на продукцию, товар № 77.99.02.953.Д.001537.03.02 от 13.03.2002 г. выдано Департаментом ГСЭН Минздрава России.

Отпечатано с готовых диапозитивов
в ГУП "Типография "Наука"
199034, Санкт-Петербург, 9 линия, 12

ISBN 5-94157-493-2

Содержание

Предисловие

Законы природы это модели ее явлений. Этапами процесса открытия этих законов человеком являются: наблюдения, размышления, эксперимент, открытие. Результатами эксперимента могут быть: таблицы, диаграммы, графики, которые характеризуют изучаемый объект числом или совокупностью чисел и не могут быть физическими законами. Только математическая модель объекта в виде формулы может быть законом. Интерполяция, теория размерностей и теория подобия − это научные основы моделирования. При этом интерполяция является тем мостом, который объединяет опыт и знание, эксперимент и открытие.

Только через познание настоящего можно "путешествовать" в прошлое и будущее. Открыв закон можно прогнозировать. В вопросах прогнозирования интерполяция посредством полученных ею математических моделей служит превосходным гидом в научном предвидении.

Нельзя проводить эксперимент без плана, наугад. Нужно знать объект изучения и предполагаемую его математическую модель. Этим определяется объем эксперимента и план его проведения. Интерполяция требует от экспериментатора знания вида функции интерполяции. Здесь она строгий и требовательный путеводитель проведения эксперимента.

Области применения интерполяции − открытие и уточнение законов природы, прогнозирование, планирование и обработка данных эксперимента, моделирование, управление различными объектами и т. п. При этом интерполяция не имеет ограничений применения, ей подвластны любые области знаний, любые профессии. Широта использования, практическая направленность и значимость — вот основные черты интерполяции.

Интерполяция капризна. Для решения ее задач недостаточно знать математические методы и алгоритмы, уметь программировать, уметь работать на персональном компьютере, знать функции и команды интерполяции универсальных программных средств символьной математики. Необходимо еще знать компьютерные технологии интерполяции. Без этих знаний, решая задачу интерполяции, можно получить не математическую модель изучаемого явления, а всего лишь математическое выражение, не имеющее никакого смысла.

Приобретя эту книгу, читатель будет научно обоснованно решать задачи интерполяции из любой области знаний. При этом он может воспользоваться любой из следующих математических систем: Mathenatica, Maple, Derive, Mathcad, Matlab.

Кроме того, он сможет существенно облегчить свой труд, применяя программные средства автоматизации TableCurve, CurveExpert, SIMPLE FORMULA, которые в книгах по компьютерным технологиям решения задач публикуются впервые.

Авторы благодарны профессорам С. В. Гурову, О. В. Щербакову за замечания, рекомендации и пожелания, высказанные ими в рецензиях на рукопись книги. Большинство из них учтены при окончательном редактировании книги. Большая благодарность Идалии Игнатьевне Кононец за редактирование рукописи в процессе ее написания. Спасибо всем сотрудникам редакции за содействие в издании книги.

Авторы будут очень признательны читателям, которые пришлют свои замечания и пожелания в адрес редакции.

Введение

1. Для кого эта книга

Ответить на этот вопрос трудно, потому что она нужна людям многих профессий и специальностей.

Она необходима студентам, изучающим такие предметы, как информатика, моделирование, компьютерные технологии, прикладная математика, планирование и обработка результатов эксперимента, а также и множество других специальных дисциплин.

Книга нужна студентам многих технических специальностей при проведении лабораторных работ по предметам естественно-научного и специального цикла дисциплин, когда требуется получать характеристики исследуемого объекта в виде таблиц и графиков. В физике – при изучении закономерностей явлений природы, в химии – при исследовании реакций, в электротехнике — при исследовании характеристик электрических машин, в таксации – при исследовании характеристик лесных ресурсов, в теории надежности – при обработке данных об отказах техники и т. д. и т. п. Компьютерные технологии интерполяции необходимы студентам экономических специальностей при изучении законов ценообразования, при оценке экономической эффективности управления предприятием.

Эта книга полезна также преподавателям дисциплин, в которых интерполяция используется как математический аппарат исследования. Они найдут варианты задач из различных областей знаний, необходимые при постановке и проведении лабораторных работ и упражнений.

Кроме того, книга может оказать помощь тем, кому приходится решать математические задачи на ПК. При решении задачи интерполяции попутно приходится иметь дело с векторами и матрицами, вычислять значения функций, решать системы линейных и нелинейных уравнений, строить графики и по их виду определять функции, вычислять погрешности расчетов.

Решая задачу интерполяции, пользователь ПК изучает одновременно соответствующее программное средство символьной математики, которое необходимо ему для решения и других математических задач. Таким образом, интерполяция может служить средством изучения универсальных математических систем, таких как Mathematica, Maple, Derive, Mathcad, Matlab. При этом процесс решения задач интерполяции исключительно увлекательное занятие, похожее на компьютерные игры. Действительно, вам предлагается таблица данных, а вы должны найти аналитическую функцию, которая может быть физическим законом изучаемого явления. Это даже интересней, чем игра в шахматы или преферанс.

Книга необходима научным работникам, исследования которых требуют применения интерполяции как математического аппарата моделирования при планировании, обработке данных эксперимента и иных математических расчетов.

Для физика-теоретика интерполяция — это один из способов отыскания законов физических явлений. Его сущность состоит в том, чтобы по данным эксперимента найти математическую модель объекта исследования, которая при определенных условиях является физическим законом. Методы интерполяции позволяют найти множество функций, которые будут с высокой точностью аппроксимировать данные таблицы. Однако среди этого множества есть только одна функция (если она есть вообще), которая является физическим законом и которую нужно распознать. Интерполяция подсказывает исследователю физический закон, который потом нужно доказать теоретически. Приведем один типичный пример.

Нами в *главе 8* решена задача интерполяции, в которой надо было найти зависимость температуры кипения воды от давления. Среди множества возможных функций найдена одна, которая соответствует минимальной погрешности. Эта функция имеет вид: $T = T_0\sqrt[4]{P}$.

Здесь:

- P — давление в атм.;
- T_0 — температура кипения воды при P =1 атм.

Полученная формула может быть физическим законом, если она будет доказана теоретически. Доказательство необходимо потому, что могут существовать и другие математические функции, описывающие данное явление с высокой точностью. Например, кубическая сплайн-интерполяция позволяет получить почти с нулевой погрешностью зависимость температуры кипения воды от давления, однако при этом математическое выражение не будет физическим законом.

Интерполяция может служить инструментом проверки истинности закона, полученного теоретически. Типичным примером является задача о расширении Вселенной, решенная в *главе 8*. Интерполяция подтвердила сформулированный астрономом Хабблом в 1929 году линейный закон расширения Вселенной, а кроме того, позволила уточнить вид линейной функции. По Хабблу, скорость V удаления галактик от Земли пропорциональна расстоянию R, т. е. $V=KR$, где K — коэффициент Хаббла. Обработка экспериментальных данных путем решения задачи интерполяции дает следующий линейный закон: $V = KR+a$ (где *a — некая постоянная величина*). Доказательства или опровержения этого уточнения закона Хаббла пока астрономами не получено.

Книга будет полезна экономистам при решении практических задач. Экспериментальные данные при экономических анализах обычно представляются в форме таблиц, диаграмм, графиков. При этом эксперимент проводится пассивный (т. е. на объекте при обычном его функционировании). Активный эксперимент (т. е. на объекте при специальных условиях его работы) в экономике практически не проводится, т. к. он требует больших денежных затрат и в большинстве случаев бывает рискованным. Представление данных в виде таблиц, диаграмм или графиков позволяет лишь качественно судить об экономическом состоянии исследуемого объекта. Для оценок количественных необходимо иметь математическую модель в виде формул, которые возможно вывести путем решения задачи интерполяции. Полученная математическая модель может заменить активный эксперимент. При этом цена модели в сотни и тысячи раз дешевле активного эксперимента, да к тому же и никакого риска.

Круг экономических задач, требующих разработки математических моделей методами интерполяции, велик. Это задачи ценообразования, оптимальной платы за услуги, анализа влияния различных факторов на экономическую эффективность производства, транспортные задачи и многие другие.

В качестве примера в *главе 8* с помощью методов интерполяции решена задача оптимальной платы за посещение леса. Оказалось, что для получения максимальной прибыли цена разового посещения людьми леса в зимнее время должна быть 14.26 рублей.

Аналогом этой задачи может быть определение оптимальной стоимости за различные услуги (например, обучение, услуги парикмахерской, платной стоянки автомобилей, прачечной и т. п.).

Книга будет полезна инженерам различных специальностей. В качестве примеров в *главе 8* приводятся решения задач из теории массового обслуживания, таксации, теории и практики надежности, оценки знаний и установления рейтинга обучаемых. Рассмотрим вкратце результаты этих решений.

Отказы техники — явления случайные. Они характеризуются законами распределения времени до момента отказа невосстанавливаемой техники и между моментами отказа восстанавливаемой техники. Законы распределения получают по экспериментальным данным об отказах или данным эксплуатации. При этом статистические данные являются функциями числа отказов от времени, представленными в виде таблиц. Интерполяция табличных данных позволяет получить функцию, которая является законом распределения времени до момента отказа техники. Анализ статистических данных об отказах методами интерполяции позволяет получить и другие характеристики надежности (например, интенсивность отказов, вероятность безотказной работы в течение времени t, параметр потока отказов).

Решенная в *главе 8* задача оценки надежности самолета ТУ-154М с применением метода интерполяции является одним из ярких примеров использования данных методов для анализа показателей надежности техники.

Интерполяция является наиболее важным математическим аппаратом для решения задач таксации. Данные о характеристиках лесов всегда представляются в табличной форме, где можно увидеть зависимость хода роста древостоев, плотности древесины, выхода фанерного и другого сырья и пр.

Получение математических моделей в задачах таксации возможно главным образом с помощью методов интерполяции. В *главе 8* приводится решение двух задач, одна из которых относится к многопараметрической интерполяции. Впервые получены линейная и квадратичная функции, выражающие зависимость среднего прироста древостоя ели от ее возраста, высоты, диаметра.

Особую роль играет интерполяция в тех случаях, когда некоторая сложная математическая функция анализируется в узком диапазоне аргумента. В таких случаях целесообразно (а часто необходимо) представить сложную функцию в узком диапазоне аргументов более простой. Это представление осуществляется путем решения задачи интерполяции.

В *главе 8* этим методом решены две задачи из области массового обслуживания, позволившие получить важные практические результаты. Получена математическая модель, выражающая зависимость необходимого числа обслуживающих органов от интенсивности потока заявок и интенсивности обслуживания, обеспечивающих заданную вероятность того, что заявка будет принята на обслуживание в произвольный момент времени.

Решена задача многопараметрической интерполяции. Получена функция регрессии, выражающая зависимость времени переходного процесса системы массового обслуживания от интенсивности потока заявок, интенсивности обслуживания и числа обслуживающих органов.

Результаты, полученные в этих двух задачах, трудно переоценить. Методики решения задач могут быть применены при изучении различных физических процессов. Это – исследование динамики систем управления, переходных процессов в электрических цепях, надежности сложных восстанавливаемых систем и многих других процессов, протекающих во времени.

Задачи, описанные и решенные в *главе 8*, лишь небольшая часть проблем, решаемых методами интерполяции. Область применения интерполяции как математического аппарата, значительно шире, чем приведенные примеры.

Наши примеры только иллюстрация компьютерных технологий решения задач интерполяции с применением универсальных математических программных средств символьной математики (хотя некоторые из примеров имеют самостоятельное значение).

2. Научное и прикладное содержание книги

Теория интерполяции совместно с теорией подобия и размерностей является научной основой моделирования, которое весьма полезно, а во многих случаях просто необходимо. Необходимость моделирования определяется следующими моментами:

- исследуемый объект слишком большой (корабль) или слишком мал (атом);
- объект удален от исследователя (галактика);
- объект недосягаем во времени (был в прошлом или будет в будущем);
- объект опасен для исследователя (агрессивная среда);
- эксперимент слишком дорогой.

Во всех этих и многих других случаях, перечисление которых заняло бы много страниц, получение математической модели изучаемого объекта требует решения задач интерполяции.

Основное содержание книги — это компьютерные технологии решения прикладных задач из различных областей знаний, где требуется получение математических моделей объекта или явления.

Книга содержит теоретические основы интерполяции, практические задачи из физики, химии, экономики, теории и практики надежности, таксации, обучения.

Приведем некоторые практические вопросы, на которые может дать ответ книга, если воспользоваться ее методологией и компьютерной технологией решения задач интерполяции:

- Какова должна быть цена товара для получения максимальной прибыли?
- Каков курс валюты будет завтра, через неделю, через месяц и стоит ли освобождаться от доллара и покупать евро?
- Каков закон расширения Вселенной?
- Как оценить знания студента по стобалльной системе оценок?
- Сколько должно быть обслуживающих органов (касс, больничных коек, самолетовылетов и т. д.), чтобы с заданной вероятностью обслужить потребителя?
- Какой ожидается прирост древесины за время t на участие в n га.

- ❒ Сколько необходимо иметь пушек, ракет, другой военной техники для поражения цели противника?

Вопросы, на которые интерполяция дает верные ответы, можно продолжать чуть ли не до бесконечности.

Имеется много хороших математических книг, излагающих теорию интерполяции. В этих книгах приводится классификация методов, методики интерполяции и их сравнительный анализ, рекомендации по применению. К сожалению, там не излагаются компьютерные технологии, без которых в большинстве случаев невозможно решить практическую задачу.

Большое число книг по компьютерной математике содержат описание функций интерполяции, реализованных в данной математической системе. Однако в них так же, как и в книгах по теоретическим основам интерполяции, отсутствуют компьютерные технологии решения задач, включающие в себя следующую последовательность действий:

1. Формулировка задачи.
2. Выбор метода интерполяции.
3. Выбор вида функции интерполяции.
4. Решение задачи с помощью универсального математического программного средства.
5. Оценка адекватности модели.

В литературе по компьютерной математике эта и другие технологии не излагаются. В них описываются лишь функции и команды, позволяющие решить задачу интерполяции. При этом во многих случаях исследователю не ясно, какой используется метод интерполяции, с какой погрешностью решена задача.

Предлагаемая читателю книга является прикладной, в ней излагаются компьютерные технологии, основанные на строгих математических методах решения задач интерполяции с большим числом примеров из различных областей знаний. В этом смысле ей нет аналогов.

Компьютерные технологии решения задач интерполяции можно излагать с применением только одной математической системы. Однако при таком изложении можно потерять читателя. Изложение в книге пяти основных универсальных математических программных средств символьной математики — еще одно ее достоинство.

3. Понятие компьютерная технология интерполяции

В теории и на практике стали модными понятия "информационные технологии" и "компьютерные технологии". Понятие "информационные технологии" четко не определено. Термин "компьютерные технологии" достаточно прост и очевиден. *Технология* — это последовательность действий для получения результата, в нашем случае для получения математической модели изучаемого объекта. Она реализуется программой на языке универсального программного средства символьной математики.

Компьютерная технология интерполяции есть последовательность выполнения функций и команд компьютера для решения задачи интерполяции.

Она состоит из следующих действий:

- выбор вида функции интерполяции с помощью компьютера;
- использование функций и команд универсального программного средства для получения математической модели;
- оценка адекватности модели.

Из перечисленного очевидно, что для решения задачи недостаточно знать математические методы, функции и команды универсального математического программного средства, владеть методами работы с клавиатурой и мышью ПК. Необходимо еще уметь выбрать вид функции интерполяции и оценить полученное решение. Для этого, кроме функций и команд интерполяции, необходимо знать:

- способы построения графиков функций, заданных в табличном и формульном видах;
- соответствие графика, построенного по данным таблицы аналитической функции;
- способы вычисления значений функции и ее табулирование;
- операции с векторами и матрицами;
- решение систем линейных и нелинейных уравнений;
- способы вычисления табличных разностей.

Решение задачи интерполяции на ПК позволит пользователю изучить и активно использовать для решения многих других задач универсальные программные средства символьной математики: Mathematica, Maple, Derive, Mathcad, Matlab.

4. Рациональная методика изучения компьютерных технологий интерполяции

Наиболее эффективным способом изучения компьютерных технологий интерполяции является решение задач. Для этого необходимо иметь на вашем компьютере любую из пяти математических систем, описанных в *главах 2—6.* Для начала рекомендуем поставить одну из следующих: Mathematica, Maple, Derive. Эти системы символьной математики являются наиболее интеллектуальными, способными давать решение в виде математических выражений.

Если такое программное средство имеется на вашем компьютере, то приступайте к формулировке задачи интерполяции. В постановку задачи входят следующие пункты:

- дано;
- определить;
- допустимая погрешность интерполяции.

Если у вас нет своей задачи, то рекомендуем взять любую задачу однопараметрической интерполяции из приложения.

После формулировки задачи обратитесь к *главе 2* и выберите метод интерполяции. Если вы решаете задачу интерполяции впервые, то рекомендуем выбрать полиномиальную интерполяцию точную в узлах, а затем приближенную в узлах. Эти методы наиболее понятны и легко реализуемы на ПК.

Не спешите решать задачу после выбора метода. Изучите предварительно компьютерную технологию интерполяции, соответствующую математической системе, установленной на вашем ПК. Обратите особое внимание на примеры, повторите их решение.

Теперь приступайте к решению вашей задачи. Успех вам обеспечен.

Если читатель знает методы интерполяции, а тем более универсальные программные средства символьной математики, то ему необходимо изучить только компьютерные технологии, обратив особое внимание на способы выбора вида функции интерполяции и методы оценки адекватности математической модели. Если возникнут трудности в выборе вида функции интерполяции, обратитесь за помощью к одной из следующих программ: Formula, CurveExpert, TableCurve.

Глава 1

Основы теории интерполяции

1.1. Что такое интерполяция

Любую функцию $f(x)$ можно представить в виде таблицы, графика или формулы. Если $f(x)$ задана в виде формулы, то представить ее в виде таблицы или графика нетрудно. Значительно труднее представить функцию в виде формулы, если она задана в виде таблицы или графика. Не менее трудно представить заданную функцию новой, более простой, существенно упрощающей дальнейшие расчеты. Интерполяция и является областью знаний, позволяющей решать такие задачи.

Пусть функция задана в виде таблицы (табл. 1.1).

Таблица 1.1

x	x_1	x_2	x_3	.....	x_n
y	y_1	y_2	y_3	.....	y_n

Здесь:

- x_i — аргумент;
- y_i — функция;
- $i = 1, 2, ..., n$ — индексная переменная соответственно аргумента и функции $f(x)$.

Тогда одной из задач интерполяции является определение значений функции при значениях аргументов, отсутствующих в таблице. Очевидно, что если представить функцию $f(x)$ формулой, то ее значение можно вычислить при любых значениях x, в т. ч. и при значениях, отсутствующих в таблице.

Тогда задача интерполяции может быть сформулирована так: известны значения функции при некоторых значениях аргументов, необходимо представить функцию формулой для всего диапазона значений аргументов. Такая формулировка не является строгой, т. к. может существовать большое количество различных формул, которые удовлетворяют дискретным значениям исходных данных, представленных в таблице. Для корректной постановки задачи интерполяции дополнительно должен быть указан вид функции (например, линейная, параболическая, логарифмическая и др.)

Интерполяция в научных исследованиях и инженерной практике находит широкое применение. Областями ее использования являются:

- моделирование;
- планирование и статистическая обработка эксперимента;
- определение значений функции при аргументах, отсутствующих в таблице;
- табулирование функции;
- представление сложной функции более простой в определенных границах значений ее аргументов;
- во всех других случаях, где нужно выполнить приближение одних функций другими, более простыми, с допустимой для практики точностью.

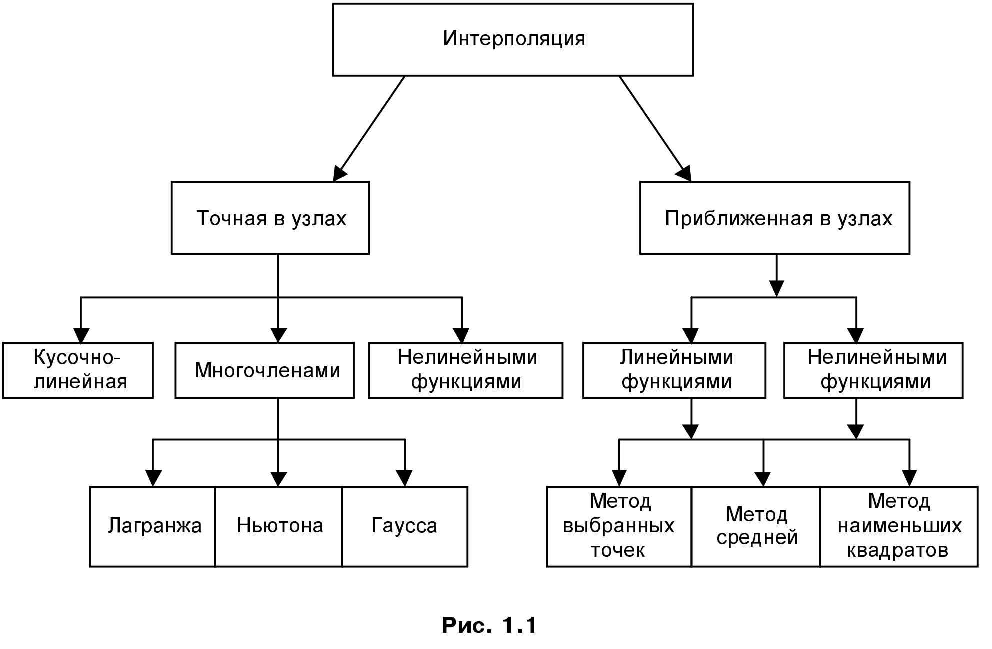

Рис. 1.1

Существует большое число методов интерполяции. Их можно классифицировать по множеству различных признаков: по точности в узлах интерполяции, виду функции интерполяции, критериям и применяемому математическому аппарату и др. На рис. 1.1 приведена подобная классификация.

В дальнейшем будут изложены все методы указанной классификации, их достоинства и недостатки, область применения, компьютерные технологии решения задач на ЭВМ. Следует при этом иметь в виду, что классификация, приведенная на рис. 1.1, далеко не полная. Она показана скорее для того, чтобы читатель представил себе объем излагаемого материала. Более полное и глубокое понятие о методах интерполяции можно найти в литературе [18-23]. В настоящей книге читатель найдет систематическое изложение компьютерных технологий решения задач интерполяции с помощью универсальных программных средств символьной математики, чего нет в упомянутой выше литературе.

1.2. Интерполяция точная в узлах

1.2.1. Общий метод решения задачи

Интерполяция точная в узлах — такая интерполяция, при которой значения функции интерполяции совпадают с ее действительными значениями во всех узлах (рис. 1.2).

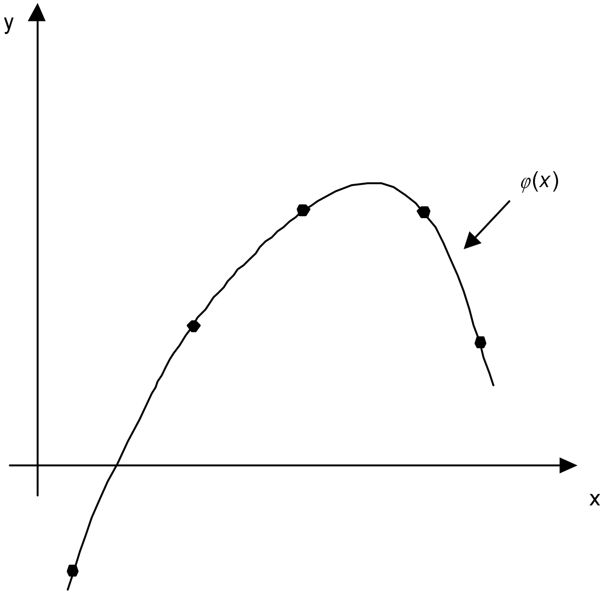

Рис. 1.2

На рисунке точками обозначены значения функции $f(x)$ при соответствующих значениях аргументов, сплошной линией обозначена функция $\varphi(x)$, полученная в результате интерполяции (функция интерполяции). Из рисунка видно, что значения функций в узлах x_i (где $i = 1, 2, ..., n$) совпадают.

Такая интерполяция применяется в следующих случаях:

- при отыскании закона некоторого физического явления по экспериментальным данным, полученным с высокой точностью;
- при табулировании математических функций и определении их значений, когда значения аргументов отсутствуют в таблицах.

Решение задачи интерполяции в таких случаях сводится к решению систем линейных или нелинейных уравнений. Покажем это на примерах.

Пример 1.1

Пусть в результате эксперимента получены данные, приведенные в табл. 1.2.

Таблица 1.2

	Значения переменных				
x	1	2.4	4.0	6.8	9
y	2	4.1	6.5	10.7	14

Необходимо функцию $f(x)$ представить в виде формулы $y = \varphi(x)$ и найти ее значения при $x = 3$ и при $x = 8$. В постановке задачи не указан вид функции $\varphi(x)$. Способы ее отыскания будут описаны позже, а сейчас представим, что эта функция линейна $y = a + bx$. Для определения неизвестных a и b составим следующую систему уравнений:

$$\left.\begin{aligned} 2 &= a + b \\ 14 &= a + 9\,b \end{aligned}\right\} \tag{1.1}$$

В системе уравнений (1.1) значения y взяты в узлах $x = 1$ и $x = 9$, при которых y равен соответственно 2 и 14. Решая эту систему линейных уравнений, получим: $a = 0.5$; $b = 1.5$, т. е. функция, заданная таблицей 1.2, может быть представлена формулой $y = 0.5 + 1.5x$. Подставляя в эту формулу значения x из таблицы 1.2, убеждаемся, что при всех значениях аргумента, заданного таблицей, значения функции совпадают с табличными. Теперь вычислим значение y при $x = 3$ и при $x = 8$. Подставляя эти значения в уравнение $y = 0.5 + 1.5x$, получим: $y = 5$ и $y = 12.5$. Для определения неизвестных a и b при составлении системы уравнений (1.1) можно выбрать из таблицы любые два значения x и y. Решение будет прежним.

Пример 1.2

Пусть данные эксперимента сведены в таблицу (табл. 1.3).

Таблица 1.3

	Значения переменных					
x	1	2	3	4	5	6
y	1.2	0.21	0.077	0.038	0.021	0.014

Из табл. 1.3 видно, что с увеличением x значение y убывает, причем далеко не линейно. На рис. 1.3 представлен график функции $y = f(x)$.

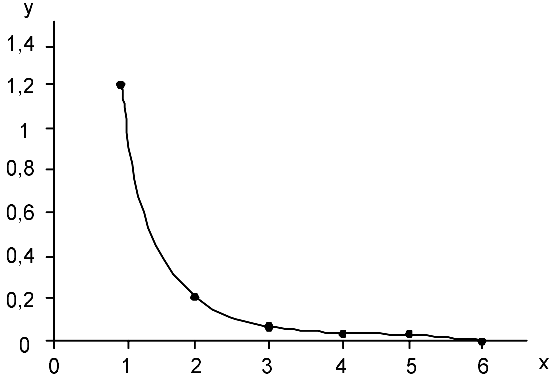

Рис. 1.3

Из рис.1.3 видно, что функция имеет вид гиперболы, поэтому представим ее в виде: $y = \dfrac{a}{x^b}$.

Определим значения a и b, для чего, используя данные табл. 1.3, составим следующую систему уравнений:

$$\left.\begin{aligned} 1.2 &= \frac{a}{1^b} \\ 0.014 &= \frac{a}{6^b} \end{aligned}\right\} \qquad (1.2)$$

Решая эту систему нелинейных уравнений, получим: $a = 1.2$; $b = 2.5$. Тогда функция интерполяции $y = \varphi(x)$ будет иметь вид:

$$y = \frac{1.2}{x^{2.5}}. \tag{1.3}$$

В данном случае решение является приближенным, т. к. система уравнений (1.2) точного решения не имеет.

Из описания общего метода решения задачи интерполяции, основанного на решении систем уравнений, а также из примеров видно, что одним из недостатков такого метода является необходимость численного решения уравнений для определения неизвестных интерполяционных формул. Общий метод, основанный на решении системы уравнений, может привести к существенным ошибкам интерполяции. Источниками ошибок являются:

- ограниченная размерность системы уравнений (число уравнений меньше, чем число узлов функции, представленной таблицей);
- наличие погрешности в численных методах решения системы уравнений;
- отсутствие сглаживания неточностей исходных данных.

Наличие источников ошибок интерполяции требует определения погрешностей интерполяции. О погрешностях будет сказано позже.

1.2.2. Интерполяционные полиномы

Наиболее часто при решении практических задач используется интерполяция алгебраическими многочленами $y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$, что объясняется следующими причинами:

- любую функцию, имеющую n производных, можно разложить в степенной ряд;
- при полиномиальной интерполяции задача сводится к наиболее простому случаю — решению систем линейных алгебраических уравнений;
- многие функции с достаточной для практики точностью могут быть представлены алгебраическими многочленами.

Пусть функция задана в виде таблицы, в которой указаны ее значения $y_0, y_1, y_2, ..., y_n$ соответственно при аргументах $x_0, x_1, x_2, ..., x_n$, называемых узлами интерполяции. Тогда неизвестные $a_0, a_1, a_2, ..., a_n$ могут быть определены из следующей системы алгебраических уравнений:

$$\begin{matrix} a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 + ... + a_nx_0^n = y_0 \\ a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + ... + a_nx_1^n = y_1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_0 + a_1x_n + a_2x_n^2 + ... + a_nx_n^n = y_n \end{matrix}. \tag{1.4}$$

$$\begin{array}{llll} 1 & x_0 & x_0^2 \ldots\ldots\ldots x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 \ldots\ldots\ldots x_1^n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 1 & x_n & x_n^2 \quad\quad x_n^n \end{array} \tag{1.5}$$

Главный определитель этой системы (1.5), называемый определителем Вандермонда, не равен нулю, если узлы интерполяции x_0, x_1, x_2, ..., x_n различны. Это является признаком того, что система (1.4) имеет решение и притом единственное. А это означает, что существует единственный полином степени n, являющийся интерполяционным, т. е. удовлетворяющий условию: $y(x_i) = y_i$ (где $i = 0, 1, 2, ..., n$).

Геометрически это означает, что через $n + 1$ точку, расположенную на плоскости (x, y), можно провести единственную кривую, проходящую через все точки и представляющую собой многочлен n-ой степени. Например, если число точек равно 2, то через эти точки можно провести единственную прямую $y = a_0 + a_1x$; если число точек равно 3, то через эти точки можно провести единственную параболу, представляющую собой многочлен второй степени: $y = a_0 + a_1x + a_2x^2$.

Интерполяционный многочлен может быть получен без решения системы уравнений (1.4). Существуют различные формулы, позволяющие получить интерполяционный многочлен, не требующие решения системы уравнений (например, формулы Лагранжа, Ньютона, Гаусса, Бесселя, Стирлинга). Наиболее популярными из них являются формулы Лагранжа и Ньютона.

1.2.3. Интерполяционная формула Лагранжа

Формула Лагранжа имеет вид:

$$y_n(x) = y_0 \frac{(x-x_1)(x-x_2)...(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)...(x_0-x_n)} + y_1 \frac{(x-x_0)(x-x_2)...(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)...(x_1-x_n)} + ... \\ + y_n \frac{(x-x_0)(x-x_1)...(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)...(x_n-x_{n-1})}. \tag{1.6}$$

Здесь:

- $x_0, x_1, ..., x_n$ — узлы интерполяции;
- $y_0, y_1, ..., y_n$ — значения функции в этих узлах.

Покажем, что формула (1.6) является интерполяционным полиномом.

Пусть $x = x_0$, тогда все члены, кроме первого, обращаются в ноль, а числитель и знаменатель в первом члене сокращаются, в результате чего $y_n(x_0) = y_0$. При $x = x_1$ второй член выражения (1.6) равен y_1, а все остальные обращаются в ноль и т. д.

Таким образом, справедливыми являются следующие равенства: $y_n(x_0) = y_0$, $y_n(x_1) = y_1$, ..., $y_n(x_n) = y_n$.

Равенства означают, что формула (1.6) является интерполяционной. Из этой формулы также очевидно, что многочлен, полученный по формуле Лагранжа, будет степени не выше n.

Пример 1.3

Пусть функция задана в виде таблицы (табл. 1.4).

Таблица 1.4

	Значения переменных			
x	1	2	4	6
y	2	9	41	97

Необходимо представить функцию $y = f(x)$ в виде многочлена, используя интерполяционную формулу Лагранжа, и определить значения функции при $x = 3$ и при $x = 5$.

Подставляя данные табл. 1.4 в формулу (1.6), получим:

$$y(x) = 2\frac{(x-2)(x-4)(x-6)}{(1-2)(1-4)(1-6)} + 9\frac{(x-1)(x-4)(x-6)}{(2-1)(2-4)(2-6)} +$$
$$+ 41\frac{(x-1)(x-2)(x-6)}{(4-1)(4-2)(4-6)} + 97\frac{(x-1)(x-2)(x-4)}{(6-1)(6-2)(6-4)}.$$

В результате очевидных преобразований получим: $y(x) = 3x^2 - 2x + 1$. Подставляя в эту формулу $x = 3$, а затем $x = 5$, получим $y(3) = 22$, $y(5) = 66$. Существенным недостатком формулы Лагранжа является то, что результаты предыдущих вычислений теряются, если добавляется или убирается хотя бы одно значение $y(x)$. Достоинство формулы состоит в том, что она пригодна для случая постоянного и переменного шага изменения аргумента x .

1.2.4. Табличные разности

Пусть значения функции в узлах интерполяции равны y_0, y_1, ..., y_n. Тогда конечными разностями Δy_i (где $i = 0, 1, 2, ..., (n\text{-}1)$) первого порядка называются выражения:

$$\begin{aligned} &\Delta y_0 = y_1 - y_0 \\ &\Delta y_1 = y_2 - y_1 \\ &\Delta y_2 = y_3 - y_2 \\ &\dots\dots\dots\dots \\ &\Delta y_{n-1} = y_n - y_{n-1} \end{aligned} \qquad (1.7)$$

Разности $\Delta^2 y_i$ (где $i = 0, 1, 2, ..., (n - 2)$) разностей первого порядка называются разностями второго порядка:

$$\begin{aligned} &\Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0 \\ &\Delta^2 y_1 = \Delta y_2 - \Delta y_1 \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &\Delta^2 y_{n-2} = \Delta y_{n-1} - \Delta y_{n-2} \end{aligned} \tag{1.8}$$

Можно получать разности третьего, четвертого порядка и т. д. В общем случае конечные разности k-го порядка образуются как разности $(k - 1)$-го порядка. Заметим, что число конечных разностей убывает с ростом их порядка: число табличных разностей первого порядка на единицу меньше, чем значений y, т. е. равно n; число табличных разностей второго порядка будет $n - 1$, третьего — $n - 2$ и т. д. Наиболее удобно представлять конечные разности в виде таблицы (табл. 1.5).

Таблица 1.5

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$	$\Delta^5 y$	$\Delta^6 y$
x_0	y_0						
$x_1 = x_0 + h$	y_1	Δy_0					
$x_2 = x_1 + h$	y_2	Δy_1	$\Delta^2 y_0$				
$x_3 = x_2 + h$	y_3	Δy_2	$\Delta^2 y_1$	$\Delta^3 y_0$			
$x_4 = x_3 + h$	y_4	Δy_3	$\Delta^2 y_2$	$\Delta^3 y_1$	$\Delta^4 y_0$		
$x_5 = x_4 + h$	y_5	Δy_4	$\Delta^2 y_3$	$\Delta^3 y_2$	$\Delta^4 y_1$	$\Delta^5 y_0$	
$x_6 = x_5 + h$	y_6	Δy_5	$\Delta^2 y_4$	$\Delta^3 y_3$	$\Delta^4 y_2$	$\Delta^5 y_1$	$\Delta^6 y_0$

По конечным разностям можно определить, является ли данная функция многочленом, найти степень многочлена, построить интерполяционный полином. Функция является многочленом степени n только в том случае, если конечные разности n-го порядка при постоянном шаге таблицы являются величинами постоянными.

В табл. 1.6 приведены табличные разности в случае примера 1.3.

Из таблицы видно, что конечные разности второго порядка одинаковы. Это означает, что функция $y(x)$ является многочленом второй степени, что и было получено при решении задачи интерполяции по формуле Лагранжа.

Таблица 1.6

	Значения переменных					
x	1	2	3	4	5	6
y	2	9	22	41	66	97
Δy	7	13	19	25	31	
$\Delta^2 y$	6	6	6	6		
$\Delta^3 y$	0	0	0			

Таблица 1.7

X	Y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$	$\Delta^5 y$	$\Delta^6 y$
x_{-4}	y_{-4}						
		Δy_{-4}					
x_{-3}	y_{-3}		$\Delta^2 y_{-4}$				
		Δy_{-3}		$\Delta^3 y_{-4}$			
x_{-2}	y_{-2}		$\Delta^2 y_{-3}$		$\Delta^4 y_{-4}$		
		Δy_{-2}		$\Delta^3 y_{-3}$		$\Delta^5 y_{-4}$	
x_{-1}	y_{-1}		$\Delta^2 y_{-2}$		$\Delta^4 y_{-3}$		$\Delta^6 y_{-4}$
		Δy_{-1}		$\Delta^3 y_{-2}$		$\Delta^5 y_{-3}$	
x_0	y_0		$\Delta^2 y_{-1}$		$\Delta^4 y_{-2}$		$\Delta^6 y_{-3}$
		Δy_0		$\Delta^3 y_{-1}$		$\Delta^5 y_{-2}$	
x_1	y_1		$\Delta^2 y_0$		$\Delta^4 y_{-1}$		$\Delta^6 y_{-2}$
		Δy_1		$\Delta^3 y_0$		$\Delta^5 y_{-1}$	
x_2	y_2		$\Delta^2 y_1$		$\Delta^4 y_0$		
		Δy_2		$\Delta^3 y_1$			
x_3	y_3		$\Delta^2 y_2$				
		Δy_3					
x_4	y_4						

Центральные разности

Если за начальные значения x_0, y_0 взять их значения в середине таблицы, то можно получить табличные разности по обе стороны начальных значений.

Тогда табличные разности, находящиеся в строке начальных значений x_0, y_0 и в строках, примыкающих к ней, называют центральными табличными разностями. Такие разности приведены в табл. 1.7 (помечены стрелками). К ним относятся разности:

$$\Delta y_{-1},\ \Delta y_0,\ \Delta^2 y_{-1},\ \Delta^3 y_{-1},\ \Delta^3 y_{-2},\ \Delta^4 y_{-2},\ \Delta^5 y_{-2},\ \Delta^5 y_{-3},\ \Delta^6 y_{-3}.$$

В общем случае $x_i = x_0 + i\,h$, где:

- $i = 0, \pm 1, \pm 2,$;
- $\Delta y_i = y_{i+1} - y_i$;
- $\Delta^2 y_i = \Delta y_{i+1} - \Delta y_i$ и т. д.

Интерполяционные формулы, использующие центральные разности, называются интерполяционными формулами с центральными разностями. К ним относятся формулы Гаусса, Стирлинга, Бесселя.

1.2.5. Интерполяционные формулы Ньютона

Интерполяционная формула Ньютона при равноотстоящих узлах имеет вид:

$$\begin{aligned} y_n(x) &= c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)(x - x_1) + \ldots \\ &+ c_n(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_{n-1}). \end{aligned} \tag{1.9}$$

Здесь:

- x_i — узлы интерполяции с постоянным шагом (где $i = 0, 1, 2, \ldots, (n - 1)$), т. е. $x_1 = x_0 + h$, $x_2 = x_1 + h$, ..., $x_{n-1} = x_{n-2} + h$;
- c_i — коэффициенты интерполяционной формулы (где $i = 0, 1, 2, \ldots, n$)

Из формулы (1.9) видно, что функция $y(x)$, как и в случае формулы Лагранжа, является многочленом степени n, но записанной в иной форме.

Определим коэффициенты c_i в формуле (1.9).

При $x = x_0$ $y(x_0) = c_0$. Тогда $c_0 = y_0$.

При $x = x_1$ $y(x_1) = y_1 = c_0 + c_1(x_1 - x_0)$ или $c_1 = \dfrac{y_1 - c_0}{x_1 - x_0} = \dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \dfrac{\Delta y_0}{h}$.

При $x = x_2$ $y_n(x_2) = y_2 = c_0 + c_1(x_2 - x_0) + c_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)$.

Подставляя вместо c_0 и c_1 их значения, получим:

$$y_2 = y_0 + \frac{\Delta y_0 (x_2 - x_0)}{h} + c_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) = y_0 + \frac{\Delta y_0 \cdot 2h}{h} + c_2 \cdot 2h \cdot h.$$

Найдем c_2:

$$c_2 = \frac{y_2 - y_0 - \dfrac{y_1 - y_0}{h} 2h}{2h^2} = \frac{(y_2 - y_1) - (y_1 - y_0)}{2h^2} = \frac{\Delta y_1 - \Delta y_0}{2h^2} = \frac{\Delta^2 y_0}{2h^2}$$

Вычислительные процедуры очевидны. Продолжая их, получим следующую общую формулу для коэффициентов многочлена (1.9):

$$c_k = \frac{\Delta^k y_0}{k!\,h^k},\ k = 1, 2, \ldots, n \tag{1.10}$$

Подставляя найденные выражения коэффициентов в (1.9), получим:

$$\begin{aligned} y_n(x) &= y_0 + \frac{\Delta y_0}{1!h}(x-x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2!h^2}(x-x_0)(x-x_1) + \\ &+ \frac{\Delta^3 y_0}{3!h^3}(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) + \ldots + \frac{\Delta^n y_0}{n!h^n}(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1}) \end{aligned} \tag{1.11}$$

Заметим, что в этой формуле конечные разности находятся в верхней косой строке таблицы конечных разностей. Формулу (1.11) можно записать в более простом виде. Обозначим $\frac{(x-x_0)}{h} = t$. Тогда

$$\frac{(x-x_1)}{h} = \frac{(x-(x_0+h))}{h} = t-1$$

$$\frac{(x-x_2)}{h} = \frac{(x-(x_0+2h))}{h} = t-2, \ldots$$

$$\frac{(x-x_{n-1})}{h} = \frac{(x-(x_0+(n-1)\,h))}{h} = t-n+1.$$

Подставляя полученные выражения в (1.11), получим:

$$\begin{aligned} y\,(x_0+t\,h) &= y_0 + \Delta\, y_0 \frac{t}{1!} + \Delta^2 y_0 \frac{t\,(t-1)}{2!} + \\ &+ \Delta^3 y_0 \frac{t\,(t-1)(t-2)}{3!} + \ldots + \Delta^n y_0 \frac{t\,(t-1)(t-2)\ldots(t-n+1)}{n!} \end{aligned} \tag{1.12}$$

Формула (1.12) может быть записана в следующем символическом виде:

$$y_n(x_0+t\,h) = (1+\Delta)^t\, y_0\,. \tag{1.13}$$

Интерполяционная формула (1.12) дает хорошие результаты при $t < 1$, т. е. при значениях x в начале таблицы для функции $y(x)$. Эта формула часто называется интерполяционной формулой Ньютона для интерполирования вперед.

Формула Ньютона (1.12) существенно отличается от формулы Лагранжа (1.6). В формуле Лагранжа каждый член является многочленом степени n, т. е. все члены формулы Лагранжа равноценны. В формулу же Ньютона входят алгебраические члены повышающихся степеней. Кроме того, коэффициентами являются конечные разности, деленные на факториалы n. Это позволяет (особенно при малых t) ограничиться числом членов, что может существенно упростить вычисления. Погрешности формулы (1.12) возрастают при интерполировании в конце таблицы. Для интерполирования в конце таблицы Ньютоном была предложена следующая формула:

$$\begin{aligned} y_n(x) &= c_0 + c_1(x - x_n) + c_2(x - x_n)(x - x_{n-1}) + \ldots \\ &+ c_n(x - x_n)(x - x_{n-1}) \ldots (x - x_1). \end{aligned} \tag{1.14}$$

По аналогии с предыдущими доказательствами, получим следующие значения коэффициентов c_0, c_1, ..., c_n:

$$c_0 = y_n \,, c_1 = \frac{\Delta\, y_{n-1}}{h}\,, c_2 = \frac{\Delta^2 y_{n-2}}{2!\,h^2}\,, \ldots, c_k = \frac{\Delta^k y_{n-k}}{k!\,h^k}\,, k = 1,2,\ldots,n\,.$$

Подставляя значения коэффициентов в формулу (1.14), получим:

$$\begin{aligned} y_n(x) &= y_n + \frac{\Delta\, y_{n-1}}{h}(x - x_n) + \frac{\Delta^2 y_{n-2}}{2!\,h^2}(x - x_n)(x - x_{n-1}) + \ldots \\ &+ \frac{\Delta^n y_0}{n!\,h^n}(x - x_n)(x - x_{n-1}) \ldots (x - x_1) \end{aligned} \tag{1.15}$$

Обозначая $\dfrac{(x - x_n)}{h} = t$ и подставляя в (1.15), получим:

$$\begin{aligned} y_n(x_n + t\,h) &= y_n + \Delta\, y_{n-1}\frac{t}{1!} + \Delta^2 y_{n-2}\frac{t\,(t+1)}{2!} + \ldots \\ &+ \Delta^n y_0 \frac{t\,(t-1)(t-2)\ldots(t+n-1)}{n!} \end{aligned} \tag{1.16}$$

Эта формула называется второй интерполяционной формулой Ньютона для интерполирования назад. Она дает хорошие результаты при интерполировании в конце таблицы. При этом следует иметь в виду, что шаг h имеет отрицательное значение $x_{k-1} - x_k = -h$ (где $k = 1, 2, \ldots, n$), а конечные разности находятся в нижней косой строке таблицы разностей. Формулы Ньютона могут давать значительные погрешности при интерполировании в середине таблицы. В таких случаях следует применять интерполяционные формулы Гаусса, Стирлинга, Бесселя.

Пример 1.4

Пусть функция $y(x)$ представлена в виде табл. 1.6. Необходимо найти интерполяционный полином по формуле Ньютона для интерполирования вперед. В нашем случае $y_0 = 2$, $h = 1$, табличные разности имеют значения: $\Delta y_0 = 7$, $\Delta^2 y_0 = 6$, $\Delta^3 y_0 = 0$. Воспользуемся формулой (1.11):

$$y(x) = y_0 + \frac{\Delta\, y_0}{1!\,h}(x - x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2!\,h^2}(x - x_0)(x - x_1)\,.$$

Подставляя в эту формулу значения узлов интерполяции x_0, x_1, значение функции y_0, табличные разности Δy_0, $\Delta^2 y_0$, получим:

$$y(x) = 2 + 7(x - 1) + 3(x - 1)(x - 2).$$

После очевидных преобразований интерполяционный многочлен будет иметь вид:

$$y(x) = 3x^2 - 2x + 1.$$

Решение совпадает с решением, полученным по формуле Лагранжа.

Интерполяционные формулы Ньютона при неравноотстоящих узлах

В случае, когда шаг $h \neq \text{const}$ (неравноотстоящие узлы), интерполяционная формула Ньютона имеет вид:

$$\begin{aligned} y_n(x) &= y_0 + \sigma\, y_0(x - x_0) + \sigma^2 y_0(x - x_0)(x - x_1) + \ldots \\ &+ \sigma^n y_0(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1}). \end{aligned} \tag{1.17}$$

Внешне формула похожа на формулы Ньютона для равноотстоящих узлов, когда $h = \text{const}$. Ее отличие состоит в способе вычисления табличных разностей $\sigma^k y_0$ (где $k = 1, 2, \ldots, n$). В формуле (1.17) $\sigma^k y_0$ являются разделенными разностями или разностными отношениями, представляющими собой отношения разности значений функции к разности значений соответствующих аргументов. Разностные отношения имеют вид:

- разностные отношения первого порядка

$$\delta\, y_0 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}, \delta\, y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1},\ \ldots, \delta\, y_{n-1} = \frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}};$$

- разностные отношения второго порядка

$$\delta^2 y_0 = \frac{\delta\, y_1 - \delta y_0}{x_2 - x_0}, \delta^2 y_1 = \frac{\delta\, y_2 - \delta\, y_1}{x_3 - x_1}, \ldots, \delta^2 y_{n-2} = \frac{\delta\, y_{n-1} - \delta\, y_{n-2}}{x_n - x_{n-2}}.$$

В общем виде разностные отношения определяются выражением:

$$\delta^k y_i = \frac{\delta^{k-1} y_{i+1} - \delta^{k-1} y_i}{x_{i+k} - x_i}, \quad i = 0, 1, 2, \ldots, n-1, \quad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{1.18}$$

Как и в случае равноотстоящих узлов, степень многочлена определяется по значениям разностных отношений. Если разностные отношения n-го порядка постоянны, то функция представляет собой многочлен n-ой степени. Указанное свойство разностных отношений позволяет в случае интерполяции многочленами существенно упростить вычисления. В качестве примера проинтерполируем функцию $y(x)$, заданную в виде табл. 1.4. В данном случае шаг таблицы переменный. Определим разностные отношения.