Министерство образования и науки Российской Федерации
Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова

А. В. Кузнецов, Д. А. Румянцев

Интегральные преобразования в задачах теоретической физики

Учебное пособие

*Рекомендовано
Научно-методическим советом университета для студентов,
обучающихся по направлению Физика*

Ярославль
ЯрГУ
2013

УДК 517.4:53(075,8)
ББК В161.2я73
К 89

Рекомендовано
Редакционно-издательским советом университета
в качестве учебного издания. План 2013 года

Рецензенты:
кафедра физики Ярославского государственного технического университета; Проказников А.В., д-р физ.-мат. наук

Кузнецов, Александр Васильевич.
К89 Интегральные преобразования в задачах теоретической физики: учебное пособие / А. В. Кузнецов, Д. А. Румянцев; Яросл. гос. ун-т им. П. Г. Демидова – Ярославль: ЯрГУ, 2013. – 96 с.

ISBN 978-5-8397-0967-6

Излагаются основы теории интегральных преобразований, являющейся важным элементом математической базы для дисциплины "Теоретическая физика" и значительного числа специальных дисциплин. Текст подготовлен с использованием издательской системы LaTeX.

Предназначено для студентов, обучающихся по направлению 011200.68 Физика (дисциплина "Интегральные преобразования", цикл ФТД), очной формы обучения.

Табл. 12. Библиогр.: 13 назв.

УДК 517.4:53(075,8)
ББК В161.2я73

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 11-02-00394-а).

ISBN 978-5-8397-0967-6

Оглавление

Предисловие

Основой аппарата теоретической физики являются аналитические вычисления. Метод интегральных преобразований – одно из наиболее мощных средств для их проведения. Интегральные преобразования выступают эффективным инструментом при решении как обыкновенных дифференциальных уравнений, так и уравнений в частных производных, при решении интегральных уравнений, вычислении определенных интегралов, суммировании числовых и функциональных рядов.

Преобразования Фурье, Лапласа, Меллина и другие применяются для решения задач механики, теории упругости, теплопроводности, электродинамики и других разделов теоретической физики. Использование интегральных преобразований позволяет свести дифференциальное, интегральное или интегро-дифференциальное уравнение к алгебраическому, а также, в случае дифференциального уравнения в частных производных, уменьшить размерность.

В учебном пособии излагаются приложения в теоретической и математической физике метода интегральных преобразований – дисциплины, которая является важным элементом математической базы для разделов дисциплины "Теоретическая физика" и значительного числа специальных дисциплин, формирующих физика-теоретика.

Текст подготовлен на основе специального лекционного курса "Интегральные преобразования", читаемого студентам, обучающимся в магистратуре кафедры теоретической физики Ярославского государственного университета им. П. Г. Демидова. Учебное пособие предназначено для студентов, обучающихся на второй ступени ВПО по направлению подготовки магистров 011200.68 Физика, по магистерским программам "Теоретическая физика", "Релятивистская астрофизика" и другим родственным программам.

При подготовке учебного пособия авторами предпринимались специальные усилия для улучшения изложения и представления материала. Каждый раздел снабжен примерами решения задач и набором контрольных заданий. Имеется подробный предметный указатель. Большое внимание уделялось качеству технической подготовки текста, и особенно математических формул, что обеспечено использованием издательской системы LaTeX.

Как показал анализ имеющейся учебной литературы, в ней не существует общепринятого обозначения для интегральных преобразований. В учебном пособии мы используем обозначение из книги [1], которое считаем наиболее удачным: $g(s) \dashrightarrow f(x)$, где $f(x)$ – функция-оригинал, а $g(s)$ – функция-образ. Во-первых, это обозначение обладает уникальностью, в отличие, например, от используемой в некоторых книгах обычной стрелки $\to$, которая может также означать замену или подстановку, или от обозначения $\mathcal{L}[f(x)]$, которое иногда используется также для дифференциального оператора. Во-вторых, в этом обозначении, в отличие от некоторых других, стрелка, направленная от образа к оригиналу, однозначно их фиксирует.

Ярославль, 2013 *А. В. Кузнецов, Д. А. Румянцев*

Глава 1

Общие сведения об интегральных преобразованиях

1.1 Введение. Общая характеристика интегральных преобразований

Начнем с рассмотрения нескольких характерных задач, возникающих в различных областях теоретической физики.

1.1.1 Уравнение теплопроводности на неограниченной прямой

Ставится задача о распределении температуры внутри бесконечного однородного тонкого стержня при произвольном начальном распределении температуры. Задача сводится к решению уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t) \,, \tag{1.1}$$

с начальным условием $u(x,0) = \varphi(x)$. Здесь $u(x,t)$ – температура, a – коэффициент температуропроводности, $f(x,t)$ – удельная мощность источников тепла.

Для решения этой задачи умножим обе части уравнения (1.1) на $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}xs}/\sqrt{2\pi}$ и проинтегрируем по x в пределах $-\infty < x < \infty$, предполагая, что $|u(x,t)|_{x\to\pm\infty} \to 0$ и $|u_x(x,t)|_{x\to\pm\infty} \to 0$. В результате вместо уравнения в частных производных получим обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$\frac{\mathrm{d}\bar{u}(s,t)}{\mathrm{d}t} = -a^2\, s^2\, \bar{u}(s,t) + \bar{f}(s,t) \tag{1.2}$$

относительно так называемого Фурье-образа $\bar{u}(s,t)$ функции $u(x,t)$:

$$\bar{u}(s,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}xs}\, u(x,t)\,, \tag{1.3}$$

где $\bar{f}(s,t)$ – Фурье-образ функции $f(x,t)$ по переменной x:

$$\bar{f}(s,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}xs}\, f(x,t)\,. \tag{1.4}$$

Очевидно, что решать обыкновенное дифференциальное уравнение проще и быстрее, чем исходное уравнение в частных производных.

1.1.2 Задача механики

Найти закон движения частицы массы m, брошенной вертикально вверх со скоростью v_0, в поле силы тяжести в среде с сопротивлением, пропорциональным скорости.

Направим ось z вертикально вверх, поместив начало отсчета в точке бросания, введем силу сопротивления среды $F_c = 2m\gamma\dot{z}$, где $\gamma = const$, и запишем уравнение движения частицы в следующем виде:

$$\ddot{z}(t) + 2\gamma\dot{z}(t) = -g\,, \quad 0 \leqslant t < +\infty\,. \tag{1.5}$$

Для решения уравнения (1.5) умножим обе его части на e^{-st} и проинтегрируем по t в пределах $0 \leqslant t < +\infty$ с учетом начальных условий $z(0) = 0$, $\dot{z}(0) = v_0$. Получим функциональное уравнение относительно $\bar{z}(s)$:

$$s^2\, \bar{z}(s) - v_0 + 2\gamma\, s\, \bar{z}(s) = -\frac{g}{s}\,, \tag{1.6}$$

где

$$\bar{z}(s) = \int\limits_0^\infty \mathrm{d}t\, \mathrm{e}^{-st}\, z(t) \tag{1.7}$$

– изображение по Лапласу функции $z(t)$.

1.1.3 Задача о таутохроне

Суть задачи: материальная точка под действием силы тяжести движется в вертикальной плоскости (ξ, η) по некоторой кривой. Требуется определить эту кривую так, чтобы материальная точка, начав свое движение без начальной скорости в точке кривой с ординатой x, достигла оси $O\xi$ за время $t = f(x)$, где $f(x)$ – заданная функция. Данная задача была сформулирована Абелем и сводится к интегральному уравнению, которое называется уравнением Абеля:

$$\int\limits_0^x \mathrm{d}\xi \frac{\varphi(\xi)}{\sqrt{x-\xi}} = -\sqrt{2g}\, f(x)\,. \tag{1.8}$$

Здесь $\varphi(\beta) = 1/\sin\beta$, где β – угол между касательной к траектории и осью $O\xi$.

Так же как и в предыдущей задаче, умножим обе части уравнения (1.8) на e^{-sx} и проинтегрируем по x в пределах $0 \leqslant x < +\infty$. Получим следующее функциональное уравнение:

$$\bar{\varphi}(s)\sqrt{\frac{\pi}{s}} = -\sqrt{2g}\,\bar{f}(s)\,, \tag{1.9}$$

где $\bar{\varphi}(s)$ и $\bar{f}(s)$ – образы по Лапласу функций $\varphi(\xi)$ и $f(x)$ соответственно.

К интегральным уравнениям типа Абеля приводит ряд астрофизических задач (см., например, [12]). Рассмотрим, например, задачу о распределении пространственной светимости в звездных системах по наблюдаемой светимости. Так, в модели шарового звездного скопления имеет место так называемое уравнение Цейпеля

$$\int\limits_R^\infty \mathrm{d}r\, \rho(r)\, \frac{r}{\sqrt{r^2-R^2}} = \frac{D(R)}{2} \tag{1.10}$$

связывающее пространственную плотность светимости $\rho(r)$ и поверхностную плотность светимости $D(R)$, где r – пространственное расстояние от центра системы, R – расстояние от ее центра в картинной плоскости – воображаемой плоскости, расположенной перпендикулярно лучу зрения (направлению взгляда на объект).

1.1.4 Вычисление вероятности распада нейтрино

В работе [11] было получено выражение для вероятности распада нейтрино на электрон и W^+ бозон, $\nu \to e^- W^+$, в сильном магнитном поле, в пределе, когда модифицированный динамический полевой параметр $\xi \ll m_W/m_e$:

$$w(\nu \to e^- W^+) = \frac{\sqrt{2} G_\mathrm{F}}{3\pi} \, \frac{(eBp_\perp)^2}{m_W^2 E} \, \varphi(\xi) \,, \quad \xi = \frac{eB}{m_e} \, \frac{p_\perp}{m_W^2} \,, \tag{1.11}$$

где G_F – константа Ферми, e – элементарный заряд, B – индукция внешнего постоянного однородного магнитного поля, m_W и m_e – массы W бозона и электрона соответственно, E – энергия нейтрино, $p_\perp$ – модуль поперечной, по отношению к магнитному полю, компоненты импульса нейтрино,

$$\varphi(\xi) = \frac{1}{\sqrt{3}\pi\xi^2} \int\limits_0^\infty \mathrm{d}u \frac{1+u}{u} \, K_{2/3} \left(\frac{2}{3} \, \frac{(1+u)^{3/2}}{\xi u} \right) \,, \tag{1.12}$$

$K_\nu(x)$ – функция Макдональда [8].

Удивительно, но оказалось, что интеграл (1.12) вычисляется в элементарных функциях. Для этого введем параметр $x = \sqrt{3}/\xi$, умножим обе части (1.12) на x^{s-1} и проинтегрируем по x в пределах $0 \leqslant x < +\infty$. Получим образ $\bar{\varphi}(s)$ искомого интеграла по Меллину:

$$\bar{\varphi}(s) = \int\limits_0^\infty \mathrm{d}x \, x^{s-1} \, \varphi(x) \,, \tag{1.13}$$

который вычисляется с помощью известных в литературе соотношений, см. пример 6 из § 2.4.