

# **Инстантоны, струны и конформная теория поля**



МОСКВА  
ФИЗМАТЛИТ ®

УДК 530.1  
ББК 22.31  
И69

**Инстантоны, струны и конформная теория поля: Сб. статей /**  
Под ред. А. А. Белавина. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. — 448 с. — ISBN  
5-9221-0303-2.

Сборник состоит из 24 статей, посвященных вопросам современной квантовой теории поля (конформная симметрия критических явлений, факторизованное рассеяние в двумерных теориях, инстантоны и монополи в калибровочных теориях, взаимодействие релятивистских струн) и ее математическому анализу (алгебраическая топология, теория представлений бесконечномерных алгебр Ли, теория квантовых групп и др.). Статьи опубликованы в отечественных и зарубежных периодических изданиях в период 1970–1990 гг.

---

Научное издание

## **ИНСТАНТОНЫ, СТРУНЫ И КОНФОРМНАЯ ТЕОРИЯ ПОЛЯ**

Редактор *Е. С. Артоболевская*  
Оригинал-макет: *Д. В. Горбачев*  
Оформление переплета: *А. А. Логунов*

ЛР № 071930 от 06.07.99  
Подписано в печать 22.08.02. Формат 60×90/16  
Бумага офсетная. Печать офсетная  
Усл. печ. л. 28. Уч.-изд. л. 30,8. Тираж 700 экз. Заказ №

Издательская фирма «Физико-математическая литература»  
МАИК «Наука/Интерпериодика»  
117997 Москва, Профсоюзная, 90  
E-mail: fizmat@maik.ru

Отпечатано с готовых диапозитивов  
в ФГУП «Ивановская областная типография»  
153008, г. Иваново, ул. Типографская, 6

---

ISBN 5-9221-0303-2

© ФИЗМАТЛИТ, 2002

## Оглавление

|                                            |   |
|--------------------------------------------|---|
| Предисловие составителя сборника . . . . . | 6 |
|--------------------------------------------|---|

### ЧАСТЬ I

#### ТОПОЛОГИЯ И КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ ПОЛЯ

|                                                                                                                                                                     |    |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| <i>Поляков А.М.</i><br>Спектр частиц в квантовой теории поля . . . . .<br>(Письма в ЖЭТФ. 1974. Т. 20. С. 430–433)                                                  | 8  |
| <i>Поляков А.М.</i><br>Изомерные состояния квантовых полей . . . . .<br>(ЖЭТФ. 1975. Т. 68. С. 1975–1990)                                                           | 12 |
| <i>Белавин А.А., Поляков А.М., Тюпкин Ю.С. и Шварц А.С.</i><br>Псевдочастичные решения уравнений Янга–Миллса . . . . .<br>(Phys. Lett. <b>59B</b> (1975). P. 85–87) | 31 |
| <i>Белавин А.А., Поляков А.М.</i><br>Метастабильные состояния двумерного изотропного ферромаг-<br>нетика . . . . .<br>(Письма в ЖЭТФ. 1975. Т. 22. С. 503–506)      | 35 |
| <i>Фатеев В.А., Фролов И.В. и Шварц А.С.</i><br>Квантовые флуктуации инстантонов в нелинейной $\sigma$ -модели .<br>(Nuclear Physics. <b>B154</b> (1979). P. 1–20)  | 39 |

### ЧАСТЬ II

#### БУТСТРАПНЫЙ ПОДХОД В КОНФОРМНОЙ И ИНТЕГРИРУЕМОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ

|                                                                                                                          |    |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| <i>Поляков А.М.</i><br>Конформная симметрия критических флуктуаций . . . . .<br>(Письма в ЖЭТФ. 1970. Т. 12. С. 538–541) | 63 |
| <i>Поляков А.М.</i><br>Негамильтонов подход в конформной квантовой теории поля<br>(ЖЭТФ. 1974. Т. 66. С. 23–42)          | 67 |

|                                                                                                                                                                         |     |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| <i>Вергелес С.Н., Гряник В.М.</i>                                                                                                                                       |     |
| Двумерные квантовые теории поля, допускающие точные решения . . . . .                                                                                                   | 92  |
| (Ядерная физика. 1976. Т. 23. С. 1324–1334)                                                                                                                             |     |
| <i>Замолодчиков А.Б.</i>                                                                                                                                                |     |
| Точная двухчастичная $S$ -матрица солитонов в квантовой модели синус-Гордона . . . . .                                                                                  | 106 |
| (Commun. Math. Phys. 55 (1977). P. 183–186)                                                                                                                             |     |
| <i>Замолодчиков Ал.Б., Замолодчиков А.Б.</i>                                                                                                                            |     |
| Факторизованные $S$ -матрицы в двух измерениях как точные решения некоторых релятивистских моделей квантовой теории поля . . . . .                                      | 111 |
| (Annals of Physics. <b>120</b> (1979). P. 253–291)                                                                                                                      |     |
| <i>Белавин А.А.</i>                                                                                                                                                     |     |
| Дискретные группы и интегрируемость квантовых систем . . .                                                                                                              | 155 |
| (Функциональный анализ и его приложения.<br>1980. Т. 14. С. 18–26)                                                                                                      |     |
| <i>Белавин А.А., Дринфельд В.Г.</i>                                                                                                                                     |     |
| О решениях классического уравнения Янга–Бакстера для простых алгебр Ли . . . . .                                                                                        | 167 |
| (Функциональный анализ и его приложения.<br>1982. Т. 16. С. 1–29)                                                                                                       |     |
| <i>Фейгин Б.Л., Фукс Д.Б.</i>                                                                                                                                           |     |
| Модули Верма над алгеброй Вирасоро . . . . .                                                                                                                            | 208 |
| (Lecture Notes in Math (Spr. Ver.). <b>1060</b> (1984). P. 230–245)                                                                                                     |     |
| <i>Белавин А.А., Замолодчиков А.Б., Поляков А.М.</i>                                                                                                                    |     |
| Бесконечная конформная симметрия в двумерной квантовой теории поля . . . . .                                                                                            | 224 |
| (Nuclear Physics. <b>B241</b> (1984). P. 333–380)                                                                                                                       |     |
| <i>Доценко Вл.С., Фатеев В.А.</i>                                                                                                                                       |     |
| Конформная алгебра и многоточечные корреляционные функции в $2D$ статистических моделях . . . . .                                                                       | 272 |
| (Nucl. Phys. <b>B240</b> [FS 12] (1984). P. 312–348)                                                                                                                    |     |
| <i>Замолодчиков А.Б., Книжник В.Г.</i>                                                                                                                                  |     |
| Алгебра токов и двумерная модель Весса–Зумино . . . . .                                                                                                                 | 311 |
| (Nuclear Physics. <b>B247</b> (1984). P. 83–103)                                                                                                                        |     |
| <i>Замолодчиков А.Б., Фатеев В.А.</i>                                                                                                                                   |     |
| Нелокальные (парафермионные) токи в двумерной конформной квантовой теории поля и самодуальные критические точки в $Z_N$ -симметричных статистических системах . . . . . | 332 |
| (ЖЭТФ. 1985. Т. 89. С. 380–399)                                                                                                                                         |     |

|                                                                                                                                           |     |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| <i>Белавин А.А.</i>                                                                                                                       |     |
| Уравнения типа КдФ и $W$ -алгебры . . . . .                                                                                               | 360 |
| (Advanced Studies in Pure Mathematics.<br>Integrable Systems in Quantum Field Theory<br>and Statistical Mechanics. 19 (1989). P. 117–125) |     |
| <i>Лукьянов С.Л., Фатеев В.А.</i>                                                                                                         |     |
| Модели двумерной конформной квантовой теории поля с<br>$Z_n$ -симметрией . . . . .                                                        | 369 |
| (International Journal of Modern Physics A.<br>V. 3, № 2 (1988). P. 507–520)                                                              |     |

## ЧАСТЬ III

## КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ СТРУН

|                                                                                                             |     |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| <i>Поляков А.М.</i>                                                                                         |     |
| Квантовая геометрия бозонных струн . . . . .                                                                | 386 |
| (Phys. Lett. <b>103B</b> (1981). P. 207–210)                                                                |     |
| <i>Вергелес С.Н.</i>                                                                                        |     |
| Неинвариантность меры в функциональном интеграле — ис-<br>точник аномалий в квантовой теории поля . . . . . | 394 |
| (Канд. диссертация. Москва: Черноголовка, 1979)                                                             |     |
| <i>Белавин А.А., Книжник В.Г.</i>                                                                           |     |
| Комплексная геометрия и теория квантовых струн . . . . .                                                    | 398 |
| (ЖЭТФ. 1986. Т. 91. С. 364–390)                                                                             |     |
| <i>Поляков А.М.</i>                                                                                         |     |
| Квантовая гравитация в двух измерениях . . . . .                                                            | 435 |
| (Mod. Phys. Lett. A. <b>2</b> (1987). P. 893–898)                                                           |     |
| <i>Замолодчиков А.Б., Книжник В.Г., Поляков А.М.</i>                                                        |     |
| Фрактальные структуры двумерной квантовой гравитации . .                                                    | 441 |
| (Modern Physics Letters A. V. 3, № 8 (1988). P. 819–826)                                                    |     |

## ПРЕДИСЛОВИЕ СОСТАВИТЕЛЯ СБОРНИКА

Эта книга представляет собой сборник работ группы людей, связанных с Институтом Теоретической физики им. Л.Д. Ландау. Статьи, вошедшие в сборник, выполнены в течение примерно двадцати лет с начала 70-х годов. Работы эти сыграли важную роль в формировании современной квантовой теории поля, включая теорию струн, а также ряда областей математики.

На первый взгляд может показаться, что физические явления, рассматриваемые в этих статьях, а именно: конформная симметрия критических явлений, факторизация рассеяния в двумерных теориях поля, инстантоны и монополи в калибровочных теориях, взаимодействие релятивистских струн, не связаны между собой.

На самом деле все эти явления представляют собой предмет изучения одной области теоретической физики — современной квантовой теории поля. Равным образом как и многообразие математических средств: алгебраическая топология, комплексная геометрия, теория представлений бесконечномерных алгебр Ли, теория квантовых групп и пр., являются частью единого арсенала этой области физики.

Кроме множества неочевидных связей между этими физическими явлениями и подходами к ним существует ещё одно обстоятельство, их объединяющее. Именно, будучи интересными сами по себе, все они в определённом смысле являются фрагментами единой теории Мироздания.

Эта книга может быть использована студентами и специалистами по теории элементарных частиц, физики конденсированного состояния и космологии в качестве дополнения к стандартным учебникам по квантовой теории поля.

Перевод статей с английского языка осуществлен С.Н. Вергелесом.

10.07.2001

*А. Белавин*

Часть I

Топология и квантовая  
теория поля

# СПЕКТР ЧАСТИЦ В КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ

Поляков А.М.

Письма в ЖЭТФ. 1974. Т. 20. С. 430–433

В этой статье мы хотели бы привлечь внимание к до сих пор не исследованной части спектра обычных гамильтонианов, используемых в квантовой теории поля. В качестве первого примера рассмотрим модель самовзаимодействующего скалярного поля в двухмерном пространстве-времени с гамильтонианом:

$$H = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left\{ \pi^2 + \left( \frac{d\phi}{dx} \right)^2 - \mu^2 \phi^2 + \lambda/2 \phi^4 \right\}, \quad (1)$$
$$\pi(x) = -i\delta/\delta\phi(x).$$

В этой модели вакуум заполнен бозе-конденсатом  $\bar{\phi}^2 = \mu^2/\lambda$ . Над вакуумом находится одночастичное состояние с массой  $\sqrt{2}\mu$ , представляющее собой малые колебания постоянного конденсата. Однако  $\bar{\phi} = \text{const}$  не есть единственное устойчивое равновесное состояние. Имеется другая экстремаль потенциальной энергии в (1), определяемая из уравнения

$$\phi_c'' + \mu^2 \phi_c - \lambda \phi_c^3 = 0 \quad (2)$$

с граничными условиями  $\phi_c^2(\pm\infty) = \mu^2/\lambda$ , которые означают, что вакуум возмущен лишь внутри конечного объема. Решение (2) имеет вид

$$\phi_c(x) = \frac{\mu}{\sqrt{\lambda}} \operatorname{th} \frac{\mu x}{\sqrt{2}}. \quad (3)$$

Для вычисления спектра колебательных уровней энергии вблизи рассматриваемой точки равновесия запишем

$$\phi(x) = \phi_c(x) + \psi(x)$$

и пренебрежем членами  $\phi^3$  и  $\phi^4$  в гамильтониане (последнее законно при  $\lambda \ll \mu^2$ ). Диагонализуя получившийся квадратичный гамильтониан, находим спектр масс

$$M_n = \frac{2\sqrt{2}}{3} \frac{\mu^3}{\lambda} + \frac{\sqrt{3}+2}{2\sqrt{2}} \mu + \frac{\mu}{\sqrt{2}} \sqrt{n(4-n)}, \quad n = 0, 1, 2. \quad (4)$$

В формуле (4) первый член есть потенциальная энергия в точке равновесия, второй — энергия нулевых колебаний и третий — энергия



возбуждения. Итак, в данной модели есть три типа частиц с аномально большими массами. Мы будем называть такие объекты экстремонами.

Полученный результат в обобщенной формулировке состоит в том, что каждому стационарному регулярному решению классических уравнений движения в квантовой теории поля со слабой связью соответствует свой набор экстремонов, массы которых можно в принципе вычислить. Покажем, что экстремоны существуют в трехмерных моделях. Рассмотрим теорию изовекторного поля Хиггса  $\phi_a(x)$ ,  $a = 1, 2, 3$ .

$$H = \int \left\{ \frac{1}{2} \pi_a^2 + \frac{1}{2} (\nabla \phi_a)^2 - \frac{1}{2} \mu^2 \phi_a^2 + \frac{\lambda}{4} (\phi_a^2)^2 \right\} d^3x. \quad (5)$$

Уравнение для экстремали

$$\nabla^2 \phi_a + \mu^2 \phi_a - \lambda \sum_b \phi_b^2 \cdot \phi_a = 0$$

имеет решение

$$\phi_a = x_a u(r) r^{-1},$$

где  $u$  подчинено уравнению

$$u'' + \frac{2}{r} u' + \left( \mu^2 - \frac{2}{r^2} \right) u - \lambda u^3 = 0,$$

$$u(\infty) = \mu / \sqrt{\lambda}; \quad u(r) \xrightarrow{r \rightarrow 0} \text{const} \cdot r.$$

Это решение будем называть “ежом”, поскольку изовектор в данной точке пространства направлен вдоль радиус-вектора. Уединенный еж не является экстремоном, так как его энергия линейно расходится на больших расстояниях из-за неоднородности распределения направления поля  $\phi_a$ . Для преодоления этой трудности имеются две возможности. Первая состоит в подключении к ежу поля Янга–Миллса, то есть в замене

$$\nabla_\mu \phi_a \rightarrow \nabla_\mu \phi_a + g \epsilon_{abc} A_\mu^b \phi_c$$

и добавлении к (5) гамильтониана Янга–Миллса. При этом в силу калибровочной симметрии второго рода неоднородность направлений становится физически несущественной и не дает вклада в энергию, которая поэтому оказывается конечной. Решение классических уравнений имеет вид

$$\phi_a(x) = x_a u(r) r^{-1}, \quad (6)$$

$$A_\mu^a(x) = \epsilon_{\mu ab} x_b \left( a(r) - \frac{1}{gr^2} \right),$$

где  $u$  и  $a$  подчинены уравнениям

$$\begin{cases} u'' + \frac{2}{r} u' + (\mu^2 - 2g^2 a^2(r))u - \lambda u^3 = 0, \\ a'' + \frac{4}{r} a' - \frac{3}{r^2} a - g^2 r^2 a^3 - g^2 u^2 a = 0. \end{cases}$$

Масса возникающего экстремона имеет порядок

$$M \sim \frac{\mu^2}{\lambda} m_V^{-1} \sim \frac{m_V}{g^2}$$

(где  $m_V = g^2 u^2(\infty)$  — масса векторных бозонов).

В рассмотренной модели, как известно, имеется один безмассовый вектор и два массивных вектора. Если первый из них отождествить с фотоном, то еж в силу (6) обладает магнитным зарядом<sup>1)</sup>.

Легко построить ежи, в которых все компоненты калибровочного поля массивны и сосредоточены внутри области  $1/m_V$ . Для этого достаточно рассмотреть изотензорное или изоспинорное поле Хиггса. В первом случае решение следует искать в виде  $\phi_{ab} = r^{-2}(x_a x_b - \frac{1}{3} \delta_{ab} r^2)u(r)$ , во втором случае оно имеет более сложный вид и будет описано в другом месте.

Другая возможность для конструирования экстремонов состоит в создании пары еж-антиеж. Легко показать, что энергия пары  $E = AR$ , где  $R$  — расстояние между компонентами пары. Для стабилизации этого состояния необходимо рассматривать уровни с ненулевым моментом  $L$

$$E_{\text{eff}} = AR + B \frac{L^2}{R^2}. \quad (7)$$

Спектр масс имеет вид

$$M^2(L) = \text{const} \cdot L^{4/3}. \quad (8)$$

Строгое обоснование формулы (7) требует решения уравнения для экстремали с учетом фиксированности углового момента. Такое уравнение было выведено нами, но найти его точное решение не удалось. Поэтому справедливость (8) зависит от гипотезы о характере вращения ежей. В частности, если предположить, что во вращении участвует область пространства, заключенная между ежами, вместо (8) получится формула

$$M^2(L) = \text{const} \cdot L.$$

Безусловно, однако, что формула для энергии типа (8) должна привести к растущим траекториям Редже.

---

<sup>1)</sup> На это обстоятельство автору указал Л.Б. Окунь. После окончания работы был получен препринт Хоофта, где содержится аналогичный результат.

Итак, при интерпретации спектра элементарных частиц на основе теории поля следует помнить о многих новых возможностях, возникающих при учете экстремонных состояний.

Идеи, весьма близкие к изложенным выше, развивались в работах [1], [2], [3], [4], но мне представляется, что как метод рассмотрения, так и полученные выше результаты являются в какой-то мере новыми.

Я благодарен В.Л. Березинскому, Л.Б. Окуню и Л.Д. Фаддееву за плодотворные обсуждения.

### Литература

1. *Nielsen H., Olesen P.*, Nucl. Phys., B61, 45, 1973.
2. *Зельдович Я.Б., Кобзарев И.Ю., Окунь Л.Б.*, Препринт ИПМ, 1974.
3. *Lee T.D., Wick G.C.*, Columbia University. Preprint, COO-2271, 1974.
4. *Фаддеев Л.Д.*, Phys. Lett., в печати.

# ИЗОМЕРНЫЕ СОСТОЯНИЯ КВАНТОВЫХ ПОЛЕЙ

Поляков А.М.

ЖЭТФ. 1975. Т. 68. С. 1975–1990

Показано, что в теориях со спонтанно нарушенной калибровочной симметрией существуют частицы особого типа, представляющие собой сгустки классического поля с небольшими квантовыми флуктуациями. Подобные сгустки существуют лишь в тех случаях, когда состояние поля на сколь угодно больших расстояниях от сгустка не может быть непрерывным образом деформировано в обычный вакуум. Из-за этого рассматриваемые изомеры имеют строго сохраняющиеся квантовые числа, названные топологическими, которых не было в исходном лагранжиане. Обсуждается вопрос о возможности отождествления изомеров с наблюдаемыми частицами.

## 1. Введение

Количество известных в настоящее время элементарных частиц столь велико, что представляется совершенно необходимым понять, можно ли объяснить их существование из квантовополевых гамильтонианов более или менее привычного типа или же для этого требуются качественно новые идеи. Решение этой задачи затрудняется отсутствием надежных расчетных методов для гамильтонианов с сильной связью. Вместе с тем принято думать, что гамильтонианы со слабой связью обладают очевидными свойствами, прослеживаемыми в теории возмущений, и не имеют отношения к миру адронов. В последнее время выяснилось, что это не совсем так [1], [2], [3], [4], и во многих случаях состояния указанных гамильтонианов содержат необычные частицы, названные “экстремонами” [4], которые соответствуют колебательным уровням вблизи нетривиальных экстремалей потенциальной энергии квантового поля. Замечательным свойством экстремонов является то, что, несмотря на слабую нелинейность исходного гамильтониана, они взаимодействуют сильно.

В настоящей работе изучаются различные типы экстремонов, возникающих в теориях с внутренними симметриями. Выясняется, что экстремоны имеют топологический смысл, связанный с тем, что состояние поля на сколь угодно больших расстояниях нельзя непрерывной деформацией преобразовать к вакууму. В результате экстремонам следует приписать строго сохраняющиеся квантовые числа, и даже

сильные квантовые флуктуации не способны разрушить экстремон. По этой же причине качественные результаты, полученные ниже, не чувствительны к конкретному виду гамильтониана.

Поля Янга–Миллса весьма естественно включаются в рассматриваемую схему и приводят к новым состояниям. Некоторые из этих состояний обладают магнитным зарядом.

Изомерам автоматически приписываются новые, строго сохраняющиеся квантовые числа, которые мы назвали “топологическими”. Сохранение этих чисел связано с невозможностью непрерывной деформации изомерного состояния поля к вакуумному состоянию.

Изомеры, изучаемые в данной работе, имеют шарообразную и нитеобразную формы. Для группы  $SU(2)$  возможны оба сорта изомеров, для группы  $SU(3)$  найдены только нитевые объекты, причем нити обладают триальностью, которая оказывается топологическим квантовым числом.

В работе принят следующий порядок изложения. В разд. 2 на примере простой одномерной модели продемонстрирована общая схема использования классических решений в квантовой теории поля, причем в рамках модели спектр изомеров вычислен до конца. В разд. 3 найдены сферические решения для экстремалей изовекторного и изоспинорного полей Хиггса с симметрией  $SU(2)$ . В разд. 4 объекты предыдущего раздела заполняются полем Янга–Миллса и образуют изомерные состояния. В разд. 5 рассмотрены нитевые изомеры для групп  $SU(2)$  и  $SU(3)$ . Число типов нитей равно размерности центра группы. В разд. 6 обсуждаются топологический смысл полученных результатов и вводятся топологические квантовые числа. Кроме того, выясняется связь нитевых изомеров со свойствами гамильтониана на малых расстояниях.

## 2. Классические решения и квантование

В этом разделе будет рассмотрена задача квантования поля вблизи некоторой классической экстремали. Для большей наглядности мы изучим простую одномерную модель теории поля и на этом примере продемонстрируем наши методы. Перенесение этих методов на общий случай оказывается нетривиальным.

Пусть  $\varphi(x)$  — скалярное поле в двумерном пространстве времени с гамильтонианом

$$H = \int_{-\infty}^{\infty} dx \left\{ \frac{\pi^2}{2} + \frac{1}{2} \left( \frac{d\varphi}{dx} \right)^2 - \frac{\mu^2}{2} \varphi^2 + \frac{\lambda}{4} \varphi^4 \right\},$$

$$\pi(x) = -i \frac{\delta}{\delta \varphi(x)}, \quad \lambda \ll \mu^2. \quad (2.1)$$

В формуле (2.1) первый член есть кинетическая энергия, а остальные — потенциальная энергия.

Можно воспринимать  $H$  как гамильтониан упругой линейной струны, лежащей в двугорбом потенциальном рельефе (при этом  $x$  нумерует точки струны, а  $\varphi(x)$  есть амплитуда отклонения в точке  $x$ ). В основном состоянии струна лежит в одной из ям и совершает малые нулевые колебания, т.е.  $\bar{\varphi} = \pm\mu/\sqrt{\lambda}$ . Это, однако, не единственная точка равновесия струны. Другие равновесные конфигурации должны определяться из уравнения

$$d^2\varphi_c/dx^2 + \mu^2\varphi_c - \lambda\varphi_c^3 = 0 \quad (2.2)$$

с граничными условиями  $\varphi_c(\pm\infty) = \mu/\sqrt{\lambda}$ , которые обеспечивают конечность энергии равновесного состояния. Решение (2.2) имеет вид

$$\varphi_c(x) = (\mu/\sqrt{\lambda}) \operatorname{th}(\mu x/\sqrt{2}). \quad (2.3)$$

Струна, таким образом, начинаясь в левой яме, перебрасывается в некоторой точке в правую яму. Благодаря совместному действию потенциальных и упругих сил такая конфигурация равновесна. Рассмотрим теперь колебания внутри равновесия:

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \varphi_c(x) + \Phi(x), \\ H &= \int dx \left\{ \frac{1}{2} \left( \frac{d\varphi_c}{dx} \right)^2 - \frac{\mu^2}{2} \varphi_c^2 + \frac{\lambda}{4} \varphi_c^4 \right\} + \int dx \left\{ \frac{1}{2} \left( \frac{d\Phi}{dx} \right)^2 + \frac{\pi^2}{2} + \right. \\ &\quad \left. + \left( \mu^2 - \frac{3}{2} \mu^2 \operatorname{ch}^{-2} \frac{\mu x}{\sqrt{2}} \right) \Phi^2 - \mu\sqrt{\lambda} \operatorname{th} \frac{\mu x}{\sqrt{2}} \Phi^3 + \frac{\lambda}{4} \Phi^4 \right\}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

При  $\lambda \ll \mu^2$  последние два члена в (2.4) можно отбросить. Возникающий квадратичный гамильтониан можно диагонализировать. Для этого представим  $\Phi(x)$  в виде

$$\begin{aligned} \Phi(x) &= \sum_{\kappa} \xi_{\kappa} \psi_{\kappa}(x), \\ \frac{\delta}{\delta \Phi(x)} &= \sum_{\kappa} \psi_{\kappa}(x) \frac{\partial}{\partial \xi_{\kappa}} \equiv \sum_{\kappa} \psi_{\kappa}(x) \pi_{\kappa}, \end{aligned} \quad (2.5)$$

где  $\psi_{\kappa}(x)$  — полная система функций, подчиненных уравнению

$$\frac{d^2\psi_{\kappa}}{dx^2} + \left( m_{\kappa}^2 - 2\mu^2 + 3\mu^2 \operatorname{ch}^{-2} \frac{\mu x}{\sqrt{2}} \right) \psi_{\kappa}(x) = 0 \quad (2.6)$$

(здесь  $m_{\kappa}^2$  — собственные значения (2.6)). Подставляя (2.6) в (2.4), находим (пренебрегая нелинейными членами)

$$H = \int dx \left\{ \frac{1}{2} \left( \frac{d\varphi_c}{dx} \right)^2 - \frac{\mu^2}{2} \varphi_c^2 + \frac{\lambda}{4} \varphi_c^4 \right\} + \frac{1}{2} \sum_{\kappa} (\pi_{\kappa}^2 + m_{\kappa}^2 \xi_{\kappa}^2). \quad (2.7)$$

Теперь легко найти массы частиц, соответствующих малым колебаниям струны вблизи необычного положения равновесия. Массы эти определяются как собственные значения оператора  $H - E_0$ , где  $E_0$  — энергия истинного вакуума с  $\bar{\varphi} = \pm\mu/\sqrt{\lambda}$ . Отсюда спектр масс имеет вид

$$M = M_0 + \left( \frac{1}{2} \sum m_k - \frac{1}{2} \sum_{vac} m_k \right) + \sum l_s m_s. \quad (2.8)$$

Здесь  $M_0$  — разность между первым членом (2.7) и его вакуумным значением:

$$M_0 = 2/3\sqrt{2}\mu^3/\lambda, \quad (2.9)$$

второй член есть изменение нулевых колебаний,  $l_s$  — некоторые целые числа.

Формула (2.8) не связана с конкретной моделью и дает общий итог вычисления масс экстремонов в теориях с малой константой связи. Поправки к этой формуле содержат первую (и более высокие) степени константы связи и в принципе могут быть вычислены.

Явное выражение для второго члена (2.8) можно получить, используя известный в статистической физике метод [5], который позволяет выразить этот член через фазы рассеяния на потенциале, созданном экстремоном. Мы не будем приводить явных формул, не представляющих особого интереса, и обратим внимание лишь на следующее важное обстоятельство. Нетрудно проверить, что в одномерной модели

$$\frac{1}{2} \left( \sum m_k - \sum_{vac} m_k \right) = -\frac{\mu\sqrt{2}}{8\pi} \ln \frac{\Lambda}{\mu} + \text{const},$$

где  $\Lambda$  — радиус ультрафиолетового обрезания. Таким образом, первая квантовая поправка логарифмически расходится. Однако вместе с тем первый член в (2.8), даваемый формулой (2.9), содержит затравочную массу мезона  $\sqrt{2}\mu$  (возбуждения над нормальным вакуумом). Физическая масса мезона дается формулой

$$m^2 = 2\mu^2 - (\lambda/4\pi) \ln(\Lambda/\mu). \quad (2.10)$$

Подставляя (2.10) в (2.9) и производя тем самым ренормировку массы, мы приходим к тому, что после этого квантовая поправка имеет конечную величину. По-видимому, это утверждение справедливо для любой ренормируемой теории: именно, после соответствующих ренормировок масса экстремона является конечной.

Рассуждения по поводу формул (2.8) предполагали малость нелинейных членов. В этом предположении можно было бы усомниться, так как в задаче всегда имеются один или несколько осцилляторов с нулевой частотой. Их существование связано с трансляционной и другими инвариантностями, нарушаемыми классическим решением.

Например, с трансляциями связан уровень с

$$\psi_0 = \frac{d\varphi_c}{d\mathbf{x}},$$

с вращениями — три уровня

$$\psi_{0,\alpha} = \left[ \mathbf{x}, \frac{d}{d\mathbf{x}} \right]_{\alpha} \varphi_c$$

и т.д. Несмотря на нулевые собственные частоты, квантовые поправки не содержат инфракрасных расхождений. Физически это связано с тем, что указанные моды являются движением экстремона как целого и не могут при достаточно медленных движениях сильно влиять на спектр. Формальное доказательство этого и вычисление моментов инерции экстремона проделаны в другой работе.

Итак, мы пришли к простой схеме квантования классических решений. Мы видим, что необходимо во-первых, найти устойчивое стационарное классическое решение, во-вторых, исследовать спектр малых колебаний вблизи него и в-третьих, использовать формулу (2.8). При малых константах связи эта процедура даст спектр с точностью порядка безразмерной константы связи.

### 3. Поля Янга–Миллса с симметрией $SU(2)$

В этом разделе изучаются экстремоны в теориях с распавшейся калибровочной симметрией  $SU(2)$ . Возможны два типа распада симметрии, которые следует рассмотреть отдельно. В первом случае поле Хиггса является изовектором, во втором — изоспинором. В теориях слабых взаимодействий этим двум случаям отвечают соответственно модели Глэшоу–Джорджи и Вейнберга.

Начнем с первого случая. Следуя программе предыдущего раздела, найдем экстремальные граничные условия для поля Хиггса, которые топологически неэквивалентны обычным. Гамильтониан поля Хиггса имеет вид (поле Янга–Миллса временно отключено)

$$H = \int \left\{ \frac{1}{2} \pi_a^2 + \frac{1}{2} (\partial \psi_a^2) + V \left( \sum \psi_a^2 \right) \right\} d^3 x, \quad (3.1)$$

где  $a = 1, 2, 3$  — изотонический индекс. Если ввести единичный вектор  $n^a$ , так что  $\psi_a = u n^a$ , то потенциальная энергия в (3.1) примет вид

$$U = \int \left\{ \frac{1}{2} (\partial u)^2 + \frac{1}{2} u^2 (\partial n^a)^2 + V(u^2) \right\} d^3 x. \quad (3.2)$$

Рассмотрим вклад в (3.2) от больших расстояний, где  $u \rightarrow u_{\infty}$ ,



а  $u_\infty$  определено условием  $V'(u_\infty) = 0$ . Имеем

$$U \approx \frac{1}{2} u_\infty^2 \sum_a \int (\partial n^a)^2 d^3 x. \quad (3.3)$$

Условия минимальности (3.3) дают все возможные граничные условия в бесконечности. Обозначим через  $\theta$  и  $\phi$  полярный и азимутальный углы вектора  $n^a$  в изотоническом пространстве. Уравнения экстремума имеют вид

$$\nabla^2 \theta = 1/2 \sin 2\theta (\nabla \phi)^2, \quad \nabla (\sin^2 \theta \nabla \phi) = 0. \quad (3.4)$$

Будем искать решение (3.4) в виде  $\theta = \theta(\vartheta)$ ,  $\phi = \phi(\varphi)$ , где  $\vartheta$  и  $\varphi$  — соответствующие углы в обычном пространстве. Тогда уравнения (3.4) приводятся к виду

$$\frac{d}{d\vartheta} \left( \sin \vartheta \frac{d\theta}{d\vartheta} \right) = \frac{1}{2} \sin 2\theta \frac{1}{\sin \vartheta} \left( \frac{d\phi}{d\varphi} \right)^2, \quad \frac{d^2 \phi}{d\varphi^2} = 0. \quad (3.5)$$

Второе уравнение (3.5) совместно с условием непрерывности дает  $\phi = \pm n$  ( $n$  — целое число). Первое уравнение интегрируется введением независимой переменной  $\ln \operatorname{tg}(\vartheta/2)$ . Регулярные и непрерывные решения имеют вид

$$\theta = 2 \operatorname{arctg} \left\{ \left[ \operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2} \right]^n \right\}, \quad \theta = 2 \operatorname{arctg} \left\{ \left[ \operatorname{ctg} \frac{\vartheta}{2} \right]^n \right\}. \quad (3.6)$$

Для того чтобы найденные решения имели физический смысл, необходимо убедиться, что они устойчивы, т.е. действительно осуществляют минимум функционала (3.3). Нам удалось показать это в простейшем случае  $n = 1$  (см. приложение); при  $n > 1$  вопрос остается открытым, хотя, по мнению автора, устойчивость есть и в этом случае. Поэтому ниже мы сконцентрируем внимание на решении с  $n = 1$ :

$$\phi = \varphi, \quad \theta = \vartheta, \quad (3.7)$$

которое будем называть “ежом” (иглы ежа, задающие направление поля Хиггса, направлены вдоль радиус-векторов в обычном пространстве; решения с  $n \neq 1$  можно было бы называть скрученными ежами. Отметим, что число  $n$  является определяемой в топологии “степенью отображения” сферы на сферу).

После задания граничных условий (3.7) можно искать минимум потенциальной энергии поля Хиггса в виде

$$\psi_a = x_a \frac{u(r)}{r}. \quad (3.8)$$

Подстановка (3.8) в уравнения Эйлера дает

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{du}{dr} \right) + \left( \mu^2 - \frac{2}{r^2} \right) u - \lambda u^3 = 0. \quad (3.9)$$

При выводе (3.9) мы выбрали для конкретности

$$V(u^2) = -1/2 \mu^2 u^2 + 1/4 \lambda u^4. \quad (3.10)$$

Уравнение (3.9) имеет решение с асимптотиками:

$$\begin{aligned} u(r) &\rightarrow \text{const} \cdot r, & r &\rightarrow 0; \\ u(r) &\rightarrow \mu^2/\lambda, & r &\rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Такое решение представляет собой пузырек, внутри которого поле Хиггса стремится к нулю. Легко понять качественно, почему тот пузырек стабилен: расширению пузырька препятствует объемный проигрыш в энергии, связанный с членом  $V(u^2)$  в (3.2), захлопыванию мешает член  $\int u^2 (\nabla n)^2 d^3x$ , который дает в разность энергий вклад порядка  $-u_\infty^2 R$  ( $R$  — размер пузырька). Мы видим, что именно аномальные граничные условия создают отрицательное “линейное натяжение”, которое стабилизирует и пузырек. Полная энергия ежа линейно расходится из-за члена  $\int u^2 (\nabla n)^2 d^3x$ , и поэтому уединенный еж не является экстремумом. Однако в дальнейшем мы построим экстремонные состояния, либо заполняя ежа полем Янга–Миллса, либо рассматривая пары противоположно ориентированных ежей.

Перейдем к изучению ежей, возникающих в теориях с изоспинорным полем Хиггса  $\psi$ . Следует заранее сказать, что получающиеся в этом случае ежи оказываются неустойчивыми. Тем не менее мы приводим решения уравнений экстремума (который теперь не будет минимумом) в надежде, что введением каких-либо дополнительных полей еж удастся стабилизировать. Будем искать решение на бесконечности как повернутое некоторым образом стандартное решение

$$\psi = u_\infty \hat{R}(x) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x \rightarrow \infty, \quad (3.11)$$

где  $\hat{R}(x)$  — матрица группы  $SU(2)$ , которую следует найти из условия экстремальности граничных условий (3.11). Эта экстремальность должна быть обеспечена для функционала

$$\begin{aligned} U &= \int \{ \partial \psi^+ \partial \psi + V(\psi, \psi^+) \} d^3x \approx u_\infty^2 \int (\nabla R^+ \nabla R)_{22} + \dots = \\ &= \frac{1}{2} u_\infty^2 \int \text{Sp}(\nabla R^+ \nabla R + \dots); \end{aligned} \quad (3.12)$$

члены, отброшенные в формуле (3.12), дадут конечный вклад в энергию и несущественны для формулировки граничных условий на бесконечности.

Для нахождения экстремалей функционала (3.12) параметризуем матрицы  $R$  с помощью углов Эйлера:

$$\hat{R} = \exp\left(i \frac{\sigma_z \gamma}{2}\right) \exp\left(i \frac{\sigma_x \beta}{2}\right) \exp\left(\frac{\sigma_z \alpha}{2}\right). \quad (3.13)$$

После несложных вычислений находим

$$U = \frac{1}{4} u_\infty^2 \int d^3x \{ (\nabla\alpha)^2 + (\nabla\beta)^2 + (\nabla\gamma)^2 + 2\nabla\gamma\nabla\alpha \cos\beta \}. \quad (3.14)$$

Будем искать решения, для которых  $\alpha = -\gamma$ . В этом случае функционал (3.14) эквивалентен функционалу (3.3), если сопоставить  $\beta/2 \leftrightarrow \theta$ ,  $\alpha \leftrightarrow \phi$ . Поэтому находим решение типа ежа

$$\alpha = \varphi, \quad \beta = 2\vartheta. \quad (3.15)$$

Соответствующие граничные условия для  $\psi$  имеют вид

$$\psi = u_\infty \begin{pmatrix} e^{-i\varphi} \sin \vartheta \\ \cos \vartheta \end{pmatrix}, \quad x \rightarrow \infty. \quad (3.16)$$

Если искать теперь решение для всей потенциальной энергии в виде

$$\psi = u(r) \begin{pmatrix} e^{-i\varphi} \sin \vartheta \\ \cos \vartheta \end{pmatrix}, \quad (3.17)$$

для  $u(r)$  возникает уравнение (3.9). Решение (3.17), как уже упоминалось, не определяет минимум энергии. Этот факт, доказанный в приложении, имеет наглядный топологический смысл, который будет обсуждаться в разд. 6.

Таким образом, мы не нашли точечных экстремумов для изоспинного поля Хиггса.

#### 4. Включение полей Янга–Миллса

Одним из способов придать ежу физический смысл является заполнение упоминавшегося выше пузырька полем Янга–Миллса. Нетрудно понять без вычислений, что подключение этих полей делает массу ежа конечной. Действительно, бесконечная масса пустого ежа возникает из-за расходимости на больших расстояниях интеграла (3.3), которая, в свою очередь, связана с тем, что на любых расстояниях направление поля Хиггса в изопространстве неоднородно. Включение полей Янга–Миллса делает гамильтониан инвариантным относительно неоднородных поворотов в изопространстве, и поэтому указанная выше неоднородность направлений перестает давать вклад в энергию.

Для количественного анализа задачи напомним потенциальную энергию системы полей Хиггса и Янга–Миллса (как и выше, мы начинаем со случая изовекторных полей Хиггса):

$$\begin{aligned} U &= \int d^3x \{ |D_i\psi^a|^2 + 1/4 (F_{ik}^a)^2 + V(|\psi|^2) \}, \\ (D_i\psi)^a &= \nabla_i\psi^a + g\varepsilon^{abc} A_i^b\psi^c, \\ F_{ik}^a &= \partial_i A_k^a - \partial_k A_i^a + g\varepsilon^{abc} A_i^b A_k^c. \end{aligned} \quad (4.1)$$

В формуле (4.1) фигурирует лишь “магнитная” часть энергии поля Янга–Миллса, поскольку “электрическая” часть при каноническом квантовании выражается через обобщенные импульсы и должна быть отнесена к кинетической энергии (калибровка  $A_0^a = 0$ ).

Нашей задачей является отыскание минимумов функционала (4.1), которые при  $g \rightarrow 0$  будут переходить в рассмотренных выше еж. Как и раньше, будем искать поле  $\psi^a$  в виде (3.8). Чтобы угадать вид поля  $A_i^a$ , порожденного полем  $\psi^a$ , вычислим ток, производимый  $\psi^a$ :

$$J_i^a = \varepsilon^{abc} \psi^b \partial_i \psi^c = \varepsilon^{abc} \frac{u^2(r)}{r^2} x^b \partial_i x^c = \frac{u^2(r)}{r^2} \varepsilon_{iab} x_b. \quad (4.2)$$

В силу (4.2) естественно искать поле Янга–Миллса в виде

$$A_i^a = a(r) \varepsilon_{iab} x_b. \quad (4.3)$$

Напряженность поля имеет вид

$$F_{ik}^a = 2\varepsilon_{ika} a(r) + \frac{a'}{r} [\varepsilon_{kas} x_s x_i - \varepsilon_{ias} x_s x_k] - g a^2 \varepsilon_{kis} x_s x_a. \quad (4.4)$$

Подстановка указанных формул в уравнение Янга–Миллса дает

$$\begin{aligned} a'' + 4r^{-1} a' - 3ga^2 - g^2 r^2 a^3 - g^2 u^2 a &= g u^2 r^{-2}, \\ u'' + 2r^{-1} u' - 2r^{-2} u - 4gau - 2g^2 a^2 r^2 u + \mu^2 u - \lambda u^3 &= 0. \end{aligned}$$

Замена

$$a(r) = b(r) - 1/gr^2 \quad (4.5)$$

позволяет упростить уравнения:

$$\begin{aligned} b'' + 4r^{-1} b' + 3r^{-2} b - g^2 r^2 b^3 - g^2 u^2 b &= 0, \\ u'' + 2r^{-1} u' + (\mu^2 - 2g^2 b^2) u - \lambda u^3 &= 0. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Асимптотики решений системы (4.6) есть

$$\begin{aligned} r \rightarrow 0 : \quad u(r) &\sim r, \quad a(r) \sim \text{const}, \\ r \rightarrow \infty : \quad u(r) &\rightarrow u_\infty, \quad a(r) \rightarrow -1/gr^2. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Еж, описываемый уравнениями (4.6), устроен следующим образом. В центре его отсутствует бозе-конденсат и имеется поле Янга–Миллса. На характерной длине порядка  $1/\mu$  конденсат  $u(r)$  восстанавливается и практически выходит на асимптотику. На другой длине порядка  $1/m_V = 1/gu_\infty$  поле  $a(r)$  выходит на свою асимптотику (4.7). Характерным свойством ежа является то, что вплоть до длин  $\sim 1/m_V$  он вполне аналогичен пустому ежу, описываемому уравнениями (4.9). В частности, нетрудно показать, что энергия имеет вид

$$u = \frac{1}{2} u_\infty^2 \int_{|x| \leq 1/m_V} (\nabla n)^2 d^3 x \sim \frac{u_\infty^2}{m_V} \sim \frac{gu_\infty}{g^2} \sim \frac{m_V}{g^2}. \quad (4.8)$$

Отметим, что поле Янга–Миллса в данном случае проникает на бесконечность: четко проверить, что асимптотический потенциал (4.7) дает отличную от нуля напряженность. Такой результат связан с тем, что в случае изовекторного поля Хиггса лишь два из трех полей Янга–Миллса приобретают массу. Бозе-конденсат непроницаем для массивных компонент, однако легко пропускает безмассовые. Присутствие нетривиального векторного потенциала на бесконечности означает, как будет показано в приложении Б, что еж является магнитным монополем.

Для изоспинорных полей Хиггса, как уже упоминалось в разд. 3, решение уравнения экстремума имеет лишь методический интерес. Потенциальная энергия по-прежнему имеет вид (4.1) с тем лишь различием, что

$$D_i \psi = \partial_i \psi - 1/2 ig A_i^a \tau_a \psi, \quad (4.9)$$

где  $\tau_a$  — матрицы Паули.

Будем искать решение уравнений экстремума в виде (4.3) для  $A_i^a$  и (4.17) для  $\psi$ . Для составления уравнений необходимо вычислить величину

$$D^2 \psi = \nabla^2 \psi - ig(\tau_a A_i^a) \nabla_i \psi - 1/4 g^2 (A_i^a)^2 \psi. \quad (4.10)$$

Имеем

$$(A_i^a)^2 = 2r^2 a^2(r), \quad A_i \equiv \tau_a A_i^a = ra(r) \left[ \tau, \frac{\mathbf{r}}{r} \right]. \quad (4.11)$$

Из второй формулы (4.11) находим компоненты  $A_i$  в сферических координатах:

$$\begin{aligned} A_r &= 0, & A_\vartheta &= ra(r)(-i) \begin{pmatrix} 0 & e^{-i\varphi} \\ -e^{i\varphi} & 0 \end{pmatrix}, \\ A_\varphi &= ra(r) \sin \vartheta \begin{pmatrix} 1 & -\operatorname{ctg} \vartheta e^{-i\varphi} \\ -\operatorname{ctg} \vartheta e^{i\varphi} & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Пользуясь формулами (3.17), (4.10) и (4.12), находим уравнение для  $u(r)$ :

$$u'' + \frac{2}{r} u' + \left\{ \mu^2 - \frac{g^2 r^2}{2} \left[ a(r) + \frac{2}{gr^2} \right]^2 \right\} u - \lambda u^3 = 0. \quad (4.13)$$

Чтобы найти уравнения для  $a(r)$ , необходимо вычислить ток, производимый полем  $\psi$ :

$$J_i^a = 1/2 ig \psi^\dagger \tau^a \overleftrightarrow{\nabla}_i \psi + 1/2 g^2 \psi^\dagger \psi A_i^a. \quad (4.14)$$

В формулу (4.14) следует подставить

$$\psi = u(r) R \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (4.15)$$

где  $R$  определяется формулами (4.13), (4.15). При этом получим

$$J_i^a = 1/2 i g u^2(r) \{ R^+ \tau^a \nabla_i R - \nabla_i R^+ \tau^a R \}_{22} + 1/2 g^2 u^2(r) a(r) \varepsilon_{ias} x_s. \quad (4.16)$$

После довольно длинных вычислений, использующих явный вид матрицы  $R$ , находим

$$J_i^a = 1/2 g^2 u^2(r) (a(r) + 2/gr^2) \varepsilon_{ias} x_s. \quad (4.17)$$

Формула (4.17) может быть понята и без вычислений, поскольку поле  $a(r) = -2/gr^2$  целиком связано с калибровочным преобразованием (напряженность  $F_{ik}^a$  для него равна нулю). Это преобразование, как легко проверить, есть  $R^+$ . Поэтому при  $a(r) = -2/gr^2$  ковариантные производные поля  $R_{(1)}^0$  должны равняться нулю. Этот факт и отражается в формуле (4.17).

Пользуясь формулой (4.17) и вспоминая формулу (4.4), находим уравнение для  $a(r)$

$$a'' + (4/r)a' - 3ga^2 - g^2 r^2 a^3 = 1/2 g^2 u^2 [a(r) + 2/gr^2]. \quad (4.18)$$

Уравнения (4.13) и (4.18) несколько упрощаются, если ввести поле

$$\begin{aligned} b(r) &= a(r) + 2/gr^2, \\ b'' + 4b'/r + 3gb^2 - g^2 r^2 b^3 - 1/2 g^2 u^2 b &= 0, \\ u'' + 2u'/r + [\mu^2 - 1/2 g^2 r^2 b^2(r)]u - \lambda u^3 &= 0. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Не останавливаясь на очевидном сходстве объектов, описываемых уравнениями (4.19) и (4.6), подчеркнем их различие. В рассматриваемом сейчас случае физическое поле Янга–Миллса (т.е.  $F_{ik}^a$ ) сосредоточено внутри области размера  $m_V^{-1}$  и затухает экспоненциально вне этой области. В то же время в случае изовекторного ежа на бесконечности имеется “магнитное” поле, спадающее согласно (4.3) и (4.7) по закону  $1/r^2$ . Таким образом, изовекторный еж является магнитным монополем<sup>1)</sup>. Подробнее это свойство обсуждается в приложении.

Величины  $F_{ik}^a$  можно оценить так:

$$F_{ik}^a \propto a(r) \propto 1/gr^2 \propto m_V^2/g.$$

Сопоставляя эти две оценки, находим, что вклад в энергию от поля Янга–Миллса имеет порядок  $m_V/g^2$ . Аналогично убеждаемся, что поле Хиггса дает вклад того же порядка. Заметим, что приведенные оценки правильны, если  $\mu > m_V$  (ситуация, аналогичная вихрям в сверхпроводниках второго рода). В обратном случае еж имеет размер  $1/m_V$ , и вместо  $m_V$  в этой формуле стоит  $\mu$ .

<sup>1)</sup> На этот факт мое внимание обратил Л.Б. Окунь. Немного позднее был получен препринт Хуфта [6], содержащий тот же вывод. См. также [4].

## 5. Нитевые изомеры

До сих пор мы занимались изомерными состояниями, представляющими собой небольшие шарики, внутри которых вакуум отличается от нормального. В настоящем разделе мы изучим нитеобразные объекты типа квантовых вихрей. В случае абелевых групп вопрос уже рассматривался Нильсеном и Олесеном в [1]. Поэтому мы будем изучать только неабелевы группы.

Следует заметить, что бесконечные нити, которые будут изучаться ниже, лишены физического смысла из-за бесконечной массы. Однако их можно использовать как строительный материал для создания экстремонов (например, путем образования вращающихся колец). Вопрос о постройке экстремонов из нитей будет изучаться в другом месте, здесь же мы будем заниматься лишь свойствами строительного материала.

Как и раньше, начнем с граничных условий для группы  $SU(2)$ . Для этого необходимо изучить минимумы функционала (3.14). Удобно переписать этот функционал, введя вместо углов Эйлера единичный вектор  $\mathbf{n}$ , характеризующий ось вращения и угол поворота  $\chi$ . Матрицы  $SU(2)$ , таким образом, есть

$$R = \exp \left\{ i \frac{\chi}{2} (\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}) \right\}, \quad (5.1)$$

где  $0 < \chi < 2\pi$ . Подставляя (5.1) в (3.12), находим

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} u_\infty^2 \int \text{Sp} \nabla R^+ \nabla R d^3 x = \\ &= \frac{1}{2} u_\infty^2 \int \left\{ \frac{1}{4} (\nabla \chi)^2 + (\nabla \mathbf{n})^2 \sin^2 \frac{\chi}{2} \right\} d^3 x. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Выражение (5.2) имеет наглядный смысл: группа  $SU(2)$  есть сфера в четырехмерном пространстве, а (5.2) — элемент длины дуги на этой сфере. Нам следует найти минимум функционала (5.2), причем решение мы будем искать в аксиально симметричном виде (нить направлена вдоль оси  $z$ ).

Крайне важным является вопрос о различных условиях для  $\chi(\beta)$  и  $\mathbf{n}(\beta)$ , где  $\beta$  — азимутальный угол. При обходе вокруг нити, т.е. при изменении  $\beta$  от нуля до  $2\pi$ , мы должны получить прежнее преобразование фактор-группы  $O(3) = SU(2)/Z_2$ , поскольку физической группой симметрии является  $O(3)$ . Это означает, что возможны два варианта:

- 1)  $\chi(2\pi) = \chi(0)$ ,  $\mathbf{n}(2\pi) = \mathbf{n}(0)$ ,
- 2)  $\chi(2\pi) = 2\pi - \chi(0)$ ,  $\mathbf{n}(2\pi) = -\mathbf{n}(0)$ .

Возможность граничных условий второго типа связана с тем, что матрица  $R(2\pi - \chi, -\mathbf{n})$ , хотя и отличается знаком от матрицы  $R(\chi, \mathbf{n})$ ,

представляет то же самое вращение. Минимумов с условиями первого типа не существует, так как энергия всегда может быть уменьшена непрерывной деформацией к  $\chi = 0$ . Однако граничные условия второго типа топологически неэквивалентны тривиальным и допускают существование минимумов.

Простейший минимум такого типа получается, если выбрать  $\chi = \pi$ , а  $\mathbf{n}$  — из условия минимума функционала:

$$\int \left( \frac{d\mathbf{n}}{d\beta} \right)^2 d\beta = \min, \quad \mathbf{n}(2\pi) = -\mathbf{n}(0). \quad (5.3)$$

Эта задача изучалась ранее в теории жидких кристаллов [7]. Было показано, что ее общее устойчивое решение представляет собой равномерный поворот вектора  $\mathbf{n}$  в какой-либо плоскости так, что при обходе нити  $\mathbf{n}$  совершает половину оборота. В частном случае, когда выбранная плоскость ортогональна оси нити, движение  $\mathbf{n}$  описывается формулами

$$\mathbf{n} = (\cos \beta/2, \sin \beta/2, 0), \quad \chi = \pi. \quad (5.4)$$

Итак, в случае группы  $SU(2)$  существует лишь два типа граничных условий. В то же время в абелевом случае для группы  $O(2)$  число типов бесконечно, так как фаза поля при обходе нити может меняться на  $2\pi m$ , где  $m$  — любое целое число.

Мы показали, что в  $SU(2)$  существует лишь один тип граничных условий, приводящих к нитевым изомерам. Однако для этого типа условий имеется непрерывное множество решений для  $\chi(\beta)$  и  $\mathbf{n}(\beta)$ , приводящих к одной и той же энергии. Действительно, плоскость в четырехмерном пространстве, в которой вращается 4-вектор

$$u = \left( \cos \frac{\chi}{2}, \mathbf{n} \sin \frac{\chi}{2} \right),$$

может быть расположена произвольным образом. Кроме того, направление поворота вектора  $\mathbf{n}$  при обходе окружности может принимать два значения. Эти результаты нужно интерпретировать следующим образом. Волновой функционал основного состояния изомера не зависит от ориентации и плоскости поворота, поэтому все расположения этой плоскости равновероятны.

В общем случае количество разных граничных условий равняется связности рассматриваемой группы или размерности центра универсальной накрывающей группы. В случае  $SU(3)$  имеются, таким образом, граничные условия трех типов. Подчеркнем, что эти выводы относятся лишь к нитеобразным объектам. Нити для группы  $SU(3)$  характеризуются тем, что при обходе вокруг нити матрицы  $SU(3)$  умножаются либо на  $e^{2\pi i/3}$ , либо на  $e^{4\pi i/3} = e^{-2\pi i/3}$ . Отсюда видно, что сливаться могут либо тройки нитей одного сорта либо пары раз-



ных сортов. Если представить себе, что внутри нитей находятся фермионы и интерпретировать этот фермион, захваченный нитью, как кварк, видно, что нормальные состояния такой системы могут образовываться либо из трех кварков, либо кварка и антикварка (см. рис.).

Мы не будем выписывать уравнения для калибровочного поля, заполняющего нить, поскольку физические следствия такого заполнения такие же как и в разобранных выше случаях. Именно, напряженность поля сосредоточена внутри нити и экспоненциально затухает снаружи на длине порядка  $1/m_V$ . Масса на единицу длины уединенной нити становится конечной и имеет порядок

$$\rho \sim u_\infty^2 \log \frac{\mu}{m_V} \sim \frac{m_V^2}{g^2} \log \frac{\mu}{m_V}. \quad (5.5)$$

Логарифм возник из-за вклада в формулу (5.2) члена  $(\nabla \mathbf{n})^2$  в области  $1/\mu < x < 1/m_V$ .

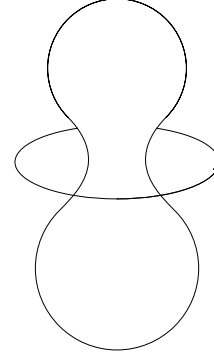


Рис.

## 6. Изомерные состояния и топология

В этом разделе мы качественно проанализируем свойства и происхождение изомерных состояний. Этот анализ необходим для понимания степени общности полученных выше результатов.

Начнем с простейшего случая — одномерного “перегиба” из разд. 2. Что мешает исчезнуть такому перегибу? Очевидно, лишь необычные граничные условия:  $\varphi(\pm\infty) = \pm\mu/\sqrt{\lambda}$ . Если бы  $\varphi(\pm\infty) = 0$ , любое отклонение  $\varphi(x)$  от постоянной было бы выгодно устранить. Из этого рассуждения ясно, что для существования экстремона необходимо наличие строгой группы симметрии (для того чтобы состояния с  $+\mu/\sqrt{\lambda}$  и  $-\mu/\sqrt{\lambda}$  имели одинаковую энергию) и наличие конденсата (иначе единственно возможное граничное условие  $\varphi(\pm\infty) = 0$ ).

Граничные условия должны быть таковы, чтобы их нельзя было непрерывной деформацией свести к тривиальным. Например, если в рассматриваемой одномерной модели поле  $\varphi(x)$  — комплексно, то, хотя формальное решение (2.3) по-прежнему существует, оно оказывается неустойчивым. Действительно, непрерывным поворотом фазы поля  $\varphi(x)$  можно свести граничные условия к тривиальным. Формально в неустойчивости можно убедиться так. В силу независимости энергии от постоянной фазы поля вариация поля  $\delta\varphi(x) = i\varepsilon\varphi_c(x)$  не меняет энергию. Поэтому имеется нулевое собственное значение у соответствующего уравнения Шредингера (ср. с рассуж-

дением разд. 2 об  $\delta\varphi = \varepsilon d\varphi_c/dx$ . Собственная функция этого значения есть  $\varphi_c(x)$  и, следовательно, где-то обращается в нуль. Поэтому есть один уровень с отрицательным собственным значением, что и означает неустойчивость экстремона (в этом случае вместо минимума имеется седло).

Рассмотрим с этой точки зрения экстремоны типа ежи. Ежи в изовекторном поле Хиггса можно трактовать как отображения единичной сферы в трехмерном пространстве на единичную сферу в изотопическом пространстве. Это отображение задается формулами (3.6). Тривиальные граничные условия соответствуют  $n = 0$  в этой формуле. Число  $n$  является определяемой в топологии “степенью отображения” [8]. Известно, что отображения разных степеней не гомотопны т.е. их нельзя непрерывно деформировать друг в друга. Этот факт объясняет устойчивость ежа.

В изоспинорном случае каждой точке единичной сферы в трехмерном пространстве сопоставляется некоторое преобразование  $SU(2)$ . Однако возникающее отображение не непрерывно, вообще говоря, по отношению к группе  $SU(2)$ , так как близким точкам сферы могут соответствовать матрицы  $SU(2)$ , отличающиеся знаками (знак изотопического спинора при сохранении изоспина есть условная величина). Поэтому полученное отображение непрерывно, если его рассматривать как отображение сферы на фактор-группу  $O(3) \propto SU(2)/Z_2$ . Из топологии известно, что новое отображение двумерной сферы на группу  $O(3)$  можно непрерывной деформацией свести к тривиальному [8]. Поэтому неудивительно, что найденное нами решение для изоспинорного ежа оказывается неустойчивым.

В самом общем случае ежи являются отображениями единичной сферы на поля Хиггса на большом расстоянии. Эти поля могут либо однозначно определять некоторое преобразование группы симметрии (как это было в изоспинорном случае), либо определять его с точностью до некоторой подгруппы (и изовекторном случае — последнее эйлерово вращение). Классификация таких отображений в каждом конкретном случае может быть полностью проведена топологическими методами (вычислением гомотопических групп).

Те же рассуждения относятся к нитевидным изомерам, только в этом случае отображается не сфера, а окружность. В этом случае нетрудно понять, что существует несколько классов неэквивалентных отображений, причем число классов равняется связности группы. Это следует прямо из определения связности. Поэтому для группы  $O(2)$  мы имеем бесконечный набор разных вихрей (они характеризуются целыми числами), для  $O(3)$  есть лишь один нетривиальный класс отображений и соответственно нити одного типа.

Для группы  $SU(3)$  нить характеризуется триальностью, могущей принимать два значения, так что при обходе вокруг нити матрицы  $SU(3)$  умножаются либо на  $e^{2\pi i/3}$ , либо на  $e^{4\pi i/3}$ .

Сказанное требует важного уточнения. Действительно, что мы имеем в виду, говоря об условности знака изоспинора? Для того чтобы разобраться в этом, рассмотрим дискретный аналог гамильтониана (3.12):

$$H = l^D \sum_{\mathbf{r}, \alpha} \left\{ \frac{1}{l^2} (\psi_{\mathbf{r}+\mathbf{a}_\alpha}^+ - \psi_{\mathbf{r}}^+) (\psi_{\mathbf{r}+\mathbf{a}_\alpha} - \psi_{\mathbf{r}}) + V(\psi_{\mathbf{r}}^+ \psi_{\mathbf{r}}) \right\}. \quad (6.1)$$

Здесь  $l$  — размер ячейки введенной нами кубической решетки,  $\mathbf{a}_{1,2,3,4}$  — базисные векторы этой решетки. После подстановки  $\psi_r = R_r \phi$ , где  $\phi$  — некоторый стандартный спинор, а  $R_r$  — матрица  $SU(2)$ , гамильтониан принимает вид

$$\begin{aligned} H &= l^D \sum_{\mathbf{r}, \alpha} \left\{ \left( \varphi^+, \frac{1}{l^2} (R_{\mathbf{r}+\mathbf{a}_\alpha}^+ - R_r)^2 \varphi \right) + V(\varphi^2) \right\} = \\ &= l^D \sum_{\mathbf{r}, \alpha} 2 \left( \varphi^+, \frac{1}{l^2} a(1 - R_r R_{\mathbf{r}+\mathbf{a}_\alpha}^+) \varphi \right) + V(\varphi^2). \end{aligned} \quad (6.2)$$

Представим теперь, что две соседние матрицы  $R_r$  отличаются знаком:  $R_{r+a} \approx -R_r$ . Ясно, что такая ситуация приводит, согласно, (6.2) к огромной энергии, обращающейся в бесконечность при  $l \rightarrow 0$ . Поэтому для гамильтониана (6.2) граничные условия (5.3) недоступны, и изомерные нити отсутствуют.

Однако переход от непрерывного гамильтониана (3.12) к решеточному неоднозначен. Рассмотрим вместо (6.2) выражение

$$\tilde{H} = l^D \sum_{\mathbf{r}, \alpha} \frac{1}{l^2} \{ \varphi^+ [4 - (R_{\mathbf{r}} R_{\mathbf{r}+\mathbf{a}_\alpha}^+ + R_{\mathbf{r}+\mathbf{a}_\alpha} R_{\mathbf{r}}^+)^2] \varphi + V(\varphi^+ \varphi) \}. \quad (6.3)$$

В непрерывном пределе

$$R_{\mathbf{r}+\mathbf{a}_\alpha} \approx R_{\mathbf{r}} + l \partial R / \partial \mathbf{r}_\alpha + (1/2) l^2 \partial^2 R / \partial \mathbf{r}_\alpha^2. \quad (6.4)$$

Подстановка (6.4) в (6.3) и интегрирование по частям с учетом условия  $R^+ R = 1$  дают правильный гамильтониан (3.12). Но в решеточном гамильтониане (6.3) граничное условие  $R_{\mathbf{r}+\mathbf{a}_\alpha} \approx -R_r$  вполне допустимо!

Таким образом, вопрос о возможности неабелевых нитевых изомеров неожиданно оказывается связанным со структурой теории на сверхмалых расстояниях. Мы можем лишь утверждать, что существует такой способ продолжения теории в эту область, при котором неабелевы нитевые изомеры должны возникать.

Последний вопрос, который мы хотели бы обсудить в связи с изомерными состояниями, это автоматическое появление новых законов сохранения. Рассмотрим одномерную модель и покажем, что четность числа имеющихся экстремонов сохраняется. Действительно, пусть сталкиваются две нормальные частицы. Может ли образоваться один экстремон? Ясно, что для этого потребуется бесконечное время,

поскольку в бесконечной области пространства необходимо перевести поле из состояния с  $\bar{\varphi} = -\mu/\sqrt{\lambda}$  в состояние с  $\bar{\varphi} = +\mu/\sqrt{\lambda}$ . Этот подбарьерный переход имеет вероятность  $\sim e^{-\infty} = 0$ . В то же время ничто не мешает родиться паре экстремонов, поскольку для этого нужно осуществить переброску поля лишь в конечной области.

Обобщая этот результат, можно сказать, что степень отображения пространства на группу внутренней симметрии есть величина сохраняющаяся. В частности, сохраняется магнитный заряд ежа. Мы будем называть такие квантовые числа топологическими.

Формальное обоснование сказанного можно получить, записав амплитуду перехода в виде

$$A \sim \int D\varphi(x, t) e^{iS},$$

где  $S$  — классическое действие. Интегрирование следует вести по таким  $\varphi(x, t)$ , что  $\varphi$  при  $t \rightarrow -\infty$  описывает ежа, а  $\varphi(x, t)$  при  $t \rightarrow +\infty$  описывает его продукты распада. Однако в силу топологической неэквивалентности  $\varphi_{\text{in}}(x, t)$  и  $\varphi_{\text{out}}(x, t)$  не существует непрерывной по времени траектории  $\varphi(x, t)$ , соединяющей эти состояния. Поэтому для любого  $\varphi(x, t)$  действие  $S = \infty$ .

Заманчиво предположить, что все существующие в природе законы сохранения носят топологический характер, но в настоящее время я не знаю, как реализовать такую возможность.

Следует заметить, что в принципе могут существовать и нетопологические экстремоны. Геометрическая картина может быть такой, как изображена на рисунке. Как видно из рисунка, линия, перетягивающая гантелю, имеет минимальную длину, однако, передвигая вверх, ее можно стянуть в точку. Мы не знаем, существуют ли классические решения такого типа. Если бы они существовали, то, как заметил Л.Б. Окунь, они являлись бы метастабильными состояниями.

Я глубоко признателен В.Л. Берлинскому, А.Н. Вайнштейну, Я.Б. Зельдовичу, Л.Б. Окуню, Л.Д. Фаддееву и Л.С. Шварцу за важные обсуждения, прояснившие многие не ясные автору вопросы. Мне приятно, кроме того, поблагодарить Я.Г. Синая за его наглядные разъяснения основных понятий топологии.

## Приложение А

### Устойчивость ежей

Покажем, что экстремаль (3.7) функционала (3.3) является минимумом. Рассмотрим первую и вторую вариации функционала

$$F = \int \{(\nabla \mathbf{n})^2 + \rho(x) \mathbf{n}^2\} d\Omega, \quad (\text{A.1})$$

где  $\rho(x)$  — множитель Лагранжа. Из условия  $\delta F = 0$  находим

$$\nabla^2 \mathbf{n} = \rho(x) \mathbf{n}. \quad (\text{A.2})$$

Подставляя  $\mathbf{n}$  в виде (3.7), находим, что  $\rho = -2$ . Теперь следует изучить собственные значения второй вариации:

$$\delta^2 F = \int \{(\nabla \delta \mathbf{n})^2 - 2(\delta \mathbf{n})^2\} d\Omega, \quad (\text{A.3})$$

$$\nabla^2 \delta \mathbf{n} + 2\delta \mathbf{n} = -\lambda \delta \mathbf{n} \quad (\text{A.4})$$

при условии, что  $(\mathbf{n} \delta \mathbf{n}) = 0$ . Очевидно, что условие устойчивости есть  $\lambda \geq 0$ . Из (A.4) находим

$$\lambda = l(l+1) - 2,$$

где  $l \geq 1$ . Последнее ограничение возникает из-за того, что при  $l = 0$  вариации  $\delta \mathbf{n} = \text{const}$  и следовательно,  $(\mathbf{n} \delta \mathbf{n}) \neq 0$ . Нулевое собственное значение с  $l = 1$  соответствует возможности поворота ежа как целого.

Покажем теперь неустойчивость решения для изоспинорного поля Хиггса. В этом случае выражение (3.14) можно переписать согласно (5.2):

$$F = \sum_{\alpha=1}^4 \int d\Omega (\nabla \nu_{\alpha})^2, \quad (\text{A.5})$$

где  $\nu_{\alpha}$  — единичный вектор в четырехмерном пространстве. Легко проверить, что множитель Лагранжа, соответствующий решению (3.15), снова есть  $-2$ . Это приводит к уравнению (A.4) для  $\delta \nu_{\mu}$ . Однако теперь  $l = 0$  допустимо, поскольку решение (3.15) соответствует

$$\nu_i = \frac{x_i}{r}, \quad \nu_4 = 0$$

и, выбрав  $\delta \nu_i = 0$ ,  $\delta \nu_4 = \text{const}$ , мы удовлетворяем условию

$$\sum \nu_{\mu} \delta \nu_{\mu} = 0.$$

Таким образом, имеется собственное значение  $\lambda = -1$ , что и означает неустойчивость.

## Приложение Б

Покажем, что если отождествить безмассовую компоненту векторного поля с фотоном, еж несет магнитный заряд. Перейдем к калибровке, в которой поле Хиггса на бесконечности направлено вдоль третьей оси. Для этого необходимо проделать поворот в изопространстве, характеризующийся углами Эйлера:

$$\alpha = \varphi, \quad \beta = \theta, \quad \gamma = \gamma(r, \theta, \varphi) \quad (\text{Б.1})$$

(последний угол Эйлера, разумеется, произволен, это поворот вектора вокруг себя). Рассмотрим величину

$$A_\mu^3 = (\psi A_\mu)/|\psi|. \quad (\text{Б.2})$$

До поворота, как видно из (3.8) и (4.3),  $A_\mu = 0$ . После поворота  $A_\mu$  меняется, так как к  $A_\mu$  добавляется член  $\text{Sp } \tau_3 R^+ \partial R / \partial x_\mu$ . Таким образом после поворота

$$A_\mu^3 = \text{Sp } \tau_3 R^+ \frac{\partial R}{\partial x_\mu}. \quad (\text{Б.3})$$

Пользуясь (Б.3) и известным выражением  $R$  через углы Эйлера, находим

$$A_\mu^3 = \nabla_\mu \gamma + \cos \beta \nabla_\mu \alpha. \quad (\text{Б.4})$$

Переходя к сферическим координатам, находим из (Б.4) и (Б.1)

$$A_\varphi = \left( \frac{\partial \gamma}{\partial \varphi} + \cos \theta \right) \frac{1}{r \sin \theta}, \quad A_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \gamma}{\partial \theta}, \quad A_r = \frac{\partial \gamma}{\partial r}. \quad (\text{Б.5})$$

Магнитное поле, соответствующее потенциалу (Б.5), есть

$$H = -1/r^2. \quad (\text{Б.6})$$

Потенциал Дирака получается из (Б.5), если выбрать  $\gamma = -\varphi$ . При этом нить Дирака направлена против оси  $z$ .

Замечательно, что формула (Б.6) верна даже на малых расстояниях. Но, разумеется, магнитное поле приобретает физический смысл лишь вдали от ежа, где на пробную частицу не действуют заряженные компоненты поля Янга–Миллса. Кроме того, эти компоненты действуют внутри нити и потенциал (Б.5) справедлив только вдали от нити.

## Литература

1. *Nielsen N., Olesen P.*, Nucl. Phys., **B61**, 45, 1973.
2. *Lee T., Wick G.*, Columbia preprint, 1974. *Зельдович Я., Кобзарев И., Окунь Л.*, Препринт ИПМ-15, 1974.
3. *Фаддеев Л., Тахтаджан Л.*, УМН, 29, 3, 1974. *Фаддеев Л.*, Препринт МРІ-РАЕ/16, 1974; Письма в ЖЭТФ, **21**, 41, 1973.
4. *Поляков А.М.*, Письма в ЖЭТФ, **20**, 430, 1974.
5. *Баренблат Г., Зельдович Я.*, ДАН СССР, **130**, 115, 1959.
6. *Hoofdt G.*, Preprint CERN TH-1876, 1974.
7. *Анисимов С., Дзялошинский И.*, ЖЭТФ, **61**, 1890, 1971.
8. *Милнор Д., Уоллес Д.*, Дифференциальная топология, М., 1973.

## ПСЕВДОЧАСТИЧНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ЯНГА–МИЛЛСА

Белавин А.А., Поляков А.М., Тюпкин Ю.С.  
и Шварц А.С.

Phys. Lett. **59B** (1975). P. 85–87

Найдены регулярные решения четырехмерных евклидовских уравнений Янга–Миллса. Эти решения локально минимизируют интегралы действия, которые оказываются конечными. Обсуждается топологическая природа найденных решений.

В предыдущей статье одного из авторов [1] была показана важность псевдочастичных решений уравнений калибровочного поля для инфракрасной проблемы. Под “псевдочастичными” решениями мы понимаем протяженные поля  $A_\mu$ , которые локально минимизируют Янг–Миллсовское действие  $S$  и для которых  $S(A) < \infty$ . Пространство предполагается евклидовским и четырехмерным. В настоящей статье нами найдено такое решение. Начнем с топологического рассмотрения, из которого следует существование искомых решений.

Интересующие нас поля удовлетворяют условию

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu] \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0. \quad (1)$$

Рассмотрим достаточно большую сферу  $S^3$  в нашем четырехмерном пространстве. Сама сфера, конечно, трехмерная. Из (1) следует, что

$$A_\mu|_{S^3} \approx g^{-1}(x) \frac{\partial g(x)}{\partial x_\mu} \Big|_{S^3}, \quad (2)$$

где  $g(x)$  — матрицы из калибровочной группы. Поэтому каждое поле  $A_\mu(x)$  задает некоторое отображение сферы  $S^3$  в калибровочную группу  $G$ . Ясно, что если два таких отображения принадлежат разным гомотопическим классам, то соответствующие поля  $A_\mu^{(1)}$  и  $A_\mu^{(2)}$  не могут быть непрерывно деформированы друг в друга. Хорошо известно, что существует бесконечное множество различных гомотопических классов отображений  $S^3 \rightarrow G$ , если  $G$  является неабелевой простой группой Ли. Следовательно, фазовое пространство полей Янга–Миллса разделено на бесконечное множество компонент, причем каждый из них характеризуется некоторой величиной  $q$ , где  $q$  — целое число.

Наша идея заключается в отыскании абсолютного минимума для интеграла действия заданного компонента фазового пространства.

Для этого нам необходима формула, выражающая целое число  $q$  через поле  $A_\mu$ <sup>1)</sup>. Легко проверить, что

$$q = \frac{1}{8\pi^2} \epsilon_{\mu\nu\lambda\gamma} \text{Sp} \int F_{\mu\nu} F_{\lambda\gamma} d^4x. \quad (3)$$

Чтобы доказать формулу (3), воспользуемся следующим тождеством:

$$\begin{aligned} \epsilon_{\mu\nu\lambda\gamma} \text{Sp} F_{\mu\nu} F_{\lambda\gamma} &= \partial_\alpha J_\alpha, \\ J_\alpha &= \epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} \text{Sp} (A_\beta (\partial_\gamma A_\delta + \frac{2}{3} A_\gamma A_\delta)). \end{aligned} \quad (4)$$

Из (4) следует:

$$q = \frac{1}{8\pi^2} \oint_{S^3} J_\alpha d^3\sigma^\alpha = \frac{1}{8\pi^2} \frac{4}{3} \epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} \oint_{S^3} \text{Sp} (A_\beta A_\gamma A_\delta) d^3\sigma_\alpha, \quad (5)$$

где

$$A_\mu = g^{-1}(x) \partial g / \partial x_\mu. \quad (6)$$

Теперь рассмотрим случай  $G = \text{SU}(2)$ . В этом случае ясно, что

$$d\mu(g) = \text{Sp} (g^{-1} dg \wedge g^{-1} dg \wedge g^{-1} dg) \quad (7)$$

есть в точности инвариантная мера на этой группе, так как это выражение является инвариантной дифференциальной формой нужной размерности. Смысл обозначения состоит в следующем. Пусть  $g(\xi_1 \xi_2 \xi_3)$  — некоторая параметризация группы  $\text{SU}(2)$ , например, при помощи углов Эйлера. Тогда инвариантная мера задается формулой

$$d\mu = \text{Sp} \left( g^{-1} \frac{\partial g}{\partial \xi_1} g^{-1} \frac{\partial g}{\partial \xi_2} g^{-1} \frac{\partial g}{\partial \xi_3} \right) d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3. \quad (8)$$

Сравнивая (8) с (5), мы видим, что подынтегральное выражение в (5) является в точности якобианом отображения  $S^3$  в  $\text{SU}(2)$ . Следовательно число  $q$  показывает, сколько раз группа  $\text{SU}(2)$  покрывается при нашем отображении. Это и есть определение степени отображения. В случае произвольной группы  $G$  следует рассмотреть отображение  $S^3$  на ее  $\text{SU}(2)$ -подгруппу и повторить вышесказанное. Имеет место важное неравенство, которое будет применяться далее. Рассмотрим следующее соотношение:

$$\text{Sp} \int (F_{\mu\nu} - \tilde{F}_{\mu\nu})^2 d^4x \geq 0, \quad (9)$$

где  $\tilde{F}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\lambda\gamma} F_{\lambda\gamma}$ . Из (9) и (3) следует, что

$$E \geq 2\pi^2 |q|, \quad (10)$$

---

<sup>1)</sup> Выражения типа (3) известны в топологии как “классы Понтрягина”.



где

$$S(A) \equiv E(A)/g^2$$

и  $g^2$  является константой связи.

Формула (10) дает нижнюю границу для действия инстантонов в каждом гомотопическом классе. Теперь мы покажем, что для  $q = 1$  эта граница достигается. Иными словами, можно отыскать решение уравнения, которое заменяет собой обычное уравнение Янга–Миллса:

$$\begin{aligned} F_{\alpha\beta} &= \pm \frac{1}{2} \epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} F_{\gamma\delta}, \\ F_{\alpha\beta} &= \partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha + [A_\alpha A_\beta]. \end{aligned} \quad (11)$$

Снова достаточно рассмотреть случай  $G = \text{SU}(2)$ . В этом случае удобно, хотя и не обязательно, расширить эту группу до  $\text{SU}(2) \times \text{SU}(2) \approx \text{O}(4)$ . Калибровочные поля для  $\text{O}(4)$  имеют вид  $A_\mu^{\alpha\beta}$ , где поле  $A_\mu$  антисимметрично относительно  $\alpha\beta$ . Калибровочное поле для группы  $\text{SU}(2)$  связано с полем  $A_\mu^{\alpha\beta}$  при помощи формулы

$$A_\mu^i = \frac{1}{2} \left( A_\mu^{0i} \pm \frac{1}{2} \epsilon_{ikl} A_\mu^{kl} \right). \quad (12)$$

Теперь два уравнения

$$F_{\mu\nu}^i = \pm \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\lambda\gamma} F_{\lambda\gamma}^i$$

эквивалентны уравнению

$$\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} F_{\mu\nu}^{\gamma\delta} = \epsilon_{\mu\nu\lambda\gamma} F_{\lambda\gamma}^{\alpha\beta}. \quad (13)$$

Рассмотрим решение уравнения (13), которое инвариантно при одновременном вращении  $x$ -пространства и изотопического пространства. Единственная возможность состоит в следующем:

$$A_\mu^{\alpha\beta} = f(\tau) (x_\alpha \delta_{\mu\beta} - x_\beta \delta_{\mu\alpha}). \quad (14)$$

Легко вычислить  $F$ :

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu}^{\alpha\beta} &= (2f - \tau^2 f^2) (\delta_{\mu\alpha} \delta_{\nu\beta} - \delta_{\mu\beta} \delta_{\nu\alpha}) + \\ &+ (f'/\tau + f^2) (x_\alpha x_\mu \delta_{\nu\beta} - x_\alpha x_\nu \delta_{\mu\beta} + x_\beta x_\nu \delta_{\mu\alpha} - x_\beta x_\mu \delta_{\nu\alpha}). \end{aligned} \quad (15)$$

Очевидно, что первая тензорная структура в (15) удовлетворяет уравнению (13), в то время как следующая — не удовлетворяет. Поэтому мы должны положить

$$f'/\tau + f^2 = 0, \quad f(\tau) = \frac{1}{\tau^2 + \lambda^2}, \quad (16)$$

где  $\lambda$  — произвольный масштаб. Действие  $E$  равно

$$E = \frac{1}{4} \text{Sp} \int \pm F_{\mu\nu}^2 d^4x = \frac{1}{32} \text{Sp} \int (F_{\mu\nu}^{\alpha\beta})^2 d^4x = 2\pi^2. \quad (17)$$

Сравнение (17) и (10) показывает, что мы нашли абсолютный минимум для  $q = 1$ .

Другое представление для решения (14) дается формулами

$$\begin{aligned} A_\mu &= \frac{\tau^2}{\tau^2 + \lambda^2} g^{-1}(x) \frac{\partial g(x)}{\partial x_\mu}, \\ g(x) &= (x_4 + i \mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\sigma}) (x_4^2 + \mathbf{x}^2)^{-1/2}, \\ g^\dagger g &= 1, \quad \tau^2 = x_4^2 + \mathbf{x}^2 \end{aligned} \quad (18)$$

( $\boldsymbol{\sigma}$  — матрицы Паули).

Чтобы получить псевдочастичное решение для произвольной группы  $G$ , следует рассмотреть ее подгруппу  $SU(2)$ , для которой  $A_\mu$  задается согласно (18), а все остальные матричные элементы  $A_\mu$  полагаются равными нулю.

Как видно из масштабной инвариантности, наше решение содержит произвольный масштаб  $\lambda$ . Следовательно, эти поля являются крупномасштабными и потому существенны в инфракрасной проблеме.

Нам не известно, существует ли решение уравнения (13) с  $q > 1$ . Можно было бы, конечно, рассмотреть несколько псевдочастиц с  $q = 1$ . Однако мы не знаем, притягиваются ли они друг к другу и образуют псевдочастицу с  $q > 1$  или же существует отталкивание и стабильной псевдочастицы не существует.

Один из нас (А.М.П.) выражает благодарность С.П. Новикову за пояснение некоторых топологических идей.

## Литература

1. *Polyakov A.M.*, Phys. Lett. **59B** (1975) 82.

# МЕТАСТАБИЛЬНЫЕ СОСТОЯНИЯ ДВУМЕРНОГО ИЗОТРОПНОГО ФЕРРОМАГНЕТИКА

Белавин А.А., Поляков А.М.

Письма в ЖЭТФ. 1975. Т. 22. С. 503–506

Найдены метастабильные неоднородные состояния ферромагнетика Гейзенберга, которые могут создать конечную корреляционную длину при сколь угодно низких температурах.

Хорошо известно, что в двумерном ферромагнетике с непрерывной симметрией выстраивание спинов отсутствует при какой угодно низкой температуре  $T$ . Тем не менее считается [1], что фазовый переход в этой системе может происходить за счет того, что основное состояние при  $T \rightarrow 0$  является вырожденным. Это приводит к возникновению спиновых волн — голдстоунов и бесконечному радиусу корреляции. Однако это рассуждение не учитывает явления, которое может сделать корреляционный радиус конечным [2]. Рассмотрим классический ферромагнетик Гейзенберга, так как интересующие нас длинноволновые флуктуации не зависят от квантовых эффектов.

Предположим, что мы вычисляем некоторую корреляционную функцию спинов  $\mathbf{n}(x)$ . Усреднение происходит по всем возможным полям с весом

$$\exp(-H/T). \quad (1)$$

Если температура  $T \rightarrow 0$ , то существенную роль в усреднении играют поля, близкие к осуществляющим локальные минимумы энергии (основное и метастабильные состояния)

$$\delta H = 0. \quad (2)$$

Обычно учитывается тривиальный минимум

$$\mathbf{n}_0(x) = \text{const}$$

и поля, мало отклоняющиеся от  $\mathbf{n}_0(x)$ . Но если существуют другие решения (2) с конечной энергией  $H = E$  (псевдочастицы), их также необходимо учитывать по следующей причине. Решения уравнения (2) с конечной энергией в двумерном случае не зависят от масштаба. Поэтому, хотя среднее расстояние между такими псевдочастицами при малых  $T$  велико ( $r_{\text{ср}} \sim a \exp(E/T)$ ,  $a$  — шаг решетки), их радиус из-за масштабной инвариантности того же порядка величины. Существование таких случайных неоднородностей приводит к тому, что корреляция спинов на расстоянии  $R > r_{\text{ср}}$  исчезает.

В этой статье мы обнаружим существование нетривиальных решений (2) для двумерного ферромагнетика с числом компонентов спина  $n^a(x)$  равным трем. Начнем с топологического обсуждения, которое докажет существование таких решений. Подобное рассмотрение поля единичного вектора и выражение для степени отображения содержится в работах [3], [4]. Однако решения со степенями отображения, большими единицы, этими авторами не изучались. Спиновое поле описывается трехкомпонентным единичным вектором  $\mathbf{n}(x)$  с взаимодействием

$$H = \int \sum_{a=1}^3 (\nabla n^a)^2. \quad (3)$$

Значения  $n(x)$  можно считать точкой на трехмерной сфере  $S^2(\mathbf{n}) = (\cos \theta, \sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi)$ . Интересующие нас поля удовлетворяют условию, которое следует из конечности энергии

$$\mathbf{n}(x) \rightarrow (1, 0, 0) \quad \text{при} \quad |x| \rightarrow \infty. \quad (4)$$

Последнее означает, что плоскость  $x$ , на которой заданы спины, топологически эквивалентна другой сфере  $S^2$ , а поле  $\mathbf{n}(x)$  производит отображение сферы  $\tilde{S}^2 \rightarrow S^2$ . Ясно, что если два отображения  $\mathbf{n}(x)$  и  $\mathbf{n}_1(x)$  принадлежат к различным гомотопическим классам, они не могут быть непрерывно деформированными одно в другое. Хорошо известно, что существует бесконечное число различных классов отображений  $\tilde{S}^2 \rightarrow S^2$ . Следовательно, фазовое пространство спиновых полей разбивается на бесконечное число компонент, каждый из которых характеризуется определенным целым числом  $q$  — степенью отображения. Далее будут найдены минимумы энергии в каждом компоненте фазового пространства. Чтобы сделать это, выразим степень отображения через поле  $\mathbf{n}(x)$ :

$$q = \frac{1}{8\pi} \int \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \epsilon_{\mu\nu} n^\alpha \frac{\partial n^\beta}{\partial x_\mu} \frac{\partial n^\gamma}{\partial x_\nu} d^2x. \quad (5)$$

Это равенство нетрудно доказать, перейдя к сферическим координатам. Тогда получим для степени отображения

$$q = \frac{1}{4\pi} \int \sin \theta(x) d\theta(x) d\phi(x). \quad (6)$$

Следовательно,  $q$  — есть число раз, которое сфера  $S^2$  покрывается при отображении<sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> Поля с большим числом компонентов  $k > 3$  производят отображения  $\tilde{S}^2 \rightarrow S^{k-1}$ . Известно, что все такие отображения стягиваются к тривиальному. Поэтому минимумов, подобных найденным ниже, в этом случае не существует.

Существует важное неравенство

$$\left( \frac{\partial n^\alpha}{\partial x_\mu} - \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \epsilon_{\mu\nu} n^\beta \frac{\partial n^\gamma}{\partial x_\nu} \right)^2 \geq 0. \quad (7)$$

Из (7) и (5) следует, что

$$H = \int \left( \frac{\partial n^\alpha}{\partial x_\mu} \right)^2 d^2x \geq 8\pi q. \quad (8)$$

Формула (8) дает нижние значения энергии метастабильных состояний в каждом гомотопическом классе. Уравнения, которым удовлетворяют эти состояния, имеют вид

$$\frac{\partial n^\alpha}{\partial x_\mu} = \epsilon_{\mu\nu} \epsilon_{\alpha\beta\gamma} n^\beta \frac{\partial n^\gamma}{\partial x_\nu}. \quad (9)$$

Чтобы увидеть смысл (9), удобно ввести следующие независимые переменные:

$$\begin{aligned} w_1 &= \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} \cos \phi, \\ w_2 &= \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} \sin \phi, \\ w &= w_1 + iw_2 = \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} e^{i\phi}. \end{aligned} \quad (10)$$

Тогда из (9) следует

$$\frac{\partial w_1}{\partial x_1} = \frac{\partial w_2}{\partial x_2}; \quad \frac{\partial w_2}{\partial x_1} = -\frac{\partial w_1}{\partial x_2}. \quad (11)$$

В (11) мы узнаем условия Коши–Римана. Их общее решение есть

$$w = w_1 + iw_2 = f(z), \quad \text{где } z = x_1 + ix_2. \quad (12)$$

Поскольку распределение спинов должно быть непрерывной функцией координат, то единственными особенностями функции  $f$  являются полюсы. Таким образом поле соответствующее метастабильному состоянию с данной энергией  $8\pi q$  и граничным условием (4) имеет вид

$$w \equiv \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} e^{i\phi} = \prod_i \left( \frac{z - z_i}{\lambda} \right)^{m_i} \prod_j \left( \frac{\lambda}{z - z_j} \right)^{n_j}, \quad (13)$$

где

$$\sum m_i > \sum n_j.$$

Степень отображения  $q$  есть число прообразов точки  $w(r)$ , т.е. число решений уравнения (13), выражающих  $z$  через  $w$ , откуда

$$q = \sum m_j. \quad (14)$$

Выражение (13) можно получить также из известного решения [3, 4] со степенью отображения  $q = 1$ , если воспользоваться конформной инвариантностью гамильтониана (3), имеющейся в двумерном случае.

Таким образом мы показали, что ферромагнетик обладает неоднородными метастабильными состояниями. По-видимому, это означает, что в системе даже при очень низких температурах имеется конечная длина корреляции и отсутствует фазовый переход.

Количественное влияние метастабильных состояний на низкотемпературную асимптотику корреляционных функций мы надеемся рассмотреть в последующих работах.

Мы благодарны С. Хохлачеву, который обратил наше внимание на конформную инвариантность (3). Один из нас (А.Б.) благодарит Д. Бурланкова за обсуждения.

### Литература

1. Березинский В., ЖЭТФ, 59, 907, 1970; 61, 1144, 1971.
2. Поляков А.М., Phys. Lett., в печати, 1975.
3. Skyrme T., Proc. Roy. Soc., 262, 237, 1961.
4. Фаддеев Л.Д., Препринт МРІ-РАЕ/16, 1974.

# КВАНТОВЫЕ ФЛУКТУАЦИИ ИНСТАНТОНОВ В НЕЛИНЕЙНОЙ $\sigma$ -МОДЕЛИ

Фатеев В.А., Фролов И.В. и Шварц А.С.

Nuclear Physics. **B154** (1979). P. 1–20

Полностью решена задача о квантовых флуктуациях инстантонов в двумерной нелинейной  $O(3)$   $\sigma$ -модели. Вычисление вклада инстантонов сводится к изучению кулоновского газа. Показано, что при учете вклада инстантонов с произвольными топологическими зарядами инфракрасные расходимости устраняются.

## 1. Введение

Некоторые свойства двумерной нелинейной  $\sigma$ -модели (или непрерывного классического двумерного ферромагнетика Гейзенберга) близки к свойствам четырехмерной неабелевой калибровочной теории. В частности, обе они масштабно инвариантны и асимптотически свободны. В обеих имеются точные мультиинстантонные решения.

Так как нелинейная двумерная  $\sigma$ -модель существенно проще четырехмерной теории Янга–Миллса, то первая из них является идеальным “полигоном” для изучения инстантонных эффектов в четырехмерных калибровочных теориях.

Целью настоящей работы является вычисление инстантонного вклада в гриновские функции нелинейной  $\sigma$ -модели. Рассматриваемая модель описывается лагранжианом

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2f} \sum_{a=1}^3 \partial_\mu \sigma^a \partial_\mu \sigma^a,$$

где  $\sigma^a(x_0, x_1)$  является трехкомпонентным единичным вектором:

$$\sum_{a=1}^3 \sigma^a \sigma^a = 1; \quad \mu = 0, 1.$$

Евклидовы гриновские функции в модели представляются в виде

$$\int \phi(\sigma) \exp(-S) \prod d\sigma(x) \bigg/ \int \exp(-S) \prod d\sigma(x), \quad (1.1)$$

где  $\phi(\sigma)$  является любым функционалом и  $S$  — евклидово действие:

$$S = \frac{1}{2f} \int \sum_{a=1}^3 (\partial_\mu \sigma^a)^2 d^2 x. \quad (1.2)$$

Функциональный интеграл (1.1) может быть вычислен в пределе слабой связи при помощи метода перевала. Чтобы применить этот метод, мы должны знать экстремали евклидова действия (1.2), т.е. инстантоны. Эти инстантоны были открыты в [1].

При описании инстантонов удобно ввести новые полевые и пространственные переменные. Именно, мы используем комплексную переменную  $z = x_0 + i x_1$  вместо пространственной и временной координат  $x_1, x_0$  и поле

$$w = \frac{\sigma^1 + i \sigma^2}{1 + \sigma^3}, \quad (1.3)$$

построенное из единичного поля  $(\sigma^1, \sigma^2, \sigma^3)$  при помощи стереографической проекции.

В терминах этих переменных

$$S = \frac{4}{f} \int (1 + |w|^2)^{-2} (\partial_z w \partial_{\bar{z}} \bar{w} + \partial_{\bar{z}} w \partial_z \bar{w}) d^2 x, \quad (1.4)$$

где

$$\partial_z = \frac{1}{2} (\partial_x - i \partial_y), \quad \partial_{\bar{z}} = \frac{1}{2} (\partial_x + i \partial_y), \quad d^2 x = \frac{1}{2} i dz d\bar{z}.$$

Топологический заряд

$$q = \frac{1}{\pi} \int (1 + |w|^2)^{-2} (\partial_z w \partial_{\bar{z}} \bar{w} - \partial_{\bar{z}} w \partial_z \bar{w}) d^2 x \quad (1.5)$$

является целым числом для любой конфигурации поля, имеющей конечное евклидово действие. (Подинтегральное выражение в (1.5) может рассматриваться как якобиан отображения  $\sigma$   $z$ -плоскости на двумерную сферу  $S^2$ , при этом величина  $q$  есть степень этого отображения.)

Из (1.4) и (1.5) следует, что

$$S = \frac{4\pi}{f} q + \frac{8}{f} \int (1 + |w|^2)^{-2} |\partial_{\bar{z}} w|^2 d^2 x. \quad (1.6)$$

Отсюда видно, что минимальное значение действия  $S$  на полях с топологическим зарядом  $q \geq 0$  равно  $(4\pi/f)q$ ; это значение достигается на полях, удовлетворяющих уравнению  $\partial_{\bar{z}} w = 0$ . Поэтому поле

$$v(z) = P_0(z)/P_1(z), \quad (1.7)$$

где  $P_0(z), P_1(z)$  — полиномы, является инстантоном. Топологический заряд инстантона (1.7) равен максимальной степени полиномов  $P_0(z)$ ,