Е. Ю. Смирнов

Группы отражений и правильные многогранники

МЦНМО

УДК 514.113.5, 512.542
ББК 22.1.51, 22.14
С50

Смирнов Е. Ю.
Группы отражений и правильные многогранники
Электронное издание
М.: МЦНМО, 2014
48 с.
ISBN 978-5-4439-2077-1

Брошюра написана по материалам цикла лекций, прочитанных автором участникам Летней школы «Современная математика» в Дубне 20—26 июля 2008 г. В ней излагается классификация правильных многогранников в евклидовом пространстве произвольной размерности. Попутно читатель знакомится с такими важными алгебраическими понятиями, как группы отражений и системы корней.

Материал, изложенный в брошюре, иллюстрирует связь геометрии, теории групп и комбинаторики.

Брошюра адресована студентам младших курсов.

Подготовлено на основе книги: *Смирнов Е. Ю.* Группы отражений и правильные многогранники. — М.: МЦНМО,
2009. — 48 с.

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования
119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11,
тел. (499)241–74–83.
http://www.mccme.ru

ISBN 978-5-4439-2077-1

Оглавление

Лекция 1

Свет мой, зеркальце, скажи...
А. С. Пушкин

1.1. Правильные многогранники в размерностях 2 и 3

Пусть E — конечномерное евклидово пространство. Обозначим через $\operatorname{Sym} E$ группу движений пространства E.

Определение 1.1. Пусть M — какое-либо множество в E. Через $\operatorname{Sym} M$ обозначим *группу симметрий* этого множества, т. е. множество движений пространства E, переводящих M в себя (очевидным образом, оно образует группу):

$$\operatorname{Sym} M = \{ f \in \operatorname{Sym} E \mid f(M) = M \}.$$

Через $\operatorname{Sym}^+ M$ будем обозначать *группу вращений множества* M, т. е. группу симметрий множества M, сохраняющих ориентацию пространства.

Определение 1.2. *Выпуклым многогранником* называется ограниченная фигура M, полученная как пересечение конечного числа полупространств в E. *Размерностью* многогранника M называется размерность наименьшего аффинного подпространства в E, содержащего M. Многогранник называется *невырожденным*, если его размерность равна $\dim E$.

Далее под многогранником мы будем без дополнительных оговорок подразумевать выпуклый многогранник.

Упражнение 1.3. Дайте определение грани многогранника и ее размерности.

Если M — многогранник, то группа $\operatorname{Sym} M$ будет сохранять его центр масс. Поэтому мы можем рассматривать ее как подгруппу в группе ортогональных преобразований $\mathrm{O}(V)$ пространства V (поместив начало координат пространства V в центр масс многогранника).

Пусть многогранник M невырожденный. Тогда движение пространства E полностью задается образами вершин многогранника. Кроме того, при движении многогранника вершины обязаны переходить в вершины (почему?). Следовательно, имеется вложение группы $\operatorname{Sym} M$ в группу перестановок вершин многогранника M, т. е. в симметрическую группу

$$\operatorname{Sym} M \hookrightarrow \operatorname{Sym}(\operatorname{Vert}(M)).$$

Значит, $\operatorname{Sym} M$ — конечная группа.

Пример 1.4. Пусть $\mathbb{D}_m$ — правильный m-угольник в $\mathbb{R}^2$. Тогда группа $\operatorname{Sym}\mathbb{D}_m$ (ее называют *группой диэдра*) состоит из $2m$ элементов, m из которых (обозначим их $r_0, \ldots, r_{m-1}$) являются поворотами на углы $2\pi k/m$, где $0 \leqslant k < m$ (они же и образуют подгруппу $\operatorname{Sym}^+\mathbb{D}_m$; при этом $r_0 = \mathrm{Id}$), а другие m суть симметрии $s_1, \ldots, s_m$ относительно прямых, соединяющих вершины m-угольника и середины его сторон с его центром.

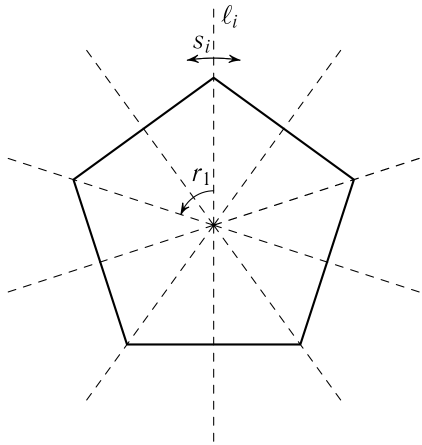

Рис. 2. Образующие группы диэдра

Упражнение 1.5. Покажите, что $\operatorname{Sym}\mathbb{D}_m$ порождается как группа двумя преобразованиями: поворотом r_1 на угол $2\pi/m$ и любой из симметрий s_k.

Упражнение 1.6. Опишите классы сопряженности в группе диэдра (рассмотрите отдельно случаи четного и нечетного m).

Нетрудно выяснить, чему равна композиция двух произвольных осевых симметрий на плоскости.

Упражнение 1.7. Пусть s и s' — осевые симметрии относительно прямых ℓ и ℓ' соответственно. Покажите, что $s's$ есть поворот на угол 2θ, где θ — угол между прямыми ℓ и ℓ'.

Замечание. Отсюда следует, что осевые симметрии s и s' порождают конечную группу тогда и только тогда, когда угол θ (в обозначениях предыдущего упражнения) соизмерим с π.

Тем самым в группе диэдра выполнено соотношение $s_{k+1}s_k = r_1$. Иными словами, композиция симметрий относительно двух осей симметрии, угол между которыми минимален (т. е. составляет π/m), есть поворот на угол $2\pi/m$. Мы получили еще один способ породить группу диэдра двумя элементами:

$$\operatorname{Sym} M = \langle s_k,\, s_{k+1}\rangle.$$

Упражнение 1.8. Пусть g и g' — два элемента из группы диэдра $\mathbb{D}_m$. Выясните, при каких условиях g и g' порождают всю группу $\operatorname{Sym}\mathbb{D}_m$.

Теперь перейдем к описанию групп симметрий правильных многогранников в $\mathbb{R}^3$. Начнем с тетраэдра.

Предложение 1.9. *Пусть $T\subset\mathbb{R}^3$ — правильный тетраэдр. Тогда* $\operatorname{Sym} T\cong\mathfrak{S}_4$.

Доказательство. Как мы уже знаем, группа симметрий многогранника вкладывается в группу перестановок его вершин: $\operatorname{Sym} T\hookrightarrow\mathfrak{S}_4$.

Докажем, что образ этого вложения в случае тетраэдра есть вся группа перестановок $\mathfrak{S}_4$. Для этого достаточно показать, что группа $\operatorname{Sym} T$ содержит все симметрии, соответствующие транспозициям, т. е. перестановкам, меняющим местами два элемента из четырех и оставляющим на месте два других элемента.

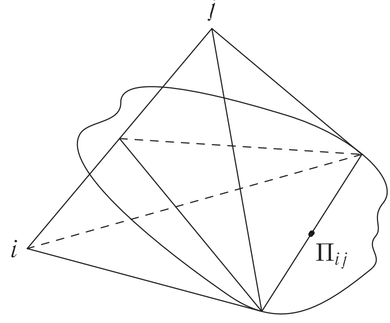

Рис. 3. Симметрия относительно плоскости Π_{ij} соответствует транспозиции $(i\,j)$

Предъявим симметрию тетраэдра σ_{ij}, соответствующую транспозиции $(i\,j)$. Это будет симметрия относительно плоскости, проходящей через центр масс тетраэдра и перпендикулярной ребру, соединяющему i-ю и j-ю вершины. Остальные две вершины тетраэдра будут содержаться в этой плоскости, следовательно, будут неподвижны относительно σ_{ij} (см. рис. 3): □

Отметим, что и группа симметрий диэдра, и группа симметрий тетраэдра порождаются *отражениями* — симметриями относительно подпространств коразмерности 1; в случае диэдра это были симметрии относительно прямых, а в случае тетраэдра — симметрии относительно плоскостей.

Упражнение 1.10. Каким минимальным количеством отражений порождается группа $\operatorname{Sym} T$?

Упражнение 1.11. Покажите, что $\operatorname{Sym}^+ T \cong \mathfrak{A}_4$.

Описание групп симметрий остальных правильных многогранников в $\mathbb{R}^3$ мы оставляем читателю в качестве задачи.

Задача 1.12. а) Опишите группы вращений и симметрий куба и додекаэдра (они совпадают с соответствующими группами для октаэдра и икосаэдра — почему?).

б) Докажите, что группы симметрий куба и додекаэдра тоже порождаются отражениями (т. е. симметриями относительно плоскостей). Какое наименьшее количество отражений нужно взять, чтобы породить эти группы?

Указание. Для описания группы симметрий куба рассмотрите действие этой группы на четырех главных диагоналях куба. Для описания группы додекаэдра может пригодиться следующий факт: в додекаэдр можно вписать пять кубов (они называются кубами Кеплера).

1.2. Группы отражений: основные определения и первые примеры

Мы рассмотрели группы симметрий правильных многоугольников и платоновых тел и выяснили, что они все обладают замечательным свойством: они порождаются отражениями относительно прямых и плоскостей соответственно. Поэтому естественно было бы обобщить понятие групп, порожденных отражениями, на случай пространства произвольной размерности и изучить свойства таких групп. Этим мы сейчас и займемся.

Итак, пусть V — n-мерное евклидово векторное пространство над $\mathbb{R}$. Возьмем какой-нибудь ненулевой вектор $\alpha \in V$. Ортогональная ему гиперплоскость задается условием

$$H_\alpha = \{\beta \in V \mid (\alpha, \beta) = 0\}.$$

Определение 1.13. *Отражением* относительно гиперплоскости H_α называется преобразование $s_\alpha \in \mathrm{O}(V)$, удовлетворяющее следующим условиям:

- $s_\alpha(\alpha) = -\alpha$;
- s_α поточечно оставляет на месте «зеркало» H_α: $s_\alpha(\beta) = \beta$ для всех $\beta \in H_\alpha$.

Упражнение 1.14 (Очень важное!)**.** Докажите, что преобразование s_α задается следующей формулой:

$$s_\alpha(\lambda) = \lambda - 2\frac{(\lambda, \alpha)}{(\alpha, \alpha)}\alpha.$$

Определение 1.15. Конечная подгруппа $W \subset \mathrm{O}(V)$ называется *группой отражений*, если существуют такие отражения $s_{\alpha_1}, \ldots, s_{\alpha_r}$, что

$$W = \langle s_{\alpha_1}, \ldots, s_{\alpha_r} \rangle.$$

Замечание. Правильнее было бы называть W *группой, порожденной отражениями*, так как она, разумеется, состоит не только из отражений. Но «группа отражений» короче, так что мы позволим себе эту вольность речи.

Замечание (для специалистов)**.** Мы определяем группу отражений как подгруппу в $\mathrm{O}(V)$. Таким образом, группой отражений правильно считать не абстрактную группу, а пару, состоящую из группы W и ее фиксированного представления в пространстве V.

В завершение этой лекции мы приведем три важных серии примеров групп отражений в пространствах произвольной размерности. У этих групп даже имеются собственные названия: A_n, B_n и D_n.

Пример 1.16 (A_{n-1}, $n \geqslant 2$)**.** Пусть $e_1, \ldots, e_n$ — ортонормированный базис пространства V. Рассмотрим *симметрическую группу* $\mathfrak{S}_n$, действующую на V перестановками базисных векторов. Заметим, что транспозиция (i, j) действует как отражение, переводящее вектор $e_i - e_j$ в противоположный и оставляющее на месте ортогональную ему гиперплоскость (состоящую из всех векторов, у которых равны i-я и j-я координаты). Поскольку группа $\mathfrak{S}_n$ порождена транспозициями, она является группой отражений. Заметим также, что она даже порождается $n-1$ транспозицией вида $(i, i+1)$; это представление пригодится нам в дальнейшем.

Упражнение 1.17. Убедитесь, что при таком действии $\mathfrak{S}_n$ на V все отражения соответствуют транспозициям в $\mathfrak{S}_n$.

Действие $\mathfrak{S}_n$ на V можно «уменьшить», рассмотрев в V гиперплоскость $\widetilde{V} = \langle e_1 + e_2 + \ldots + e_n \rangle^{\perp}$. Поскольку вектор $e_1 + e_2 + \ldots + e_n$ инвариантен относительно $\mathfrak{S}_n$, группа $\mathfrak{S}_n$ действует и на $\widetilde{V}$. У этого действия уже нет ненулевых инвариантных векторов; действие, обладающее данным свойством, называется *эффективным*.

Пример 1.18 (B_n, $n \geqslant 2$)**.** Пусть снова $V = \mathbb{R}^n$. Пусть на V, как и в предыдущем примере, действует перестановками координат группа $\mathfrak{S}_n$. Рассмотрим еще n отражений s_{e_i}, каждое из которых будет переводить базисный вектор e_i в $-e_i$ и оставлять все остальные базисные векторы на месте. Эти смены знаков образуют группу порядка 2^n, изоморфную $(\mathbb{Z}_2)^n$. Полученные две группы пересекаются тривиально, и $(\mathbb{Z}_2)^n$ есть нормальная подгруппа в их произведении (так как если оператор смены знака сопрягается при помощи какой-либо перестановки координат, то получается другой оператор смены знака). Итак, на V действует группа W, являющаяся произведением этих двух групп и имеющая порядок $2^n \cdot n!$. Нетрудно проверить, что это действие эффективно.

Замечание. Полученная конструкция является *полупрямым произведением* групп $\mathfrak{S}_n$ и $(\mathbb{Z}_2)^n$; ее принято обозначать $\mathfrak{S}_n \rtimes (\mathbb{Z}_2)^n$.