ЛЕТНЯЯ ШКОЛА
СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА

И. В. АРЖАНЦЕВ

ГРАДУИРОВАННЫЕ АЛГЕБРЫ И 14 ПРОБЛЕМА ГИЛЬБЕРТА

МЦНМО
2009

Летняя школа «Современная математика»
Дубна, июль 2007

И. В. Аржанцев

Градуированные алгебры и 14-я проблема Гильберта

Учебное пособие

Москва
Издательство МЦНМО
2009

УДК 512.815.4
ББК 22.14
А80

Проведение летних школ «Современная математика» и издание её материалов поддержано Московской городской Думой и Департаментом образования г. Москвы, а также фондом «Династия», фирмой «НИКС» и корпорацией Boeing.

Рецензенты: д. ф.-м. н., профессор Э. Б. Винберг
к. ф.-м. н., доцент Т. Е. Панов

Аржанцев И. В.
А80 Градуированные алгебры и 14-я проблема Гильберта: Учебное пособие. — М.: МЦНМО, 2009. — 64 с.

ISBN 978-5-94057-491-0

Учебное пособие посвящено классическим задачам коммутативной алгебры и теории инвариатов. Помимо начальных сведений о градуированных алгебрах, их рядах Пуанкаре и многочленах Гильберта, приводятся доказательства теоремы Маколея о размерностях компонент стандартных градуированных алгебр, формулы Молина для ряда Пуанкаре алгебры инвариантов конечной линейной группы и теоремы Нагаты—Стейнберга о том, что алгебра инвариантов некоторой явно заданной линейной алгебраической группы не является конечно порожденной. Последний результат является контрпримером к 14-й проблеме Гильберта. Пособие содержит более 40 задач, к каждой из которых даны подробные указания. Излагаемый материал доступен студентам младших курсов физико-математических специальностей университетов.

Для студентов, аспирантов, преподавателей и научных работников, интересующихся алгеброй, геометрией и комбинаторикой.

ББК 22.14

ISBN 978-5-94057-491-0
9 785940 574910 >

Оглавление

Введение

Что такое современная математика? Это стройные теории, состоящие из цепочки определений, несложных утверждений и эффектных примеров? Или это глубокие и технически сложные теоремы, на разбор только схем доказательств которых может понадобиться несколько часов или дней? Пожалуй, это и то и другое, и трудно отыскать золотую середину, лежащую между двумя описанными крайностями. В этом пособии мы продолжаем поиск недостижимой середины. Здесь излагаются как фрагменты классических теорий, так и доказательства двух трудных результатов: теоремы Маколея о последовательностях размерностей компонент стандартных градуированных алгебр и теоремы Нагаты—Стейнберга о том, что алгебра инвариантов некоторой линейной группы не является конечно порожденной. Последний результат обеспечивает контрпример к 14-й проблеме Гильберта. В настоящее время стало возможным провести доказательства этих теорем, опираясь только на факты из курса линейной алгебры. Этот подход и будет реализован ниже.

Остановимся подробнее на содержании пособия. В первых параграфах излагаются стандартные факты о коммутативных градуированных алгебрах, определяются ряды Пуанкаре и многочлены Гильберта, доказывается теорема о представимости ряда Пуанкаре конечно порожденной градуированной алгебры рациональной функцией. Затем мы переходим к изучению последовательностей размерностей компонент $\dim A_i$ градуированной алгебры $A=\bigoplus_{s\geqslant 0} A_i$. Какие числовые последовательности так реализуются? Этот вопрос наиболее интересен для конечно порожденных алгебр, которые порождаются элементами первой степени. Такие алгебры являются факторалгебрами $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]/I$ алгебры многочленов со стандартной градуировкой. Несложно показать, что идеал I можно заменить на идеал, порожденный одночленами, так, что последовательность размерностей компонент не изменится. Трудная часть теоремы Маколея — это обоснование перехода от произвольного мономиального идеала к лекссегментному идеалу, т. е. идеалу, являющемуся линейной оболочкой конечных отрезков последовательностей одночленов фиксированных степеней в лексикографическом порядке. В § 5 мы доказываем этот результат, следуя работе [10]. Теперь проверка реализуемости данной числовой последовательности сводится к проверке того, что линейная оболочка некоторого набора одночленов есть идеал. Такой критерий является эффективно проверяемым, однако его можно улучшить.

В работе П. Макмюллена [14] в связи с проблемой характеризации g-векторов симплициальных многогранников возникли числовые неравенства, связанные с разложениями натуральных чисел в суммы биномиальных коэффициентов. Это позволило Р. Стенли включить в теорему еще одно эквивалентное условие — числовое неравенство на следующий член последовательности, определяемое предыдущим членом. В терминах этого условия М. Грин получил индуктивное доказательство трудной части теоремы Маколея, в котором используется переход от алгебры A к факторалгебре $A/(a)$, где a — элемент общего положения компоненты A_1. Результаты Грина приведены в § 6. О приложениях теоремы Маколея в теории выпуклых многогранников и топологии можно прочитать в гл. 1 книги [2].

В последних параграфах обсуждаются подалгебры инвариантов линейных групп в алгебре многочленов. Хорошо известно, что алгебра инвариантов конечной группы конечно порождена. Мы приводим три доказательства этой теоремы. Одно из них, принадлежащее Э. Нётер, показывает, что если основное поле имеет нулевую характеристику, то алгебра инвариантов порождается многочленами, степени которых не превосходят порядка группы. Это позволяет для групп небольших порядков явно находить образующие алгебры инвариантов. Параграф 8 посвящен формуле для ряда Пуанкаре алгебры инвариантов конечной группы, которая была найдена Ф. Э. Молиным в 1897 г. Дальнейшие сведения о рядах Пуанкаре алгебр инвариантов линейных групп можно найти в работах [4, § 3] и [7].

Пусть G — бесконечная подгруппа группы $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. Верно ли, что алгебра инвариантов $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]^G$ конечно порождена? Этот вопрос известен как 14-я проблема Гильберта. История этой проблемы весьма драматична[1]. На втором Международном конгрессе математиков, проходившем в августе 1900 года в Париже, Д. Гильберт поставил несколько проблем, решение которых, по его мнению, должно было определить основные направления развития математики XX века. В самом докладе Гильберт предложил 10 проблем, и интересующая нас проблема там не фигурировала. Однако в опубликованном тексте доклада проблем было уже 23, и проблема о конечной порожденности

[1] Приведенные здесь сведения заимствованы из комментариев В. Л. Попова в книге [5]. Там же дан обзор известных в настоящее время результатов, связанных с 14-й проблемой.

алгебры инвариантов имела номер 14. На самом деле при постановке этой проблемы Гильберт ссылается на работу Л. Маурера 1899 г., в которой конечная порожденность алгебры инвариантов была доказана для любой подгруппы $G \subseteq \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, и ставит более общий вопрос.

• Пусть $K \subset \mathbb{K}(x_1, \ldots, x_n)$ — некоторое подполе поля рациональных функций, содержащее поле $\mathbb{K}$. Верно ли, что алгебра $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n] \cap K$ является конечно порожденной?[1]

Однако, как вскоре выяснилось, работа Маурера содержала ошибку, и с тех пор 14-я проблема Гильберта рассматривается именно как проблема о конечной порожденности алгебры инвариантов. В первой половине XX в. было получено несколько положительных результатов в этом направлении. Однако в 1958 г. на конгрессе в Эдинбурге М. Нагата — весьма неожиданно — привел пример группы, для которой алгебра инвариантов не допускает конечного числа порождающих, см. [16] и [17]. Недавно Р. Стейнбергу удалось модифицировать контрпример Нагаты и заменить в доказательстве тонкие соображения из алгебраической геометрии плоских кривых вполне элементарными аргументами; см. [20]. Эти аргументы мы приводим в § 9. В настоящее время 14-ю проблему естественно формулировать так: охарактеризовать те подгруппы $G \subseteq \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, для которых алгебра инвариантов $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]^G$ конечно порождена. В такой формулировке проблема еще очень далека от окончательного решения.

Наш текст включает много заданий для самостоятельного решения. Они разделены на упражнения и задачи. Упражнения — это или совсем простые утверждения, или рутинные проверки. Читатель легко справится с ними самостоятельно. В свою очередь, все задачи снабжены решениями или подробными указаниями.

Для дальнейшего изучения предмета хочется рекомендовать работы Р. Стенли [18] и [19]. Помню свое впечатление от прочтения этих работ: вот каким должен быть математический текст! Часть изложенного ниже материала заимствована оттуда. В будущем я надеюсь развить намеченный Р. Стенли элегантный подход к изучению коэн-маколеевых и горенштейновых алгебр, полных пересечений и сизигий, где абстрактные понятия коммутативной алгебры вводятся для градуированных алгебр и иллюстрируются на примерах алгебр инвариантов конечных групп, и расширить пособие за счет включения этих тем.

[1] Вопрос о конечной порожденности алгебры инвариантов является частным случаем этого вопроса: достаточно рассмотреть в качестве подполя K подполе рациональных функций, инвариантных относительно действия группы.

Основой для пособия послужили материалы курсов, прочитанных на IV и VII летних школах «Современная математика». Эти школы проводятся ежегодно в июле в доме отдыха «Ратмино» недалеко от города Дубна. Также излагаемые темы обсуждались на совместном с Д. А. Тимашёвым спецсеминаре «Алгебраические группы и теория инвариантов» на механико-математическом факультете МГУ им. М. В. Ломоносова и на спецкурсе в Независимом московском университете. Я благодарен слушателям этих курсов и семинаров за ценные замечания и оригинальные решения ряда задач.

Хочу поблагодарить рецензентов пособия профессора Э. Б. Винберга и доцента Т. Е. Панова, а также П. В. Бибикова, А. Ю. Перепечко и Н. А. Печёнкина, прочитавших предварительную версию текста и сделавших ряд ценных замечаний и исправлений.

Дальнейшие замечания прошу высылать на электронный адрес автора `arjantse@mccme.ru`.

§ 1. Основные понятия и примеры

Напомним, что *алгеброй* над полем $\mathbb{K}$ называется $\mathbb{K}$-векторное пространство A с заданной на нем бинарной операцией (умножением) $A \times A \to A$, $(a, b) \to ab$, удовлетворяющей следующим требованиям:

1) $a(b+c) = ab + ac$, $(b+c)a = ba + ca$ для любых $a, b, c \in A$;

2) $(\lambda a)b = a(\lambda b) = \lambda(ab)$ для любых $\lambda \in \mathbb{K}$, $a, b \in A$.

Всюду далее мы будем дополнительно предполагать, что

3) в A имеется *единица*, т. е. такой элемент 1, что $1a = a1 = a$ для любого $a \in A$;

4) алгебра A *ассоциативна*, т. е. $(ab)c = a(bc)$ для любых $a, b, c \in A$.

Заметим, что наличие единицы позволяет считать поле $\mathbb{K}$ канонически вложенным в алгебру A по формуле $\lambda \to \lambda 1$ (проверьте, что это вложение).

Укажем несколько примеров алгебр:

1) алгебра многочленов $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$;

2) алгебра квадратных матриц $\mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{K})$;

3) алгебра $C[0, 1]$ непрерывных вещественнозначных функций на отрезке $[0, 1]$ с поточечным умножением на скаляр, сложением и умножением функций. В этом примере $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Для двух подпространств $U, V \subseteq A$ определим их произведение UV как линейную оболочку элементов вида ab, где $a \in U$ и $b \in V$. Аналогично определяется произведение любого конечного набора подпространств.

Определение 1. *Градуировкой* на алгебре A называется такое разложение A в прямую сумму подпространств

$$A = \bigoplus_{s \in \mathbb{Z}_+} A_s,$$

что

$$A_{s_1} A_{s_2} \subseteq A_{s_1+s_2} \quad \text{для любых } s_1, s_2 \geqslant 0.$$

Градуированная алгебра — это алгебра с фиксированной градуировкой. Градуировку будем называть *тривиальной*, если $A_0 = A$ и, значит, $A_s = 0$ при $s > 0$. Тривиальная градуировка имеется на любой алгебре.

Подпространства A_s называются (однородными) *компонентами* градуированной алгебры A. Элемент a называют *однородным*, если $a \in A_s$ для некоторого $s \geqslant 0$. В этом случае говорят, что элемент a имеет степень s, и записывают $\deg a = s$. Степень элемента 0 не определена, и можно считать, что она принимает все возможные значения.

Произвольный элемент $a \in A$ единственным образом записывается в виде суммы $a = a_{j_1} + \ldots + a_{j_k}$ однородных элементов, которые мы будем называть (однородными) *компонентами* этого элемента.

Задача 1. Докажите, что единица — это однородный элемент степени нуль.

Приведем примеры градуировок на алгебре многочленов:

1) $A = \mathbb{K}[x]$, $\deg x = 1$, $\mathbb{K}[x] = \mathbb{K} \oplus \langle x \rangle \oplus \langle x^2 \rangle \oplus \langle x^3 \rangle \oplus \ldots$;

2) более общим образом, $A = \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ и $\deg x_1^{i_1} \ldots x_n^{i_n} = i_1 + \ldots + i_n$;

3) $A = \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ и $\deg x_1^{i_1} \ldots x_n^{i_n} = 2i_1$.

Эти примеры можно обобщить, рассмотрев градуировку алгебры $A = \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$, определенную условиями $\deg x_i = d_i$. Целые неотрицательные числа d_i называют *весами* переменных. Назовем такие градуировки на алгебре многочленов *весовыми*. Для весовой градуировки $\deg x_1^{i_1} \ldots x_n^{i_n} = i_1 d_1 + \ldots + i_n d_n$. В частности, во втором примере $d_1 = \ldots = d_n = 1$, а в третьем $d_1 = 2$ и $d_2 = \ldots = d_n = 0$.

Упражнение 1. Приведите пример градуировки на $\mathbb{K}[x]$, для которой x не является однородным элементом.

Задача 2. Докажите, что алгебры а) $\mathrm{Mat}_{n \times n}(\mathbb{K})$; б) $C[0, 1]$ допускают только тривиальную градуировку.

Всюду далее мы считаем алгебру A *коммутативной*, т. е. предполагаем, что $ab = ba$ для любых $a, b \in A$.

Определение 2. 1. Элемент $a \in A$ называется *обратимым*, если найдется такой элемент $b \in A$, что $ab = 1$.

2. Элемент $a \in A$ называется *делителем нуля*, если $a \neq 0$ и найдется такой элемент $b \in A$, $b \neq 0$, что $ab = 0$.

3. Элемент $a \in A$ называется *нильпотентным*, если $a \neq 0$ и найдется такое $n \in \mathbb{N}$, что $a^n = 0$.

Упражнение 2. Докажите, что в конечномерной градуированной алгебре однородный элемент положительной степени является нильпотентным.

Определение 3. Подпространство U градуированной алгебры A называется *однородным*, если

$$U = \bigoplus_{s \geqslant 0} (U \cap A_s).$$

Упражнение 3. Проверьте, что подпространство U однородно тогда и только тогда, когда для каждого $u \in U$ все его компоненты лежат в U.

Аржанцев Иван Владимирович

ГРАДУИРОВАННЫЕ АЛГЕБРЫ И 14-Я ПРОБЛЕМА ГИЛЬБЕРТА

Подписано в печать 17.03.2009 г. Формат $60 \times 90\ ^1/_{16}$. Бумага офсетная.
Печать офсетная. Печ. л. 4. Тираж 1000 экз. Заказ № .

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования.
119002, Москва, Большой Власьевский пер., д. 11. Тел. (499) 241–74–83

Отпечатано по CtP-технологии в ОАО «Печатный двор» им. А. М. Горького.
197110, Санкт-Петербург, Чкаловский проспект, 15.