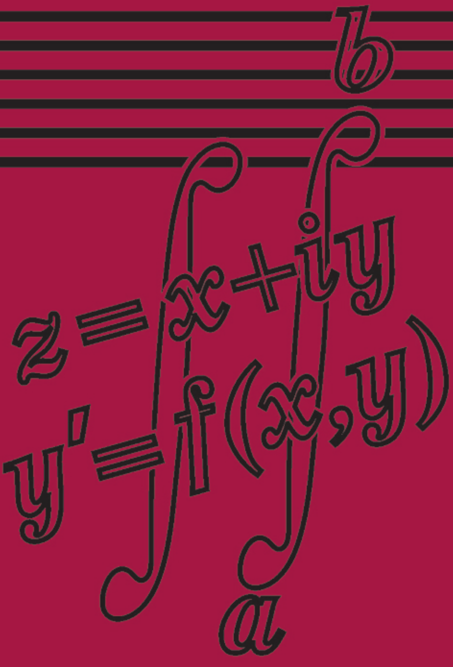
ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ



ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ

Допущено
Министерством образования Республики Беларусь
в качестве учебного пособия для студентов
технических специальностей учреждений,
обеспечивающих получение высшего образования

В четырех частях
Часть 2

Комплексные числа. Неопределенные и определенные интегралы. Функции нескольких переменных. Обыкновенные дифференциальные уравнения

Под общей редакцией
доктора физико-математических наук,
профессора *А.П. Рябушко*

6-е издание

Минск
«Вышэйшая школа»

УДК 51(076.1)(075.8)
ББК 22.1я73
И60

А в т о р ы: *А.П. Рябушко, В.В. Бархатов, В.В. Державец, И.Е. Юруть*

Р е ц е н з е н т ы: кафедра высшей математики № 3 Белорусского национального технического университета; заведующий кафедрой высшей математики УО «Белорусский государственный технологический университет» доктор физико-математических наук, профессор *В.М. Марченко*

Индивидуальные задания по высшей математике : учеб. пособие. В 4 ч. Ч. 2. Комплексные числа. Неопределенные и определенные интегралы. Функции нескольких переменных. Обыкновенные дифференциальные уравнения / А. П. Рябушко [и др.] ; под общ. ред. А. П. Рябушко. – 6-е изд. – Минск : Вышэйшая школа, 2014. – 396 с. : ил.
И60
ISBN 978-985-06-2466-6.

Это вторая книга комплекса учебных пособий по высшей математике, направленных на развитие и активизацию самостоятельной работы студентов технических вузов. Содержатся теоретические сведения и наборы задач для аудиторных и индивидуальных заданий.

Предыдущее издание вышло в 2011 г.

Для студентов учреждений высшего образования по инженерно-техническим специальностям. Будет полезно студентам экономических специальностей, а также преподавателям учреждений высшего и среднего специального образования.

УДК 51(076.1)(075.8)
ББК 22.1я73

ISBN 978-985-06-2466-6 (ч. 2)
ISBN 978-985-06-2000-2

ПРЕДИСЛОВИЕ

Предлагаемая вниманию читателя книга продолжает комплекс учебных пособий под общим названием "Индивидуальные задания по высшей математике". Он написан в соответствии с действующими программами курса высшей математики в объеме 380 — 450 часов для инженерно-технических специальностей вузов. Этот комплекс может быть использован в вузах других профилей, в которых количество часов, отведенное на изучение высшей математики, значительно меньше. (В последнем случае из предлагаемого материала рекомендуется сделать необходимую выборку.) Кроме того, он вполне доступен для студентов вечерних и заочных отделений вузов.

Настоящий комплекс пособий адресован преподавателям и студентам и предназначен для проведения самостоятельных (контрольных) работ во время аудиторных занятий (АЗ) и выдачи индивидуальных домашних заданий (ИДЗ) по всем разделам курса высшей математики.

Во второй книге комплекса "Индивидуальные задания по высшей математике" содержится материал по комплексным числам, неопределенным и определенным интегралам, функциям нескольких переменных и обыкновенным дифференциальным уравнениям.

Структура второй книги аналогична структуре первой. Нумерация глав, параграфов и рисунков продолжает соответствующую нумерацию в первой книге.

Авторы выражают искреннюю благодарность рецензентам — коллективу кафедры высшей математики № 3 Белорусского национального технического университета, возглавляемому доцентом В. Ф. Бубновым, и заведующему кафедрой высшей математики УО “Белорусский государственный технологический университет” доктору физико-математических наук, профессору В. М. Марченко – за ценные замечания и советы, способствовавшие улучшению книги.

Все отзывы и пожелания просьба направлять по адресу: издательство “Вышэйшая школа”, проспект Победителей, 11, 220048, Минск.

Авторы

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ

Охарактеризуем структуру пособия, методику его использования, организацию проверки и оценки знаний, навыков и умений студентов.

Весь практический материал по курсу высшей математики разделен на главы, в каждой из которых даются необходимые теоретические сведения (основные определения, понятия, формулировки теорем, формулы), используемые при решении задач и выполнении упражнений. Изложение этих сведений иллюстрируется решенными примерами. (Начало решения примеров отмечается символом ►, а конец — ◄ .) Затем даются подборки задач с ответами для всех практических аудиторных занятий (АЗ) и для самостоятельных (миниконтрольных) работ на 10 — 15 минут во время этих занятий. Наконец, приводятся недельные индивидуальные домашние задания (ИДЗ), каждое из которых содержит 30 вариантов и сопровождается решением типового варианта. Часть задач из ИДЗ снабжена ответами. В конце каждой главы помещены дополнительные задачи повышенной трудности и прикладного характера.

В приложении приведены двухчасовые контрольные работы (каждая по 30 вариантов) по важнейшим темам курса.

Нумерация АЗ сквозная и состоит из двух чисел: первое из них указывает на главу, а второе — на порядковый номер АЗ в этой главе. Например, шифр АЗ-9.1 означает, что АЗ относится к девятой главе и является первым по счету. Во второй книге комплекса содержится 26 АЗ и 12 ИДЗ.

Для ИДЗ также принята нумерация по главам. Например, шифр ИДЗ-9.2 означает, что ИДЗ относится к девятой главе и является вторым. Внутри каждого ИДЗ принята следующая нумерация: первое число означает номер задачи в данном задании, а второе — номер варианта. Таким образом, шифр ИДЗ-9.2:16 означает, что студент должен выполнить 16-й вариант из ИДЗ-9.2, который содержит задачи 1.16, 2.16, 3.16, 4.16.

При выдаче ИДЗ студентам номера́ выполняемых вариантов можно менять от задания к заданию по какой-либо системе или случайным образом. Более того, можно при выдаче ИДЗ любому студенту составить его вариант, комбинируя однотипные задачи из разных вариантов. Например, шифр ИДЗ-9.2:1.2; 2.4; 3.6; 4.1 означает, что студенту следует решать в ИДЗ-9.2 первую задачу из варианта 2, вторую — из варианта 4, третью — из варианта 6 и четвертую — из варианта 1. Такой комбинированный метод выдачи ИДЗ позволяет из 30 вариантов получить большое количество новых вариантов.

Внедрение ИДЗ в учебный процесс показало, что целесообразнее выдавать ИДЗ не после каждого АЗ (которых, как правило, два в неделю), а одно недельное ИДЗ, включающее основной материал двух АЗ данной недели.

Дадим некоторые общие рекомендации по организации работы студентов в соответствии с настоящим пособием.

1. В вузе студенческие группы по 25 человек, проводятся два АЗ в неделю, планируются еженедельные необязательные для посещения студентами консультации, выдаются недельные ИДЗ. При этих условиях для систематического контроля с выставлением оценок, указанием ошибок и путей их исправления могут быть использованы выдаваемые каждому преподавателю матрицы ответов и банк листов решений, которые кафедра заготавливает для ИДЗ (студентам они не выдаются). Если матрицы ответов составляются для всех задач из ИДЗ, то листы решений разрабатываются только для тех задач и вариантов, где важно проверить правильность выбора метода, последовательности действий, навыков и умений при вычислениях. Кафедра определяет, для каких ИДЗ нужны листы решений. Листы решений (один вариант располагается на одном листе) используются при самоконтроле правильности выполнения заданий студентами, при взаимном студенческом контроле, а чаще всего при комбинированном контроле:

преподаватель проверяет лишь правильность выбора метода, а студент по листу решений — свои вычисления. Эти методы позволяют проверить ИДЗ 25 студентов за 15 — 20 минут с выставлением оценок в журнал.

2. В вузе студенческие группы по 15 человек, проводятся два АЗ в неделю, в расписание для каждой группы включены обязательные два часа в неделю самоподготовки под контролем преподавателя. При этих условиях организация индивидуальной, самостоятельной, творческой работы студентов, оперативного контроля за качеством этой работы значительно улучшается. Рекомендованные выше методы пригодны и в данном случае, однако появляются новые возможности. На АЗ быстрее проверяются и оцениваются ИДЗ, во время обязательной самоподготовки можно проконтролировать проработку теории и решение ИДЗ, выставить оценки части студентов, принять задолженности по ИДЗ у отстающих.

Накапливание большого количества оценок за ИДЗ, самостоятельные и контрольные работы в аудитории позволяет контролировать учебный процесс, управлять им, оценивать качество усвоения изучаемого материала.

Все это дает возможность отказаться от традиционного итогового семестрового (годового) экзамена по материалу всего семестра (учебного года) и ввести рейтинг-блок-модульную систему (РБМС) оценки знаний и навыков студентов, состоящую в следующем. Материал семестра (учебного года) разделяется на 3 — 5 блоков, по каждому из которых выполняются АЗ, ИДЗ и в конце каждого цикла — двухчасовая письменная коллоквиум-контрольная работа, в которую входят 2 — 3 теоретических вопроса и 5 — 6 задач. Учет оценок по АЗ, ИДЗ и коллоквиуму-контрольной позволяет вывести объективную общую оценку за каждый блок и итоговую оценку по всем блокам семестра (учебного года). Положение о РБМС см. в прил. 4.

В заключение отметим, что усвоение содержащегося в пособии материала гарантирует хорошие знания студента по соответствующим разделам курса высшей математики. Для отлично успевающих студентов необходима подготовка заданий повышенной сложности (индивидуальный подход в обучении!) с перспективными поощрительными мерами. Например, можно разработать для таких студентов специальные задания на весь семестр, включающие задачи настоящего пособия и дополнительные более сложные задачи и теоретические упражнения (для этой цели, в частности, предназначены дополнительные задачи в конце каждой главы). Преподаватель может выдать эти задания в начале семестра, установить график их выполнения под своим контролем, разрешить свободное посещение лекционных или практических занятий по высшей математике и в случае успешной работы выставить отличную оценку до экзаменационной сессии.

7. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА И ДЕЙСТВИЯ НАД НИМИ

7.1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ. ОПЕРАЦИИ НАД КОМПЛЕКСНЫМИ ЧИСЛАМИ

Комплексным числом называется число вида $z = x + iy$, где x и y — действительные числа; $i = \sqrt{-1}$ — так называемая *мнимая единица**, т. е. число, квадрат которого равен -1 (корень уравнения $z^2 + 1 = 0$); x называется *действительной (вещественной) частью комплексного числа*, а y — *мнимой* его *частью*. Для этих чисел приняты обозначения: $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$. Если $y = 0$, то $z = x \in \mathbf{R}$; если же $x = 0$, то число $z = iy$ называется *чисто мнимым*. С геометрической точки зрения, всякому комплексному числу $z = x+iy$ соответствует точка $M(x, y)$ плоскости (или вектор $\overrightarrow{OM}$) и, наоборот, всякой точке $M(x, y)$ соответствует комплексное число $z = x + iy$. Между множествами комплексных чисел и точек плоскости Oxy установлено взаимно однозначное соответствие, поэтому данная плоскость называется *комплексной* и обозначается символом (z) (рис. 7.1).

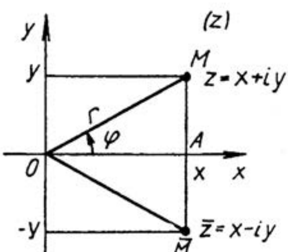


Рис. 7.1

*В технической литературе для мнимой единицы используется также обозначение $j = \sqrt{-1}$.

Множество всех комплексных чисел обозначается буквой $\mathbf{C}$. Отметим, что $\mathbf{R} \subset \mathbf{C}$. Точки, соответствующие действительным числам $z = x$, расположены на оси Ox, которая называется *действительной осью комплексной плоскости*, а точки, соответствующие мнимым числам $z = iy$, — на оси Oy, которую называют *мнимой осью комплексной плоскости*.

Два комплексных числа равны, если соответственно равны их действительные и мнимые части. Числа вида $z = x + iy$ и $\overline{z} = x - iy$ называются *сопряженными* (см. рис. 7.1).

Если $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$ — два комплексных числа, то арифметические операции над ними выполняются по следующим правилам:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2),$$

$$z_1 - z_2 = (x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2) = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2),$$

$$z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1),$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{z_1 \overline{z}_2}{z_2 \overline{z}_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}$$

(последняя операция имеет место при условии, что $z_2 \neq 0$). В результате получаем, вообще говоря, комплексные числа. Указанные операции над комплексными числами обладают всеми свойствами соответствующих операций над действительными числами, т. е. сложение и умножение коммутативны, ассоциативны, связаны отношением дистрибутивности и для них существуют обратные операции вычитания и деления (кроме деления на нуль).

Пример 1. Даны комплексные числа $z_1 = 2 + 3i$, $z_2 = 3 - 4i$, $z_3 = 1 + i$. Найти

$$z = \frac{z_1 + z_1 z_2 + z_2^2}{z_1 + z_3}.$$

► Последовательно вычисляем:

$$z_1 + z_3 = (2 + 3i) + (1 + i) = 3 + 4i,$$
$$z_1 z_2 = (2 + 3i)(3 - 4i) = (6 + 12) + i(9 - 8) = 18 + i,$$
$$z_2^2 = (3 - 4i)^2 = 9 - 24i - 16 = -7 - 24i,$$
$$z_1 + z_1 z_2 + z_2^2 = 2 + 3i + 18 + i - 7 - 24i = 13 - 20i.$$

Тогда

$$z = \frac{13 - 20i}{3 + 4i} = \frac{(13 - 20i)(3 - 4i)}{(3 + 4i)(3 - 4i)} = \frac{(39 - 80) + i(-60 - 52)}{25} =$$
$$= \frac{41}{25} - i\frac{112}{25}. ◄$$

Число $r = |\overrightarrow{OM}| = \sqrt{z\overline{z}}$ называется *модулем комплексного числа* z. Угол φ, образованный вектором $\overrightarrow{OM}$ с положительным направлением оси Ox, называется *аргументом комплексного числа* и обозначается $\varphi = \operatorname{Arg} z$.

Очевидно, что для всякого комплексного числа $z = x + iy$ (см. рис. 7.1) справедливы формулы:

$$\begin{gathered} x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \\ r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \cos \varphi = x/r, \quad \sin \varphi = y/r, \end{gathered} \tag{7.1}$$

где *главное значение аргумента* $\varphi = \arg z$ удовлетворяет следующим условиям: $-\pi < \arg z \leqslant \pi$ или $0 \leqslant \arg z < 2\pi$.

Всякое комплексное число $z = x + iy$ может быть представлено в тригонометрической форме

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) \tag{7.2}$$

или в показательной форме

$$z = re^{i\varphi} \tag{7.3}$$

(так как по формуле Эйлера $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$). Формулы (7.2) и (7.3) целесообразно применять при умножении комплексных чисел, а также возведении их в степень.

Если $z_1 = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$, $z_2 = r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$, то справедливы формулы:

$$z_1 z_2 = r_1 r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)) = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)},$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)) = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)} \quad (z_2 \neq 0),$$

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i \sin n\varphi) = r^n e^{in\varphi}. \tag{7.4}$$

Формула (7.4) называется *формулой Муавра.*

Для извлечения корня n-й степени ($n > 1$, $n \in \mathbf{Z}$) из комплексного числа в формуле (7.2) используется формула, дающая n значений этого корня:

$$\begin{aligned} z_k = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right) = \\ = \sqrt[n]{r}\, e^{i(\varphi + 2\pi k)/n} \quad (k = \overline{0, n-1}). \end{aligned} \tag{7.5}$$

(Под $\sqrt[n]{r}$ понимается арифметический корень.)

Пример 2. Вычислить $(1 + i)^{12}$.

► Представим число $z = 1 + i$ в тригонометрической или показательной форме, используя формулы (7.1):

$$r = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}, \quad \cos \varphi = 1/\sqrt{2}, \quad \sin \varphi = 1/\sqrt{2}, \quad \varphi = \pi/4,$$

$$z = \sqrt{2}\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} e^{\pi i/4}.$$

Тогда по формуле Муавра

$$z^{12} = (\sqrt{2})^{12}\left(\cos\left(12 \cdot \frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(12 \cdot \frac{\pi}{4}\right)\right) = \sqrt{2^{12}} e^{3\pi i} =$$

$$= 64 \cdot (\cos 3\pi + i \sin 3\pi) = -64. ◄$$

Пример 3. Найти корни уравнения $z^6 + 1 = 0$.

▶ Данное уравнение можно переписать так: $z^6 = -1$ или $z = \sqrt[6]{-1}$. Согласно формулам (7.1), число -1 в тригонометрической форме имеет вид

$$-1 = 1 \cdot (\cos \pi + i \sin \pi).$$

С учетом формулы (7.3) корни исходного уравнения:

$$z_k = \sqrt[6]{-1} = 1 \cdot \left(\cos \frac{\pi + 2k\pi}{6} + i \sin \frac{\pi + 2k\pi}{6}\right) = e^{i(\varphi+2\pi k)/n},$$

где $k = \overline{0,5}$. Придавая k последовательно значения $0, 1, \ldots, 5$, находим все шесть возможных корней данного уравнения $z^6 + 1 = 0$:

$$z_0 = \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} i = e^{\pi i/6},$$

$$z_1 = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} = i = e^{\pi i/2},$$

$$z_2 = \cos \frac{5}{6}\pi + i \sin \frac{5}{6}\pi = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} i = e^{-5\pi i/6},$$

$$z_3 = \cos \frac{7}{6}\pi + i \sin \frac{7}{6}\pi = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} i = e^{7\pi i/6} = e^{-5\pi i/6},$$

$$z_4 = \cos \frac{3}{2}\pi + i \sin \frac{3}{2}\pi = -i = e^{-\pi i/2} = e^{3\pi i/2},$$

$$z_5 = \cos \frac{11}{6}\pi + i \sin \frac{11}{6}\pi = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} i = e^{11\pi i/6} = e^{-\pi i/6}. ◀$$

Пример 4. Найти корни уравнения $z^3 - 1 + i\sqrt{3} = 0$.

▶ Так как $z^3 = 1 - i\sqrt{3} = 2 \cdot \left(\cos \frac{\pi}{3} - i \sin \frac{\pi}{3}\right)$, то по формуле (7.5)

$$z_k = \sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{2} \left(\cos \frac{\pi/3 + 2\pi k}{3} - i \sin \frac{\pi/3 + 2\pi k}{3}\right) \quad (k = \overline{0,2}).$$

Следовательно, корнями данного уравнения являются:

$$z_0 = \sqrt[3]{2} \left(\cos \frac{\pi}{9} - i \sin \frac{\pi}{9}\right), \ z_1 = \sqrt[3]{2} \left(\cos \frac{7\pi}{9} - i \sin \frac{7\pi}{9}\right),$$

$$z_2 = \sqrt[3]{2} \left(\cos \frac{13\pi}{9} - i \sin \frac{13\pi}{9}\right). ◀$$

АЗ-7.1

1. Найти значение выражения $(z_1 + 2z_2)z_3$, если $z_1 = 2 + 3i$, $z_2 = 3 + 2i$, $z_3 = 5 - 2i$. (*Ответ:* $54 + 19i$).

2. Даны комплексные числа $z_1 = 3 + 5i$, $z_2 = 3 - 4i$, $z_3 = 1 - 2i$. Найти число $z = ((z_1 + z_3)z_2)/z_3$. $\left(\textit{Ответ: } \frac{38}{5} + \frac{41}{5} i.\right)$

3. Представить в тригонометрической и показательной формах комплексные числа $z_1 = 2 - 2i$, $z_2 = -1 + i$, $z_3 = -i$, $z_4 = -4$.

4. Найти корни уравнения $z^8 - 1 = 0$. $\Big($*Ответ:* $z_0 = 1$, $z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$, $z_2 = i$, $z_3 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$, $z_4 = -1$, $z_5 = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$, $z_6 = i$, $z_7 = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i.\Big)$

Самостоятельная работа

1. 1. Найти значение выражения $z_1(z_2 + z_3)/z_2$, если $z_1 = 4 + 5i$, $z_2 = 1 + i$, $z_3 = 7 - 9i$. (*Ответ:* $40 - 32i$.)

2. Представить в тригонометрической и показательной формах комплексные числа $z_1 = \sqrt{3} + i$, $z_2 = -1 + \sqrt{3}i$, $z_3 = -1/2$.

2. 1. Найти значение выражения $(z_1 + z_2 z_3)/z_2$, если $z_1 = 4 + 8i$, $z_2 = 1 - i$, $z_3 = 9 + 13i$. (*Ответ:* $7 + 19i$.)

2. Решить уравнение $z^2 - i = 0$. (*Ответ:* $\pm(1 + i)/\sqrt{2}$.)

3. 1. Найти значение выражения $(z_1^2 + z_2 + z_3)/z_2$, если $z_1 = 2 - i$, $z_2 = -1 + 2i$, $z_3 = 8 + 12i$. (*Ответ:* $2 + 2i$.)

2. Представить в тригонометрической и показательной формах комплексные числа $z_1 = 2/(1 + i)$, $z_2 = -\sqrt{3} - i$.

7.2. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ К ГЛ. 7

1. Представить в показательной форме следующие комплексные числа:

а) $z = -\sqrt{12} - 2i$; б) $z = -\cos\frac{\pi}{7} + i\sin\frac{\pi}{7}$.

(*Ответ:* а) $4e^{7\pi i/6}$; б) $e^{6\pi i/7}$.)

2. Доказать формулу

$$(1 + \cos\alpha + i\sin\alpha)^{2n} = \left(2\cos\frac{\alpha}{2}\right)^{2n} e^{in\alpha} \quad (n \in \mathbf{N}, \alpha \in \mathbf{R}).$$

3. Найти сумму $\sum\limits_{k=0}^{n} e^{ik\varphi}$. $\left(\text{\textit{Ответ:}}\ \dfrac{e^{i(n+1)\varphi} - 1}{e^{i\varphi} - 1}.\right)$

4. При каких целых значениях n справедливо равенство $(1 + i)^n = (1 - i)^n$? (*Ответ:* $n = 4k$, $k \in \mathbf{Z}$.)

5. Используя формулу Эйлера, найти сумму

$$\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \ldots + \cos nx.$$

$\left(\textit{Ответ:} \left(\sin \dfrac{nx}{2} \cos \dfrac{n+1}{2} x \right) \sin \dfrac{x}{2}. \right)$

6. Доказать тождество

$$x^5 - 1 = (x-1)(x^2 - 2x \cos 72^\circ + 1)(x^2 - 2x \cos 144^\circ + 1).$$

Найти и построить на комплексной плоскости (z) области, которым принадлежат точки $z = x + iy$, удовлетворяющие указанным условиям.

7. $|z - z_1| < 4$, где $z_1 = 3 - 5i$. (*Ответ:* внутренность круга радиусом $R = 4$ с центром в точке z_1.)

8. $|z + z_1| > 6$, где $z_2 = 1 - i$. (*Ответ:* внешность круга радиусом $R = 6$ с центром в точке $-z_2$.)

9. $1 < |z - i| < 3$. (*Ответ:* кольцо между окружностями с центром в точке $z = i$, радиусы которых $r_1 = 1$, $r_2 = 3$.)

10. $0 < |z + i| < 1$. (*Ответ:* внутренность круга радиусом $R = 1$ с выколотым центром в точке $z = -i$.)

11. $0 < \mathrm{Re}(3iz) < 2$. (*Ответ:* горизонтальная полоса, заключенная между прямыми $y = 0$, $y = -2/3$.)

12. $\mathrm{Re}(1/z) > a$, где $a = \mathrm{const}$, $a \in \mathbf{R}$. (*Ответ:* если $a = 0$, то $x > 0$ — правая полуплоскость без границы; если $a > 0$ или $a < 0$, то получаем точки, лежащие соответственно внутри или вне окружности $(x - 1/(2a))^2 + y^2 = 1/(4a^2)$.)

13. $\mathrm{Re}((z - ai)/(z + ai)) = 0$, где $a = \mathrm{const}$, $a \in \mathbf{R}$. (*Ответ:* точка $z = ai$.)

14. $\mathrm{Im}(iz) < 2$. (*Ответ:* полуплоскость, лежащая левее прямой $x = 2$.)

8. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

8.1. ПЕРВООБРАЗНАЯ ФУНКЦИИ И НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Пусть на интервале $(a;b)$ задана функция $f(x)$. Если $F'(x) = f(x)$, где $x \in (a;b)$, то функция $F(x)$ называется *первообразной функцией* функции $f(x)$ на интервале $(a;b)$. Любые две первообразные данной функции $f(x)$ отличаются друг от друга на произвольную постоянную.

Совокупность первообразных $F(x)+C$, где C — произвольная постоянная, функции $f(x)$, $x \in (a;b)$, называется *неопределенным интегралом* функции $f(x)$:

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

Приведем *основные правила интегрирования*:

1) $\int f'(x)dx = \int df(x) = f(x) + C, \quad d\int f(x)dx = d(F(x) + C) =$ $= f(x)dx;$

2) $\int (f(x) \pm \varphi(x))dx = \int f(x)dx \pm \int \varphi(x)dx;$

3) $\int af(x)dx = a\int f(x)dx \quad (a = \text{const});$

4) если $\int f(x)dx = F(x) + C$, то

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C$$

при условии, что a, b — постоянные числа, $a \neq 0$;

5) если $\int f(x)dx = F(x) + C$ и $u = \varphi(x)$ — любая дифференцируемая функция, то

$$\int f(u)du = F(u) + C.$$

Правильность результата интегрирования проверяется дифференцированием найденной первообразной, т. е. $(F(x) + C)' = f(x)$.

На основании определения неопределенного интеграла, правил интегрирования и таблицы производных основных элементарных функций можно составить *таблицу основных неопределенных интегралов*:

1) $\int u^\alpha du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} \quad (\alpha \neq -1);$

2) $\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C;$

3) $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C, \quad a > 0,\ a \neq 1;$

4) $\int e^u du = e^u + C;$

5) $\int \sin u du = -\cos u + C;$

6) $\int \cos u du = \sin u + C;$

7) $\int \frac{du}{a^2+u^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{u}{a} + C = -\frac{1}{a}\operatorname{arcctg}\frac{u}{a} + C \quad (a \neq 0);$

8) $\int \frac{du}{a^2-u^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u+a}{u-a}\right| + C = -\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right| + C;$

9) $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right| + C \quad (a \neq 0);$

10) $\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \arcsin\frac{u}{a} + C = -\arccos\frac{u}{a} + C \quad (a \neq 0);$

11) $\int \frac{du}{\cos^2 u} = \operatorname{tg} u + C;$

12) $\int \frac{du}{\sin^2 u} = -\operatorname{ctg} u + C;$

13) $\int \frac{du}{\sin u} = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{u}{2}\right| + C = \ln\left|\frac{1}{\sin u} - \operatorname{ctg} u\right| + C;$

14) $\int \frac{du}{\cos u} = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C = \ln\left|\frac{1}{\cos u} + \operatorname{tg} u\right| + C;$

15) $\int \operatorname{sh} u du = \operatorname{ch} u + C;$

16) $\int \operatorname{ch} u du = \operatorname{sh} u + C;$

17) $\int \frac{du}{\operatorname{ch}^2 u} = \operatorname{th} u + C;$

18) $\int \frac{du}{\operatorname{sh}^2 u} = -\operatorname{cth} u + C.$

Интегралы 1 — 18 называются *табличными.*

Отметим, что в приведенной таблице буква u может обозначать как независимую переменную, так и непрерывно дифференцируемую функцию $u = \varphi(x)$ аргумента x.

Пример 1. Найти неопределенный интеграл $\int (4x^3 - 2\sqrt[3]{x^2} + 2/x^3 + 1)dx$.

$$\blacktriangleright \int \left(4x^3 - 2\sqrt[3]{x^2} + 2/x^3 + 1\right) dx = 4\int x^3 dx - 2\int x^{2/3} dx +$$

$$+2\int x^{-3} dx + \int dx = 4 \cdot \frac{x^4}{4} - 2 \cdot \frac{x^{5/3}}{5/3} + 2 \cdot \frac{x^{-2}}{-2} + x + C = x^4 -$$

$$-\frac{6}{5}\sqrt[3]{x^5} - \frac{1}{x^2} + x + C. \blacktriangleleft$$

Пример 2. Найти $\int \frac{1+2x^2}{x^2(1+x^2)} dx$.

$$\blacktriangleright \int \frac{1+2x^2}{x^2(1+x^2)} dx = \int \frac{(1+x^2)+x^2}{x^2(1+x^2)} dx = \int \frac{1+x^2}{x^2(1+x^2)} dx +$$

$$+\int \frac{x^2}{x^2(1+x^2)} dx = \int \frac{dx}{x^2} + \int \frac{dx}{1+x^2} = -\frac{1}{x} + \operatorname{arctg} x + C. \blacktriangleleft$$

Пример 3. Найти $\int 3^x e^{2x} dx$.

$$\blacktriangleright \int 3^x e^{2x} dx = \int (3e^2)^x dx = \frac{(3e^2)^x}{\ln(3e^2)} + C. \blacktriangleleft$$

Пример 4. Найти $\int (2x-7)^9 dx$.

$$\blacktriangleright \int (2x-7)^9 dx = \frac{1}{2}\int (2x-7)^9 \cdot 2dx = \frac{1}{2}\frac{(2x-7)^{10}}{10} + C = \frac{1}{20} \times$$

$$\times (2x-7)^{10} + C. \blacktriangleleft$$

Пример 5. Найти $\int \cos(7x-3) dx$.

$$\blacktriangleright \int \cos(7x-3) dx = \frac{1}{7}\int \cos(7x-3) d(7x-3) = \frac{1}{7}\sin(7x-3) + C. \blacktriangleleft$$

Пример 6. Найти $\int \frac{x - \operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx$.

$$\blacktriangleright \int \frac{x - \operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx = \int \frac{x}{1+x^2} dx - \int \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx = \frac{1}{2}\int \frac{d(1+x^2)}{1+x^2} -$$

$$-\int \operatorname{arctg} x \, d(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{2}\ln(1+x^2) - \frac{1}{2}\operatorname{arctg}^2 x + C. \blacktriangleleft$$

Пример 7. Найти $\int \operatorname{ctg} 3x \, dx$.

$$\blacktriangleright \int \operatorname{ctg} 3x \, dx = \int \frac{\cos 3x}{\sin 3x} dx = \frac{1}{3}\int \frac{\cos 3x \cdot 3\, dx}{\sin 3x} = \frac{1}{3}\int \frac{d(\sin 3x)}{\sin 3x} =$$

$= \frac{1}{3}\ln|\sin 3x| + C.$ ◄

Для того чтобы в примерах 4 — 7 применить правило 5, некоторые сомножители подынтегральной функции мы "подводили" под знак дифференциала, после чего использовали подходящий табличный интеграл. Такое преобразование называется *подведением под знак дифференциала.* Так, например, для любой дифференцируемой функции $f(x)$ имеем:

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \int \frac{df(x)}{f(x)} = \ln|f(x)| + C.$$

Пример 8. Найти $\int \frac{\sin 2x}{4+\sin^2 x}dx.$

► $\int \frac{\sin 2x}{4+\sin^2 x}dx = \int \frac{2\sin x\cos x}{4+\sin^2 x}dx = \int \frac{2\sin x}{4+\sin^2 x}d(\sin x) =$

$$= \int \frac{d(4+\sin^2 x)}{4+\sin^2 x} = \ln(4+\sin^2 x) + C.$$ ◄

Пример 9. Найти $\int \frac{x+2}{x^2+4x+5}dx.$

► $\int \frac{x+2}{x^2+4x+5}dx = \frac{1}{2}\int \frac{(x^2+4x+5)'}{x^2+4x+5}dx = \ln\sqrt{x^2+4x+5} + C.$ ◄

АЗ-8.1

Найти указанные интегралы, результаты интегрирования проверить дифференцированием.

1. $\int \left(5x^7 - 3\sqrt[5]{x^3} + \frac{3}{x^4}\right)dx.$

2. $\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x\sin^2 x}dx.$

3. $\int \left(3\sin x + 2^x\cdot 3^{2x} - \frac{1}{9+x^2}\right)dx.$

4. $\int \sqrt[7]{(5x+3)^3}dx.$

5. $\int \frac{x^2}{\sqrt[3]{(x^3+7)^2}}dx.$

6. $\int \left(\sin 7x - e^{3-2x} + \frac{1}{\cos^2 4x}\right)dx.$

7. $\int \left(e^{-3x} - \frac{1}{3x+2} + 3^{2x} - \sin^3 x\cos x\right)dx.$

8. $\int \operatorname{tg} 3x\,dx.$

9. $\int \frac{\sqrt{\arcsin x} - x}{\sqrt{1-x^2}}dx.$

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

Рябушко Антон Петрович
Бархатов Виктор Владимирович
Державец Вера Владимировна
Юруть Иван Ефимович

ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ

В четырех частях

Часть 2

Комплексные числа. Неопределенные и определенные интегралы. Функции нескольких переменных. Обыкновенные дифференциальные уравнения

Учебное пособие

Редактор *Е.В. Малышева*
Художественный редактор *В.А. Ярошевич*
Технический редактор *Н.А. Лебедевич*
Корректор *В.И. Аверкина*
Компьютерная верстка *М.В. Бригер*

Подписано в печать 19.05.2014. Формат 84×108/32. Бумага для офсетной печати. Гарнитура «Журнальная». Офсетная печать. Усл. печ. л. 21. Уч.-изд. л. 24,43. Тираж 1500 экз. Заказ 1332.

Республиканское унитарное предприятие «Издательство “Вышэйшая школа”». Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя, распространителя печатных изданий № 1/3 от 08.07.2013. Пр. Победителей, 11, 220048, Минск. e-mail: market@vshph.com http://vshph.com

Республиканское унитарное предприятие «Издательство “Белорусский Дом печати”». Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя, распространителя печатных изданий № 2/102 от 01.04.2014. Пр. Независимости, 79, 220013, Минск.