

А.П. РЯБУШКО

ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ

$$F(p) = L[f(t)] = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-pt} dt$$

$$P(A) = \frac{m}{n}$$



А.П. РЯБУШКО

ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ

Допущено
Министерством образования Республики Беларусь
в качестве учебного пособия для студентов
учреждений высшего образования
по техническим специальностям

**В четырех частях
Часть 4**

**Операционное исчисление.
Элементы теории устойчивости.
Теория вероятностей.
Математическая статистика**

4-е издание



Минск
«Вышэйшая школа»

УДК 51(076.1)(075.8)

ББК 22.1я73

Р98

Рецензенты: кафедра высшей математики № 1 Белорусского национального технического университета; доктор физико-математических наук, профессор кафедры математического моделирования и анализа данных Белорусского государственного университета *Е.Е. Жук*

Все права на данное издание защищены. Воспроизведение всей книги или любой ее части не может быть осуществлено без разрешения издательства.

Рябушко, А. П.

Р98

Индивидуальные задания по высшей математике. В 4 ч.
Ч. 4. Операционное исчисление. Элементы теории устойчивости. Теория вероятностей. Математическая статистика : учеб. пособие / А. П. Рябушко. — 4-е изд. — Минск : Выш. шк., 2013. — 336 с. : ил.

ISBN 978-985-06-2231-0.

Это четвертая, заключительная, книга комплекса учебных пособий по курсу высшей математики, направленных на развитие и активизацию самостоятельной работы студентов технических вузов. Содержатся теоретические сведения и наборы задач для аудиторных и индивидуальных заданий.

Предыдущее издание вышло в 2009 г.

Для студентов технических специальностей вузов. Будет полезно студентам экономических специальностей, а также преподавателям вузов, колледжей и техникумов.

УДК 51(076.1)(075.8)

ББК 22.1я73

Учебное издание

Рябушко Антон Петрович

ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ

В четырех частях

Часть 4

Операционное исчисление. Элементы теории устойчивости.

Теория вероятностей. Математическая статистика

Учебное пособие

Редактор *Е.В. Малышева*. Художественный редактор *В.А. Ярошевич*.

Технический редактор *Н.А. Лебедевич*. Корректор *В.И. Аверкина*.

Набор и компьютерная верстка *Ю.Л. Шibaевой*.

Подписано в печать 05.02.2013. Формат 84×108/32. Бумага для офсетной печати. Гарнитура «Ньютон». Усл. печ. л. 17,64. Уч.-изд. л. 17,02. Тираж 1500 экз. Заказ 411.

Республиканское унитарное предприятие «Издательство “Вышэйшая школа”».

ЛИ № 02330/0494062 от 03.04.2009. Пр. Победителей, 11, 220048, Минск

e-mail: market@vshph.com <http://vshph.com>

Республиканское унитарное предприятие «Издательство “Белорусский Дом печати”».

ЛП № 02330/0494179 от 03.04.2009. Пр. Независимости, 79, 220013, Минск.

ISBN 978-985-06-2231-0

© Рябушко А.П., 2006

© Рябушко А.П., 2007, с изменениями

© Оформление. УП «Издательство
“Вышэйшая школа”», 2007

ПРЕДИСЛОВИЕ

Предлагаемая вниманию читателя книга завершает комплекс учебных пособий под общим названием «Индивидуальные задания по высшей математике». Он написан в соответствии с действующими программами курса высшей математики в объеме 380—450 часов для инженерно-технических специальностей вузов. Комплекс может быть использован также в вузах других профилей, в которых количество часов, отведенное на изучение высшей математики, значительно меньше. (В последнем случае из предлагаемого материала рекомендуется сделать необходимую выборку.) Кроме того, он вполне доступен для студентов вечерних и заочных отделений вузов.

Данный комплекс пособий адресован преподавателям и студентам и предназначен для проведения практических аудиторных занятий, самостоятельных (мини-контрольных) работ и выдачи индивидуальных домашних заданий по всем разделам курса высшей математики.

С целью минимизации затрат времени при изучении предмета перед аудиторными и индивидуальными домашними заданиями приводятся необходимые определения, формулы, примеры с решениями, а после каждого индивидуального задания — решение типового варианта. К большинству предлагаемых задач даны ответы.

В четвертой книге комплекса содержится материал по операционному исчислению, элементам теории устойчивости, теории вероятностей, математической статистике. Ее структура аналогична структуре первых трех книг, а нумерация глав, параграфов и рисунков продолжает соответствующую нумерацию. В приложениях приведены таблицы оригиналов и их изображений, значений функций распределения, используемых в теории вероятностей и математической статистике, а также двухчасовая контрольная работа для блочных экзаменов.

Главы 18 и 19 данного пособия содержат исправленный и дополненный материал учебного пособия «Сборник индивидуальных заданий по теории вероятностей и математической статистике» авторов А.П. Рябушко, В.В. Бархатова,

В.В. Державец, И.Е. Юртыя под общей редакцией профессора А.П. Рябушко, выпущенного издательством «Вышэйшая школа» в 1992 г.

Автор выражает искреннюю благодарность рецензентам – коллективу кафедры высшей математики № 1 Белорусского национального технического университета, возглавляемому доктором технических наук, профессором Н.А. Микуликом, и доктору физико-математических наук, профессору кафедры математического моделирования и анализа данных Белорусского государственного университета Е.Е. Жуку – за ценные замечания и советы, способствовавшие улучшению книги.

Все отзывы и пожелания просьба направлять по адресу: издательство «Вышэйшая школа», пр. Победителей, 11, 220048, Минск.

Автор

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ

Охарактеризуем структуру пособия, методику его использования, организацию проверки и оценки знаний, навыков и умений студентов.

Весь практический материал по курсу высшей математики разделен на главы, в каждой из которых даются необходимые теоретические сведения (основные определения, формулировки теорем, формулы), используемые при решении задач и выполнении упражнений. Изложение этих сведений иллюстрируется решенными примерами. (Начало решения примеров обозначается символом ►, а конец — ◄.) Затем даются подборки задач с ответами для всех практических аудиторных занятий (АЗ) и для самостоятельных (мини-контрольных) работ на 10–15 минут во время этих занятий. И, наконец, приводятся недельные индивидуальные домашние задания (ИДЗ), каждое из которых содержит 30 вариантов и сопровождается решением типового варианта. Часть задач из ИДЗ снабжена ответами. В конце каждой главы приводятся дополнительные задачи повышенной трудности и прикладного характера.

Нумерация АЗ сквозная и состоит из двух чисел: первое из них указывает на главу, а второе — на порядковый номер АЗ в этой главе. Например, шифр АЗ-16.1 означает, что АЗ относится к шестнадцатой главе и является первым по счету. В данной книге комплекса содержится 23 АЗ и 9 ИДЗ.

Для ИДЗ также принята нумерация по главам. Например, шифр ИДЗ-16.2 означает, что ИДЗ относится к шестнадцатой главе и является вторым. Внутри каждого ИДЗ принята следующая нумерация: первое число означает номер задачи в данном задании, а второе — номер варианта. Таким образом, шифр ИДЗ-16.2: 16 означает, что студент должен выполнять 16-й вариант из ИДЗ-16.2, который содержит задачи 1.16, 2.16, 3.16 и т.д.

При выдаче ИДЗ студентам номера выполняемых вариантов можно менять от задания к заданию по какой-либо системе или случайным образом. Более того, можно при выдаче ИДЗ любому студенту составить его вариант, комбинируя однотипные задачи из разных вариантов. Например, шифр

ИДЗ-16.1: 1.2; 2.4; 3.6; 4.1; 5.15 означает, что студенту следует решать в ИДЗ-16.1 первую задачу из варианта 2, вторую – из варианта 4, третью – из варианта 6, четвертую – из варианта 1 и пятую – из варианта 15. Такой комбинированный метод выдачи ИДЗ позволяет из 30 вариантов получить большое количество новых вариантов.

Внедрение ИДЗ в учебный процесс показало, что целесообразнее выдавать ИДЗ не после каждого АЗ (которых, как правило, два в неделю), а одно недельное ИДЗ, включающее основной материал двух АЗ этой недели.

Дадим некоторые общие рекомендации по организации работы студентов в соответствии с настоящим пособием.

1. В вузе студенческие группы по 25 человек, проводятся два АЗ в неделю, планируются еженедельные не обязательные для посещения студентами консультации, выдаются недельные ИДЗ. При этих условиях для систематического контроля с выставлением оценок, указанием ошибок и путей их исправления могут быть использованы выдаваемые каждому преподавателю матрицы ответов и банк листов решений, которые кафедра заготавливает для ИДЗ (студентам они не выдаются). Если матрицы ответов составляются для всех задач из ИДЗ, то листы решений разрабатываются только для тех задач и вариантов, где важно проверить правильность выбора метода, последовательности действий, навыков и умений при вычислениях. Кафедра определяет, для каких ИДЗ нужны листы решений. Листы решений (один вариант располагается на одном листе) используются при самоконтроле правильности выполнения заданий студентами, при взаимном студенческом контроле, а чаще всего при комбинированном контроле: преподаватель проверяет лишь правильность выбора метода, а студент по листу решений – свои вычисления. Это позволяет проверить ИДЗ 25 студентов за 15–20 минут с выставлением оценок в журнал.

2. В вузе студенческие группы по 15 человек, проводятся два АЗ в неделю, в расписание для каждой группы включены обязательные два часа в неделю самоподготовки под контролем преподавателя. При этих условиях организация индивидуальной, самостоятельной, творческой работы студентов, оперативного контроля за качеством этой работы значительно улучшается. Рекомендованные выше методы пригодны и в данном случае, однако появляются новые возможности. На АЗ быстрее проверяются и оцениваются ИДЗ, во время обязательной

самоподготовки можно проконтролировать проработку теории и решение ИДЗ, выставить оценки части студентов, приняты задолженности по ИДЗ у отстающих.

Накопление большого количества оценок за ИДЗ, самостоятельные и контрольные работы в аудитории позволяет контролировать учебный процесс, управлять им, оценивать качество усвоения изучаемого материала.

Все это дает возможность отказаться от традиционного итогового семестрового (годового) экзамена по материалу семестра (учебного года) и ввести так называемую рейтинг-блок-модульную систему (РБМС) оценки знаний и навыков студентов, состоящую в следующем. Материал семестра (учебного года) разбивается на блоки (модули), по каждому из блоков (модулей) выполняются АЗ, ИДЗ и в конце каждого цикла — двухчасовая письменная коллоквиум-контрольная работа, в которую входят 2–3 теоретических вопроса и 5–6 задач. Учет оценок по АЗ, ИДЗ и коллоквиуму-контрольной позволяет вывести объективную общую оценку за каждый блок (модуль) и итоговую оценку по всем блокам (модулям) семестра (учебного года). Положение о РБМС см. в ч. 1 данного комплекса учебных пособий (прил. 5).

В заключение отметим, что усвоение содержащегося в пособии материала гарантирует хорошие знания студентов по соответствующим разделам курса высшей математики. Для отлично успевающих студентов необходима подготовка заданий повышенной сложности (индивидуальный подход в обучении!) с перспективными поощрительными мерами. Например, можно разработать для таких студентов специальные задания на весь семестр, включающие задачи настоящего пособия и дополнительные более сложные задачи и теоретические упражнения (для этой цели, в частности, предназначены дополнительные задачи в конце некоторых глав). Преподаватель может выдать эти задания в начале семестра, установить график их выполнения под своим контролем, разрешить свободное посещение лекционных или практических занятий по высшей математике и в случае успешной работы выставить отличную оценку до экзаменационной сессии.

16. ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

16.1. ОРИГИНАЛ И ИЗОБРАЖЕНИЕ ПО ЛАПЛАСУ

Начальной функцией или *оригиналом* называют функцию $f(t)$ действительной переменной t , удовлетворяющую следующим условиям:

- 1) $f(t) = 0$ при $t < 0$;
- 2) если $M > 0$ и s — некоторые вещественные числа, то

$$|f(t)| \leq M e^{st} \text{ при } t \geq 0; \quad (16.1)$$

3) $f(t)$ — кусочно-непрерывная и интегрируемая на любом конечном отрезке изменения t .

Точная нижняя грань s_0 всех чисел s , для которых выполняется неравенство (16.1), называется *показателем роста функции $f(t)$* .

Если существует несобственный интеграл

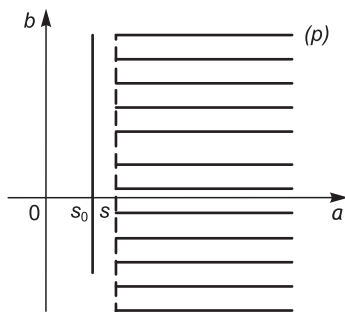
$$F(p) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-pt} dt, \quad (16.2)$$

где $p = a + bi$, $\operatorname{Re} p = a > 0$, $\operatorname{Im} p = b$, то функцию $F(p)$ комплексной переменной p называют *изображением функции $f(t)$ по Лапласу*, или ее *лапласовым изображением*, или просто *изображением*.

Правило (16.2) получения по заданному оригиналу $f(t)$ изображения $F(p)$ называется *преобразованием Лапласа*.

Если $\operatorname{Re} p = a \geq s > s_0$ и выполняется условие (16.1), то можно доказать, что несобственный интеграл (16.2) абсолютно сходится и определяет аналитическую функцию в полуплоскости $a > s_0$ (рис. 16.1); при этом

$$\lim_{\operatorname{Re} p \rightarrow +\infty} F(p) = 0. \quad (16.3)$$



Р и с. 16.1

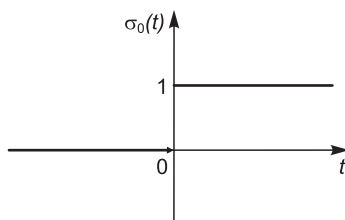
Если $F(p)$ – лапласово изображение $f(t)$, то кратко это записывается в виде $F(p) \doteq f(t)$ или $F(p) = L\{f(t)\}$.

Можно доказать, что всякому изображению $F(p)$, удовлетворяющему условию (16.3), соответствует единственная начальная функция (оригинал). Принятые обозначения: $f(t) \doteq F(p)$ или $f(t) = L^{-1}\{F(p)\}$.

Пример 1. Найти изображение единичной функции Хевисайда

$$\sigma_0(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0, \\ 1 & \text{при } t \geq 0. \end{cases}$$

График функции $\sigma_0(t)$ приведен на рис. 16.2.



Р и с. 16.2

► Очевидно, что $\sigma_0(t)$ удовлетворяет всем условиям оригинала и $s_0 = 0$. По формуле (16.2) имеем:

$$L\{\sigma_0(t)\} = \int_0^{+\infty} e^{-pt} dt = -\frac{1}{p} e^{-pt} \Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{p},$$

так как $\lim_{\operatorname{Re} p \rightarrow +\infty} e^{-pt} = 0$. Следовательно, $L\{\sigma_0(t)\} = \frac{1}{p}$, т.е. $\sigma_0(t) \doteq \frac{1}{p}$. ◀

Пример 2. Найти изображение $F(p)$ функции $e^{\alpha t}$, где $\alpha \in \mathbf{R}$.

► Имеем:

$$L\{e^{\alpha t}\} = \int_0^{+\infty} e^{-pt} e^{\alpha t} dt = \int_0^{+\infty} e^{-(p-\alpha)t} dt = -\frac{e^{-(p-\alpha)t}}{p-\alpha} \Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{p-\alpha},$$

если $\operatorname{Re} p > \alpha = s_0$.

Следовательно, $e^{\alpha t} \doteq \frac{1}{p-\alpha}$. ◀

З а м е ч а н и е . Из определения оригинала следует, что не всякая функция $f(t)$ является оригиналом. Например, при невыполнении условия (16.1) нет гарантии сходимости интеграла (16.2). Если интеграл (16.2) расходится, то говорят, что функция $f(t)$ не является оригиналом. Нетрудно показать, напри-

мер, что функции $f(t) = \frac{1}{t}$, $f(t) = e^{t^3}$, $f(t) = e^{1/t^2}$ не являются оригиналами, так как интеграл (16.2) для них расходится.

Перечислим основные свойства оригиналов и изображений.

1 (свойство линейности). Если $F_k(p) \doteq f_k(t)$, $k = 1, 2, \dots, n$, то

$$\sum_{k=1}^n c_k f_k(t) \doteq \sum_{k=1}^n c_k F_k(p), \quad (16.4)$$

где c_k — любые действительные или комплексные числа.

2 (теорема сдвига). Если $f(t) \doteq F(p)$, то для любого комплексного числа α имеем:

$$e^{\alpha t} f(t) \doteq F(p - \alpha), \quad \operatorname{Re} p > s_0 + \operatorname{Re} \alpha. \quad (16.5)$$

3 (теорема подобия). Если $f(t) \doteq F(p)$ и $\lambda > 0$, то

$$f(\lambda t) \doteq \frac{1}{\lambda} F\left(\frac{p}{\lambda}\right). \quad (16.6)$$

4 (теорема о дифференцировании изображения). Если $f(t) \doteq F(p)$, то

$$(-1)^n \frac{d^n F(p)}{dp^n} \doteq t^n f(t). \quad (16.7)$$

5 (теорема о дифференцировании оригинала). Если $f(t) \doteq F(p)$, то

$$\left. \begin{aligned} f'(t) &\doteq pF(p) - f(0), \\ f''(t) &\doteq p^2 F(p) - pf(0) - f'(0), \\ &\dots\dots\dots \\ f^{(n)}(t) &\doteq p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0). \end{aligned} \right\} \quad (16.8)$$

Если $f(0) = f'(0) = \dots = f^{(n-1)}(0) = 0$, то $f^{(n)}(t) \doteq p^n F(p)$.

6 (теорема запаздывания). Если $f(t) \doteq F(p)$, то для $t_0 > 0$

$$f(t - t_0) \doteq e^{-pt_0} F(p). \quad (16.9)$$

Сверткой двух функций $f_1(t)$ и $f_2(t)$, обозначаемой $f_1(t) * f_2(t)$, называется функция, определяемая равенством

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau.$$

Если $f_1(t)$, $f_2(t)$ — оригиналы, т.е. $f_1(\tau) \equiv 0$ при $\tau > t$, то их свертка представима в следующем виде:

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_0^t f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau = \int_0^t f_1(t - \tau) f_2(\tau) d\tau. \quad (16.10)$$

Свертка двух оригиналов является оригиналом. Для нее справедливы следующие свойства:

- 1) $f_1 * f_2 = f_2 * f_1$ (коммутативность);
- 2) $(f_1 * f_2) * f_3 = f_1 * (f_2 * f_3)$ (ассоциативность);
- 3) $(c_1 f_1 + c_2 f_2) * f_3 = c_1 (f_1 * f_3) + c_2 (f_2 * f_3)$ (линейность).

7 (теорема Бореля, или теорема свертывания). Если $f_1(t) \doteq F_1(p)$, $f_2(t) \doteq F_2(p)$, то

$$f_1(t) * f_2(t) \doteq F_1(p) F_2(p). \quad (16.11)$$

Формула (16.11) называется *формулой умножения изображений*. Она часто применяется для восстановления оригинала по его изображению.

8 (теорема об интегрировании оригинала). Если $f(t) \doteq F(p)$, то

$$\int_0^t f(\tau) d\tau \doteq \frac{F(p)}{p}. \quad (16.12)$$

9 (теорема об интегрировании изображения). Если $f(t) \doteq F(p)$ и интеграл $\int_p^{+\infty} F(z) dz$ сходится, то

$$\frac{f(t)}{t} \doteq \int_p^{+\infty} F(z) dz. \quad (16.13)$$

10 (теорема об изображении периодической функции). Пусть $f(t)$ — периодическая функция периода T и $f(t) \doteq F(p)$. Если $F_0(p)$ — изображение функции $f(t)(\sigma_0(t) - \sigma_0(t - T))$, т.е. $F_0(p) = \int_0^T f(t) e^{-pt} dt$, то

$$F(p) = \frac{F_0(p)}{1 - e^{-pT}}, \quad \operatorname{Re} p > 0. \quad (16.14)$$

С целью проверки правильности вычислений в операционном исчислении часто используют *предельные соотношения*.

11 (теорема о предельных соотношениях). Если $f(t), f'(t)$ — оригиналы и $f(t) \doteq F(p)$, то

$$\lim_{p \rightarrow 0} pF(p) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t), \quad (16.15)$$

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} pF(p) = \lim_{t \rightarrow 0+} f(t) = f(0). \quad (16.16)$$

Соотношения (16.15) и (16.16) называются *предельными соотношениями связи между изображением и оригиналом*.

12. При решении ряда практических задач используется *формула Дюамеля*

$$pF_1(p)F_2(p) \doteq f_1(t)f_2(0) + \int_0^t f_1(\tau)f_2'(t-\tau)d\tau, \quad (16.17)$$

где $f_1(t)$ — непрерывная функция; $f_2(t)$ имеет непрерывную производную; $F_1(p) \doteq f_1(t)$; $F_2(p) \doteq f_2(t)$.

Пример 3. Найти изображения оригиналов $f(t) = \sin t$ и $f(t) = \cos t$.

► Известно, что $\sin t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}$ и $\cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2}$. Тогда из свойства 1 следует, что

$$\begin{aligned} \sin t &\doteq \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{p-i} - \frac{1}{p+i} \right) = \frac{1}{2i} \frac{2i}{p^2+1} = \frac{1}{p^2+1}, \\ \cos t &\doteq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{p-i} + \frac{1}{p+i} \right) = \frac{1}{2} \frac{2p}{p^2+1} = \frac{p}{p^2+1}. \end{aligned}$$

Итак, $\sin t \doteq \frac{1}{p^2+1}$, $\cos t \doteq \frac{p}{p^2+1}$. ◀

Пример 4. Записать изображения указанных функций-оригиналов: $\sin \beta t$; $\cos \beta t$; $\operatorname{sh} \beta t$; $\operatorname{ch} \beta t$.

► Так как известны изображения для $\sin t$ и $\cos t$, то изображения $\sin \beta t$ и $\cos \beta t$ могут быть найдены с помощью теоремы подобия (см. формулу (16.6)):

$$\begin{aligned} \sin \beta t &\doteq \frac{1}{\beta} \frac{1}{\beta(p/\beta)^2+1} = \frac{1}{\beta} \frac{\beta^2}{p^2+\beta^2} = \frac{\beta}{p^2+\beta^2}, \\ \cos \beta t &\doteq \frac{1}{\beta} \frac{p/\beta}{\beta(p/\beta)^2+1} = \frac{1}{\beta^2} \frac{\beta^2 p}{p^2+\beta^2} = \frac{p}{p^2+\beta^2}. \end{aligned}$$

Далее:

$$\operatorname{sh} \beta t = \frac{e^{\beta t} - e^{-\beta t}}{2}, \quad \operatorname{ch} \beta t = \frac{e^{\beta t} + e^{-\beta t}}{2}.$$

Тогда из примера 2 и свойства линейности следует, что

$$\begin{aligned} \operatorname{sh} \beta t &\doteq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{p-\beta} - \frac{1}{p+\beta} \right) = \frac{\beta}{p^2-\beta^2}, \\ \operatorname{ch} \beta t &\doteq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{p-\beta} + \frac{1}{p+\beta} \right) = \frac{p}{p^2-\beta^2}. \quad \blacktriangleleft \end{aligned}$$

Пример 5. Найти изображения оригиналов $e^{\alpha t} \sin \beta t$ и $e^{\alpha t} \cos \beta t$.

► Так как $\sin \beta t \doteq \frac{\beta}{p^2 + \beta^2}$, $\cos \beta t \doteq \frac{p}{p^2 + \beta^2}$, то из теоремы смещения следует, что

$$e^{\alpha t} \sin \beta t \doteq \frac{\beta}{(p + \alpha)^2 + \beta^2}, \quad e^{\alpha t} \cos \beta t \doteq \frac{p + \alpha}{(p + \alpha)^2 + \beta^2}. \blacktriangleleft$$

Пример 6. Найти изображения указанных оригиналов: t ; t^n ; $t^n e^{\alpha t}$; $t \sin \beta t$; $t \cos \beta t$.

► Известно, что $\sigma_0(t) \doteq \frac{1}{p}$. Тогда по правилу дифференцирования изображения находим:

$$t \doteq -\frac{d}{dp} \left(\frac{1}{p} \right) = \frac{1}{p^2}, \quad t^2 \doteq (-1)^2 \frac{d^2}{dp^2} \left(\frac{1}{p} \right) = \frac{2!}{p^3},$$

$$t^3 \doteq -\frac{d}{dp} \left(\frac{2!}{p^3} \right) = \frac{3!}{p^4}, \dots, \quad t^n \doteq -\frac{d}{dp} \left(\frac{(n-1)!}{p^n} \right) = \frac{n!}{p^{n+1}}.$$

Из теоремы смещения следует, что $t^n e^{\alpha t} \doteq \frac{n!}{(p - \alpha)^{n+1}}$.

Зная изображения $\sin \beta t$ и $\cos \beta t$, из теоремы о дифференцировании изображения получаем:

$$t \sin \beta t \doteq -\frac{d}{dp} \left(\frac{\beta}{p^2 + \beta^2} \right) = \frac{2\beta p}{(p^2 + \beta^2)^2},$$

$$t \cos \beta t \doteq -\frac{d}{dp} \left(\frac{p}{p^2 + \beta^2} \right) = -\frac{p^2 + \beta^2 - 2p^2}{(p^2 + \beta^2)^2} = \frac{p^2 - \beta^2}{(p^2 + \beta^2)^2}. \blacktriangleleft$$

Пример 7. Найти изображения оригиналов:

а) $e^{-5t} \sin \pi t$; б) $\operatorname{ch} 2t \cos 3t$; в) $\sin 5t \cos 2t$.

► а) Так как $\sin \pi t \doteq \frac{\pi}{p^2 + \pi^2}$, то по свойству смещения

$$e^{-5t} \sin \pi t \doteq \frac{\pi}{(p + 5)^2 + \pi^2}.$$

б) Так как $\operatorname{ch} 2t \cos 3t = \frac{1}{2} (e^{2t} + e^{-2t}) \cos 3t$, то из свойства линейности и теоремы смещения следует, что

$$\operatorname{ch} 2t \cos 3t \doteq \frac{1}{2} \left(\frac{p - 2}{(p - 2)^2 + 9} + \frac{p + 2}{(p + 2)^2 + 9} \right).$$

в) Так как $\sin 5t \cos 2t = \frac{1}{2} (\sin 7t + \sin 3t)$, то из свойства линейности следует, что

$$\sin 5t \cos 2t \doteq \frac{1}{2} \left(\frac{7}{p^2 + 49} + \frac{3}{p^2 + 9} \right). \blacktriangleleft$$

Пример 8. Найти изображения оригиналов:

$$\text{а) } \int_0^t (e^{-5z} \operatorname{ch} 2z + e^{3z} \sin 4z) dz; \quad \text{б) } \int_0^t (z^5 - 4z^4 + 3z^2 - 2z) e^{2z} dz.$$

► а) Найдем изображение оригинала $f(t) = e^{-5t} \operatorname{ch} 2t + e^{3t} \sin 4t$. Из свойства линейности и теорем подобия и смещения получаем:

$$e^{-5t} \operatorname{ch} 2t + e^{3t} \sin 4t \doteq \frac{p+5}{(p+5)^2 - 4} + \frac{4}{(p-3)^2 + 16}.$$

Тогда, согласно правилу интегрирования оригинала, имеем:

$$\int_0^t (e^{-5z} \operatorname{ch} 2z + e^{3z} \sin 4z) dz \doteq \frac{1}{p} \left(\frac{p+5}{(p+5)^2 - 4} + \frac{4}{(p-3)^2 + 16} \right).$$

б) Найдем изображение оригинала:

$$t^5 - 4t^4 + 3t^2 - 2t \doteq \frac{5!}{p^6} - \frac{4 \cdot 4!}{p^5} + \frac{6}{p^3} - \frac{2}{p^2}.$$

Тогда по теореме смещения

$$(t^5 - 4t^4 + 3t^2 - 2t) e^{2t} \doteq \frac{5!}{(p-2)^6} - \frac{4 \cdot 4!}{(p-2)^5} + \frac{6}{(p-2)^3} - \frac{2}{(p-2)^2}.$$

Используя теорему об интегрировании оригинала, получим:

$$\int_0^t (z^5 - 4z^4 + 3z^2 - 2z) e^{2z} dz \doteq \frac{1}{p} \left(\frac{120}{(p-2)^6} - \frac{96}{(p-2)^5} + \frac{6}{(p-2)^3} - \frac{2}{(p-2)^2} \right). \blacktriangleleft$$

Пример 9. Найти оригиналы следующих изображений:

$$\text{а) } \frac{1}{p(p^2 + 9)}; \quad \text{б) } \frac{1}{p^2(p^2 + 9)}; \quad \text{в) } \frac{1}{(p+2)^3}.$$

► а) Так как $\frac{1}{p^2 + 9} = \frac{1}{3} \frac{3}{p^2 + 9} \doteq \frac{1}{3} \sin 3t$, то по теореме об интегрировании оригинала

$$\frac{1}{p(p^2 + 9)} \doteq \int_0^t \frac{1}{3} \sin 3z dz = -\frac{1}{9} \cos 3z \Big|_0^t = \frac{1}{9} (1 - \cos 3t).$$

б) На основании формулы (16.12) с учетом результатов, полученных в п. «а», имеем:

$$\frac{1}{p^2} \frac{1}{p^2+9} \doteq \int_0^t \frac{1}{9} (1 - \cos 3z) dz = \frac{1}{9} \left(z - \frac{1}{3} \sin 3z \right) \Big|_0^t = \frac{1}{9} \left(t - \frac{1}{3} \sin 3t \right).$$

в) Так как $t^2 \doteq \frac{2!}{p^3}$, то $\frac{1}{p^3} \doteq \frac{t^2}{2!}$. На основании теоремы смещения получаем:

$$\frac{1}{(p+2)^3} \doteq e^{-2t} \frac{t^2}{2!}. \blacktriangleleft$$

Пример 10. Найти изображение функции $f(t) = \frac{1 - \cos 2t}{t} e^{-5t}$.

► Так как функция $f(t)$ непрерывна при всех $t > 0$ и

$$\lim_{t \rightarrow +0} f(t) = \lim_{t \rightarrow +0} \frac{1 - \cos 2t}{t} e^{-5t} = \lim_{t \rightarrow +0} 2 \frac{\sin t}{t} \cdot \sin t \cdot e^{-5t} = 0,$$

то она является оригиналом. Очевидно, что $1 - \cos 2t \doteq \frac{1}{p} - \frac{p}{p^2+4}$. Из прави-

ла интегрирования изображения следует, что

$$\begin{aligned} \frac{1 - \cos 2t}{t} &\doteq \int_p^{+\infty} \left(\frac{1}{z} - \frac{z}{z^2+4} \right) dz = \lim_{\beta \rightarrow \infty} \int_p^{\beta} \left(\frac{1}{z} - \frac{z}{z^2+4} \right) dz = \\ &= \lim_{\beta \rightarrow \infty} \left(\ln z - \frac{1}{2} \ln (z^2+4) \right) \Big|_p^{\beta} = \lim_{\beta \rightarrow \infty} \ln \frac{z}{\sqrt{z^2+4}} \Big|_p^{\beta} = \\ &= \lim_{\beta \rightarrow \infty} \left(\ln \frac{\beta}{\sqrt{\beta^2+4}} - \ln \frac{p}{\sqrt{p^2+4}} \right) = \ln 1 + \ln \frac{\sqrt{p^2+4}}{p}. \end{aligned}$$

Применив теорему смещения, получим:

$$\frac{1 - \cos 2t}{t} e^{-5t} \doteq \ln \frac{\sqrt{(p+5)^2+4}}{p+5} = \ln \frac{\sqrt{p^2+10p+29}}{p+5}. \blacktriangleleft$$

Пример 11. Найти изображение оригинала $\cos (2t - \pi)$, $t \geq \pi/2$.

► Известно, что $\cos 2t \doteq \frac{p}{p^2+4}$ (см. пример 4). Тогда из теоремы запаздывания получаем:

$$\cos (2t - \pi) = \cos 2 \left(t - \frac{\pi}{2} \right) = e^{-\pi p/2} \frac{p}{p^2+4}. \blacktriangleleft$$

Пример 12. Найти свертку оригиналов $\cos 3t$ и $\sin t$ и изображение свертки.

► Согласно определению свертки имеем:

$$\begin{aligned}\cos 3t * \sin t &= \int_0^t \cos 3\tau \sin(t-\tau) d\tau = \frac{1}{2} \int_0^t (\sin(t+2\tau) + \sin(t-4\tau)) d\tau = \\ &= \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} \cos(t+2\tau) \Big|_0^t + \frac{1}{4} \cos(t-4\tau) \Big|_0^t \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} \cos 3t + \frac{1}{2} \cos t + \frac{1}{4} \cos 3t - \frac{1}{4} \cos t \right) = -\frac{1}{8} \cos 3t + \frac{1}{8} \cos t.\end{aligned}$$

Следовательно, $\cos 3t * \sin t = -\frac{1}{8} \cos 3t + \frac{1}{8} \cos t$. Изображение полученного оригинала находим с учетом свойства линейности и теоремы подобия:

$$\begin{aligned}\cos 3t * \sin t &\div -\frac{1}{8} \frac{p}{p^2+9} + \frac{1}{8} \frac{p}{p^2+1} = \\ &= \frac{1-p^3-p+p^3+9p}{8(p^2+9)(p^2+1)} = \frac{p}{(p^2+9)(p^2+1)}.\end{aligned}$$

Тот же результат можно получить другим путем. Известно, что $\cos 3t \div \frac{p}{p^2+9}$, $\sin t \div \frac{1}{p^2+1}$ (см. пример 4). На основании теоремы Бореля имеем:

$$\cos 3t * \sin t \div \frac{p}{(p^2+9)(p^2+1)}. \blacktriangleleft$$

Пример 13. Найти оригинал $f(t)$, соответствующий изображению

$$F(p) = \frac{p}{(p^2+4)^2}.$$

► Представим изображение в виде $F(p) = \frac{p}{p^2+4} \frac{1}{p^2+4}$. Так как

$$\frac{1}{p^2+4} \div \frac{1}{2} \sin 2t, \quad \frac{p}{p^2+4} \div \cos 2t, \quad \text{то на основании формулы (16.11)}$$

$$\begin{aligned}\frac{p}{p^2+4} \frac{1}{p^2+4} &\div \cos 2t * \frac{1}{2} \sin 2t = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^t \cos 2\tau \sin(2t-2\tau) d\tau = \frac{1}{4} \int_0^t (\sin 2t + \sin(2t-4\tau)) d\tau = \\ &= \frac{1}{4} \left(\tau \sin 2t \Big|_0^t + \frac{1}{4} \cos(2t-4\tau) \Big|_0^t \right) = \frac{1}{4} t \sin 2t + \frac{1}{4} \cos 2t - \frac{1}{4} \cos 2t = \\ &= \frac{1}{4} t \sin 2t = f(t). \blacktriangleleft\end{aligned}$$

Пример 14. Найти изображение оригинала $f(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t < 1, \\ 2-t, & 1 \leq t < 2, \end{cases}$ периодически продолженного на интервал $[0, +\infty)$ с периодом $T = 2$ (рис. 16.3).

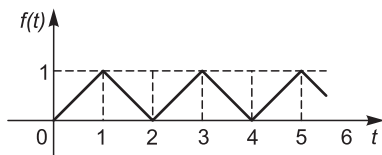


Рис. 16.3

► Так как оригинал периодический, то, согласно формуле (16.14),

$$F(p) = \frac{1}{1 - e^{-pT}} F_0(p),$$

где $T = 2$, а $F_0(p) = \int_0^2 f(t)e^{-pt} dt = \int_0^1 te^{-pt} dt + \int_1^2 (2-t)e^{-pt} dt$.

Интегрируя по частям, находим интегралы:

$$\begin{aligned} \int_0^1 te^{-pt} dt &= -\frac{1}{p} te^{-pt} \Big|_0^1 + \frac{1}{p} \int_0^1 e^{-pt} dt = \\ &= -\frac{1}{p} e^{-p} - \frac{1}{p^2} e^{-pt} \Big|_0^1 = -\frac{1}{p} e^{-p} + \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p^2} e^{-p}, \\ \int_1^2 (2-t)e^{-pt} dt &= -(2-t) \frac{1}{p} e^{-pt} \Big|_1^2 - \int_1^2 \frac{1}{p} e^{-pt} dt = \\ &= \frac{1}{p} e^{-p} + \frac{1}{p^2} e^{-pt} \Big|_1^2 = \frac{1}{p} e^{-p} + \frac{1}{p^2} e^{-2p} - \frac{1}{p^2} e^{-p}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} F_0(p) &= -\frac{1}{p} e^{-p} + \frac{1}{p^2} - \frac{1}{p^2} e^{-p} + \frac{1}{p} e^{-p} + \frac{1}{p^2} e^{-2p} - \frac{1}{p^2} e^{-p} = \\ &= \frac{1}{p^2} - \frac{2}{p^2} e^{-p} + \frac{1}{p^2} e^{-2p}. \end{aligned}$$

Изображением для $f(t)$ будет функция

$$F(p) = \frac{1 - 2e^{-p} + e^{-2p}}{p^2(1 - e^{-2p})} = \frac{(1 - e^{-p})^2}{p^2(1 - e^{-2p})} = \frac{1}{p^2} \frac{1 - e^{-p}}{1 + e^{-p}}. \blacktriangleleft$$

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	3
Методические рекомендации	5
16. ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ.....	8
16.1. Оригинал и изображение по Лапласу	8
16.2. Нахождение оригиналов по изображениям	25
16.3. Приложения операционного исчисления	33
16.4. Индивидуальные домашние задания к гл. 16	57
16.5. Дополнительные задачи к гл. 16	85
17. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ УСТОЙЧИВОСТИ.....	89
17.1. Постановка задачи	89
17.2. Определение устойчивости. Уравнения возмущенного движения	90
17.3. Функции Ляпунова и теоремы Ляпунова об устойчивости и неустойчивости решений дифференциальных уравнений	93
17.4. Линейные однородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами и устойчивость их решений	97
17.5. Линейные однородные системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами и устойчивость их решений	100
17.6. Исследование решений систем на устойчивость по первому приближению	104
17.7. Индивидуальные домашние задания к гл. 17.	111
17.8. Дополнительные задачи к гл. 17	123
18. ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ.....	125
18.1. Некоторые понятия комбинаторики. События и их вероятности	125
18.2. Основные аксиомы теории вероятностей. Непосредственное вычисление вероятностей событий	130
18.3. Теоремы сложения и умножения вероятностей. Формула полной вероятности	133
18.4. Формулы Байеса и Бернулли. Локальная и интегральная теоремы Муавра — Лапласа	140
18.5. Случайные величины. Общие законы распределения случайных величин	144
18.6. Числовые характеристики случайных величин	149
18.7. Основные законы распределения случайных величин	156
18.8. Системы случайных величин и их числовые характеристики	162
18.9. Индивидуальные домашние задания к гл. 18	176
18.10. Дополнительные задачи к гл. 18	220
19. ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ	225
19.1. Выборка. Эмпирические законы распределения	225
19.2. Числовые характеристики статистического распределения	230
19.3. Оценка числовых характеристик. Метод моментов	242
19.4. Метод наименьших квадратов. Корреляционная связь	249
19.5. Статистическая проверка гипотез	258
19.6. Индивидуальные домашние задания к гл. 19	270
19.7. Дополнительные задачи к гл. 19	299
Приложения	302
Рекомендуемая литература	335