Е. В. Любецкая

Готовимся к ЕГЭ

МАТЕМАТИКА

не только для отличников

Действия со степенями

Логарифмы

Решение уравнений и неравенств

Графики функций

Тригонометрия

Производная функции

Текстовые задачи

Задачи и упражнения для самостоятельного решения

Мини-тесты и домашние тесты

Обзор вариантов ЕГЭ

bhv®

Е. В. Любецкая

Готовимся к ЕГЭ

Математика не только для отличников

Санкт-Петербург
«БХВ-Петербург»
2011

УДК 373.167.1(075.3)
ББК 22.141я721
Л93

Любецкая Е. В.

Л93 Готовимся к ЕГЭ. Математика не только для отличников. — СПб.: БХВ-Петербург, 2011. — 384 с.: ил.

ISBN 978-5-9775-0626-7

В основу пособия легли материалы авторских курсов по подготовке к ЕГЭ, учебные материалы и методика которых позволяют значительно повысить текущий уровень подготовки. Материалы охватывают курс алгебры 10—11 классов и затрагивают темы 8—9 классов: действия со степенями, логарифмы, решение уравнений, решение неравенств, графики функций, тригонометрия, производная функции, текстовые задачи. Материал закрепляется с помощью упражнений, мини-тестов, домашних тестов. Для наиболее эффективной работы пособие рекомендуется использовать как рабочую тетрадь: в заданиях оставлены пропуски для вписывания ответов. Правильные ответы приведены в конце книги.

Для образовательных учреждений

УДК 373.167.1(075.3)
ББК 22.141я721

Группа подготовки издания:

Главный редактор	*Екатерина Кондукова*
Зам. главного редактора	*Людмила Еремеевская*
Зав. редакцией	*Григорий Добин*
Редактор	*Анна Кузьмина*
Компьютерная верстка	*Ольги Сергиенко*
Корректор	*Зинаида Дмитриева*
Дизайн обложки	*Елены Беляевой*
Зав. производством	*Николай Тверских*

Лицензия ИД № 02429 от 24.07.00. Подписано в печать 01.12.10.
Формат $60\times90^1/_{16}$. Печать офсетная. Усл. печ. л. 24.
Тираж 2000 экз. Заказ №
"БХВ-Петербург", 190005, Санкт-Петербург, Измайловский пр., 29.

Санитарно-эпидемиологическое заключение на продукцию
№ 77.99.60.953.Д.005770.05.09 от 26.05.2009 г. выдано Федеральной службой
по надзору в сфере защиты прав потребителей и благополучия человека.

Отпечатано с готовых диапозитивов
в ГУП "Типография "Наука"
199034, Санкт-Петербург, 9 линия, 12

ISBN 978-5-9775-0626-7

Оглавление

Посвящается моей дочке Лерке,
лучшей девочке на свете.

Предисловие

Мне очень хотелось написать понятную книгу по школьной математике, чтобы ребята могли по ней самостоятельно готовиться к ЕГЭ или изучать темы, пропущенные в школе. Также книга может быть интересна учителям для обмена опытом объяснения материала.

Так уж сложилась моя жизнь, что, будучи по склонностям гуманитарием, я всю жизнь занималась математикой. Я провела немало долгих часов, пытаясь понять мысль автора очередного учебника. Я трудно понимаю новый материал, и до сих пор мне бывает грустно и стыдно от собственной несообразительности.

Поэтому я начала вести курсы подготовки к ЕГЭ "Математика с человеческим лицом". У наших курсов есть принцип "трех П": математика должна быть Понятной, Приятной и Полезной. За три года существования курсов мы постоянно правили методические материалы таким образом, чтобы все ребята понимали нас. Эта книга и есть сборник наших методических материалов.

Профессиональному математику она может показаться странной и, местами, вульгарной. Но наш опыт подтверждает, что такое изложение делает материал понятным школьнику.

Основной принцип книги — постоянный контакт с учеником, проверка его понимания материала. Для ребят, в большей степени интересующихся математикой, есть вставки "Интересный факт". В тексте, помеченном как "Обсуждение" или "Замечание", я позволяю себе наибольшую вольность в обращении с математическими понятиями.

Я стараюсь писать так же, как я говорю своим ученикам, но, конечно, текст не может полностью заменять живое общение. Хотя бы потому, что на курсах мы играем, общаемся, отмечаем праздники и очень внимательно следим за тем, чтобы все ученики понимали материал.

Если книга понравится преподавателю, то у меня есть для него совет: не говорить непрерывно больше трех минут. Какой бы с вашей точки зрения понятной и неразрывной ни была ваша речь, остановитесь через три минуты и задайте ученику контрольный вопрос; их много в книге. На курсах все наши преподаватели честно подчиняются этому принципу.

Выражаю благодарности моим ученикам, вместе с которыми мы создавали этот материал, моей дочке, которая отпустила меня на целый месяц для написания книги.

Особенно я благодарю Рассказова Александра, сделавшего огромный вклад в создание книги. Он вычитывал мои ошибки, трудился над созданием примеров. Он является автором многих текстовых задач. Спасибо.

Выражаю благодарность Анне Георгиевне Малковой за организацию интенсива, соведущим интенсива Георгию Мутафяну и Илье Поливанову за активное сотрудничество и моей семье за моральную поддержку.

С огромной благодарностью Дане и Александру Новичковым, моим соведущим и единомышленникам, соратникам и друзьям. Илье Марковичу Ланцману, финансовому директору проекта, человеку, умеющему решать любые проблемы.

Уважаемые коллеги!

Убедительно прошу вас не выкладывать материалы из этого пособия в Интернет и при использовании на занятиях ссылаться на составителей. Буду рада, если это пособие окажется полезным вам в работе.

По всем вопросам обращайтесь:
www.ege-guru.ru, **liin@math-study.ru**.

С уважением, *Елена Любецкая*.

Введение

Хочу сказать пару слов о том, как построена книга и как ей пользоваться.

Книга содержит 10 глав, каждая из которых посвящена отдельной теме.

В книге специально оставлены пропуски в заданиях упражнений — читатель может пользоваться книгой как рабочей тетрадью и вписывать ответы рядом с заданиями. То есть, когда в обсуждении или упражнении встречается запись вида

$$2^2 \cdot 2^3 = \underbrace{2 \cdot 2}_{2^2} \cdot \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2}_{2^3} = 2^{\underline{\quad}},$$

то необходимо вписать ответ:

$$2^2 \cdot 2^3 = \underbrace{2 \cdot 2}_{2^2} \cdot \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2}_{2^3} = 2^{\underline{5}}$$

Если предлагается продолжить формулу

$$a^n \cdot a^m = a^{\qquad},$$

то это следует сделать так:

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

В книге читатель встретит примеры, упражнения, минитесты, домашние тесты.

В примерах приводится решение задач, неравенств, уравнений. Для удобства читателей пример начинается символом ▶, а завершается символом ◁.

Упражнения предусматривают самостоятельную работу. К некоторым упражнениям приводятся подсказки — пояснения, как стоит решать поставленную задачу. Ответы к упражнениям приведены в конце книги.

Мини-тесты служат для самопроверки; решая их, вы сможете проверить, удалось ли вам усвоить теорию, изложенную выше.

Домашние тесты можно решать самостоятельно или предложить группе учеников. Сложность заданий в домашних тестах увеличивается от первого к последнему заданию. Первый тест наиболее простой; тесты 11 и 12 заметно более сложные.

ГЛАВА 1

Действие со степенями

Основные формулы

Свойства степеней:

- $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$, $\qquad \dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$;
- $(a^n)^m = a^{nm}$;
- $(ab)^n = a^n \cdot b^n$ $\qquad \left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$;
- $a^0 = 1$;
- $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$;
- $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$.

Модуль числа:

$$|t| = \begin{cases} t, \text{ если } t > 0, \\ -t, \text{ если } t > 0. \end{cases}$$

Примеры. $9^2 = 81$, $\sqrt[2m+1]{a^{2m+1}} = a$.

Таблица степеней:

$2^2 = 4$	$3^2 = 9$	$4^2 = 16$	$5^2 = 25$	$6^2 = 36$	$7^2 = 49$	$8^2 = 64$
$2^3 = 8$	$3^3 = 27$	$3^7 = 2187$	$5^3 = 125$	$6^3 = 216$	$7^3 = 343$	$8^3 = 512$
$2^4 = 16$	$3^4 = 81$	$2^7 = 128$	$5^4 = 625$	$6^4 = 1296$		
$2^5 = 32$	$3^5 = 243$	$4^5 = 1024$				
$2^6 = 64$	$3^6 = 729$					
$2^7 = 128$	$3^7 = 2187$					$9^2 = 81$
$2^8 = 256$						$9^3 = 729$

Действия со степенями

Поговорим о действиях со степенями. Пусть $n = 1, 2, 3, 4, \ldots$ — натуральные числа. Тогда

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ раз}}.$$

То есть a^n — это указание умножить число a само на себя n раз.

Пример. ▶ $a^3 = a \cdot a \cdot a.$ ◁

Обсуждение. А что такое $3a$? Это $a + a + a.$

Типовая ошибка. Пожалуйста, не путайте умножение и сложение. Еще раз повторим:

$$a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a = a^5,$$

$$a + a + a + a + a = 5a.$$

Для действий со степенями существуют ровно *три* базовые формулы, а все остальные формулы выводятся из них. Дальше мы узнаем, что бывают различные степени, в том числе отрицательные и дробные (т. е. a^{-3}, $a^{6/5}$). Базовые формулы верны для *любых* степеней. Но для натуральных степеней их легко проверить и вывести. Итак, давайте перейдем к формулам.

1. $a^n \cdot a^m$.

   Обсуждение.

$$2^3 \cdot 2^2 = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2}_{2^3} \cdot \underbrace{2 \cdot 2}_{2^2} = 2\_\_\_.$$

   В какой степени? Сколько раз мы умножали 2 само на себя? Обратите внимание, какую операцию мы произвели со степенями. А теперь продолжите формулу:

$$a^n \cdot a^m = a\_\_\_\_\_\_\_\_\_ .$$

$$\boxed{a^n \cdot a^m = a^{n+m}} \qquad (1.1)$$

2. $\left(a^n\right)^m$.

   Обсуждение. Продолжим формулу.

$$\left(2^3\right)^2 = \underbrace{2^3 \cdot 2^3}_{\left(2^3\right)^2} = \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2}_{2^3} \cdot \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2}_{2^3} = 2 \quad .$$

   Какую операцию мы произвели со степенями?

   А теперь продолжите формулу: $\left(a^n\right)^m = a\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ .$

$$\boxed{\left(a^n\right)^m = a^{n \cdot m}} \qquad (1.2)$$

Замечание

Мы увидели, что $\left(a^n\right)^m = a^{n \cdot m}$ и $a^{n \cdot m} = a^{m \cdot n} = \left(a^m\right)^n$. То есть $\left(a^m\right)^n = \left(a^n\right)^m$.

Пример. ▶ $2^6 = 2^{2 \cdot 3} = \left(2^2\right)^3 = \left(2^3\right)^2$. То есть $2^6 = 4^3 = 8^2$. ◁

На игре формул (1.1) и (1.2) строится алгоритм быстрого возведения в степень.

Упражнение 1.1

Вычислите 2^{10}. Сколько действий вы сделаете? Решите задачу в 5 действий.

Типовая ошибка — путать формулы:

$$a^n a^m = \underline{\qquad\qquad\qquad}.$$

$$\left(a^n\right)^m = \underline{\qquad\qquad\qquad}.$$

Кстати, продолжите их.

3. $(a \cdot b)^n$.

Обсуждение. Обратите внимание, что это первая и последняя базовая формула, в которой участвуют разные основания (a и b). Обсудим на примере:

$$(2 \cdot 3)^2 = 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 2^{—} \cdot 3^{—}.$$

Допишите степень двух и трех.

А теперь закончите формулу: $(a \cdot b)^n = a^{—} \cdot b^{—}$.

$$\boxed{(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n} \qquad (1.3)$$

Из базовых формул выводятся дополнительные.

Упражнение 1.2

Используя базовые формулы, продолжите формулу:

1) $a^n a^m = a^{n+m}$ $\qquad \dfrac{a^n}{a^m} = a^{\underline{\qquad}}$;

2) $(a \cdot b)^n = a^n b^n$ $\qquad \left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^{—}}{b^{—}}$.

Пояснение. Рассмотрим формулы на примерах:

◈ $$\frac{2^5}{2^4} = \frac{\overbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}^{5\ \text{раз}}}{\underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}_{4\ \text{раза}}} = 2.$$

Какую операцию мы произвели со степенями?

◈ $$\left(\frac{2}{5}\right)^3 = \frac{2}{5}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{5} = \frac{2\cdot 2\cdot 2}{5\cdot 5\cdot 5} = \frac{2^3}{5^3}.$$

Упражнение 1.3

Вычислите[1]:

1) $2^5 \cdot 2^6 = 2$ ____ ;

2) $3^5 \cdot \left(3^2\right)^3 = 3$ ____ ;

3) $4^3 \cdot 2^3 = 2$ ____ (обратите внимание, что здесь основаниями являются разные числа: 2 и 4. Используйте $4 = 2^2$);

4) $\left(4^5\right)^2 \cdot 2 = 2$ ____ ;

5) $2^3 \cdot 4^2 \cdot \left(8^2\right)^3 = 2$ ____ ;

6) $\dfrac{5^2 \cdot \left(25^2\right)^3}{125^2} = 5$ ____ ;

7) $\dfrac{4^{10} \cdot 16^2}{\left(8^3\right)^3} = 2$ ____.

Интересный факт

Вы на каникулах решили устроиться на работу садовником. Один хозяин предлагает платить вам 100 руб. в час, а второй — по следующей схеме: первый час — 2 руб., зато в каждый следующий час — в 2 раза больше, чем в предыдущий. Рабочий день — 10 часов у обоих. К какому работодателю вы пойдете работать?

Ответ. У второго вы получите только за последний час 1024 руб. Кроме этого, вы заработаете деньги и в предыдущие часы. У первого же вы заработаете 1000 руб. за весь день.

[1] Здесь и далее в ответах указывается правая часть равенства целиком.

Отрицательные степени

Натуральные степени имели интуитивно понятный смысл. Дальше мы будем говорить о степенях, которые вводятся определениями. То есть мы сами договариваемся о том, какой смысл они имеют. В этом случаи мы используем обозначение З.

Мы договоримся: a^0 З 1.

$$\boxed{a^0 = 1} \tag{1.4}$$

УПРАЖНЕНИЕ 1.4

Вычислите значения выражений:

1) $5^0 =$ __________________________;

2) $\left(185^0\right)^5 =$ __________________________;

3) $\left(29^{18}\right)^0 =$ __________________________.

Обсуждение. Как вы думаете, почему $a^0 = 1$? Ведь часто, кажется, что a^0 должно быть равно 0? Удобнее приравнять их. Но если принять a^0 равным 0, то получим противопоставление. Поясним на примере.

Пример. ▶ $\dfrac{3^2}{3^2} = \dfrac{9}{9} = 1$. С другой стороны $\dfrac{3^2}{3^2} = 3^{2-2} = 3^0 = 1$. ◁

Теперь осталось обсудить отрицательные и дробные степени.

$$\boxed{a^{-n} \text{ З } \frac{1}{a^n}} \tag{1.5}$$

Можно понимать так: отрицательная степень — это "лифт", перемещающий все, кроме минуса, в другую часть дроби: сверху вниз, снизу вверх.

Минус при вынесении его из отрицательной степени никогда не меняет знак самого выражения! Проще говоря: посмотрите на формулу. В левой части имеется минус в степени, а в правой части минуса нет.

Упражнение 1.5

Используя формулу

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n},$$

вычислите:

1) $a^{-3} =$ ________________;

2) $2^{-5} =$ ________________;

3) $2^{-1} =$ ________________;

4) ________________ $= \frac{1}{a^7}$;

5) ________________ $= \frac{1}{3^8}$;

6) ________________ $= \frac{1}{a}$.

Упражнение 1.6

Вычислите:

1) $\frac{1}{2^{-6}} = 2^{\_\_\_\_}$;

2) $\frac{1}{81} = 3^{\_\_\_\_}$;

3) $\frac{1}{216} = 6^{\_\_\_\_}$;

4) $\frac{1}{\frac{1}{125}} = 5^{\_\_\_\_}$.

Упражнение 1.7

Вычислите:

1) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-1} =$ ________________;

2) $\frac{27}{8} = \left(\frac{2}{3}\right)^{\_\_\_\_}$.

Упражнение 1.8

Используя формулы для действий со степенями, вычислите:

1) $a^6 \cdot \left(a^{-2}\right)^3 =$ ________________;

2) $\frac{a^5\left(a^{-2}\right)^{-1}}{\left(a^{-3}\right)^2} = a^{\_\_\_\_}$.

Упражнение 1.9

Запишите выражение в виде степени числа *a*:

1) $-\frac{1}{a^{10}}$; 2) $-\frac{1}{a^{-7}}$; 3) $-\frac{5}{a^{9}}$.

Упражнение 1.10

Избавьтесь от отрицательных степеней:

1) $2a^{-4}$; 2) $(2a)^{-4}$; 3) $\frac{a^{-5}}{3^{-2}}$.

В упражнении 1.8 смотрите внимательнее, какое именно выражение возводите в степень. Как это различать?

Примеры.

1. $a^{-3} = \frac{1}{a^3}$.

2. $2a^{-3} = 2 \cdot a^{-3} = 2 \cdot \frac{1}{a^3} = \frac{2}{a^3}$.

Здесь не поставлены скобки, т. к. только число *a* возводится в степень –3.

3. $(2a)^{-3} = \frac{1}{(2a)^3} = \frac{1}{2^3 \cdot a^3} = \frac{1}{8a^3}$.

Здесь скобки выделяют выражение, возведенное в степень.

Дробные степени

Договоримся, что:

$$\boxed{a^{\frac{m}{n}} \text{ з } \sqrt[n]{a^m}} \qquad (1.6)$$

Упражнение 1.11

Используя формулу (1.6), вычислите:

1) $a^{\frac{5}{7}} =$ ________________; 4) ________________ $= \sqrt[5]{a}$;

2) $a^{\frac{1}{3}} =$ ________________; 5) ________________ $= \sqrt{3}$.

3) ________________ $= \sqrt[7]{a^5}$.

Упражнение 1.12

Выполните более сложные задания:

1) $\sqrt{\sqrt{a}} = a$ ______; 4) $25^{1/2} =$ ________________;

2) $\sqrt[3]{\sqrt[5]{a^3}} = a$ ______; 5) $-\dfrac{1}{\sqrt[4]{a^7}} =$ ________________;

3) $a\sqrt{a} = a$ ______; 6) $-\dfrac{3}{\sqrt[9]{a^{13}}} =$ ________________.

Решение:

1) $\sqrt{\sqrt{a}} = \sqrt{a^{1/2}} = \left(a^{1/2}\right)^{1/2} = a^{1/4}$.

3) $a\sqrt{a} = a^1 \cdot a^{\frac{1}{2}} = a^{1+\frac{1}{2}} = a^{\frac{3}{2}}$.

Этюд "Такие разные степени"

Люди часто путают определения отрицательных и дробных степеней. Если вы тоже их путаете, то вычислите значение выражений. Каждый столбец можно использовать в качестве справочного материала (т. е. уточнять, какая степень имеет какой смысл).

Упражнение 1.13

Вычислите:

1) $8^3 =$ ________________; 4) $8^{-1/3} =$ ________________;

2) $8^{-3} =$ ________________; 5) $-8^{-1/3} =$ ________________;

3) $8^{1/3} =$ ________________; 6) $4^2 =$ ________________;

7) $4^{-2} =$ ____________________;

8) $4^{1/2} =$ ____________________;

9) $4^{-1/2} =$ ____________________;

10) $-4^{-1/2} =$ ________________.

Использование свойств степеней

Вычисление значений числовых выражений

Разберем решение некоторых типовых задач из ЕГЭ. Будем разбирать по шагам.

Будем использовать таблицу степеней.

Пример. ▶ $\sqrt[3]{4^3} = 4;\ \sqrt{3^2} = 3.$ ◁

Упражнение 1.14

Вычислите:

1) $\sqrt[4]{5^4} =$ ____________________;

2) $\sqrt[7]{3^3} =$ ____________________.

Пример. ▶ $\sqrt[3]{64} = \sqrt[3]{4^3} = 4.$ Чтобы при извлечении корня третьей степени получить целое число, необходимо под корнем найти куб некоторого числа. То есть мы хотим: $64 = x^3$. Угадываем x; $x = 4$. Тогда переходим к предыдущему шагу. ◁

Пример. ▶ $\sqrt{9} = \sqrt{3^2} = 3.$ Под корнем ищем квадрат некоторого числа. ◁

Упражнение 1.15

Вычислите:

1) $\sqrt[4]{625} = \sqrt[4]{\_\_\_\_\_\_^4} =$ ____________;

2) $\sqrt[7]{2187} =$ ________________________;

3) $\sqrt[5]{1024} =$ ________________.

Рассмотрим таблицу. В первом столбце указаны известные числовые равенства. Продолжите заполнение второго столбца.

Известно:	**Тогда:**
$2^1 = 2$	$0,2^1 = 0,2$
$2^2 = 4$	$0,2^2 =$ ____________
$2^3 = 8$	$0,2^3 =$ ____________

Понятно, что здесь главной задачей является правильно подвинуть запятую. Перемножьте столбиком!

Итак, мы увидели, что если число имеет один знак после запятой, то при возведении в каждую последующую степень запятая передвигается еще на один знак. Значит, количество знаков после запятой будет равно степени числа. Если число имеет изначально два знака после запятой, то при возведении в каждую последующую степень запятая сдвигается на два знака. Если три знака после запятой, то сдвигаем на три знака, и т. д. Значит, десятичные дроби можно возводить в степень следующим образом: угадывать *сдвиг* и *число*.

Пример. ▶ $0{,}3^3 = 0{,}027$. Как я это узнала? Знаю, что $3^3 = 27$ и сдвиг равен трем знакам. Можете проверить умножением. ◁

Пример. ▶ $0{,}3^4 = 0{,}0081$, т. к. $3^4 = 81$ и сдвиг равен четырем знакам. ◁

Упражнение 1.16

Вычислите:

1) $0,5^3 =$ ________;   2) $0,2^3 =$ ________;   3) $0,02^3 =$ ________.

Но наша задача будет сложнее. Мы будем угадывать число по правой части.

Пример. ▶ $0{,}064 = x^3$. Чему равен x?

Вижу, что к третьей степени сдвиг стал равен трем знакам. Значит, изначально число имело вид: 0, a (где $a \neq 0$ и a — цифра). Теперь угадаем a. $64 = 4^3$. Значит, $x = 0{,}4$; следовательно, $0{,}064 = 0{,}4^3$. ◁

Упражнение 1.17

Используя известные числовые равенства, вычислите:

1) $0{,}125 = x^3$. $x =$ ________________.

2) $0{,}1296 = x^4$. $x =$ ________________.

3) $0{,}00243 = x^5$. $x =$ ________________.

Упражнение 1.18

Даны равенства:

$$\sqrt[3]{0{,}125} = \sqrt[3]{x^3} = \sqrt[3]{0{,}5^3} = 0{,}5;$$

$$\sqrt[4]{0{,}1296} = \sqrt[4]{x^4} = \sqrt[4]{0{,}6^4} = 0{,}6.$$

Используя эти равенства, вычислите:

1) $\sqrt[3]{0{,}343} =$ ________________.

3) $\sqrt[6]{0{,}000729} =$ ________________.

2) $\sqrt[3]{0{,}512} =$ ________________.

Таким образом, мы угадываем отдельно *число* и *сдвиг*!

Мини-тест

Теперь решим мини-тест.

Правила заполнения: мини-тест состоит из трех таблиц. В каждой таблице выберите произвольную строку и выполните задание. В задании 3 выберите по одной строке в каждом варианте. На тест отводится 10—15 минут. По окончании работы проверьте результат. Если у вас оказалось не более двух ошибок, вы хорошо поняли теорию, а автор — хорошо ее изложил.

Итак.

1. Записать в виде степени числа a:

$\frac{1}{a^4}$	$-\frac{1}{a^5}$	$\sqrt[3]{a}$	$\sqrt[3]{a^4}$	$\frac{1}{\sqrt{a}}$
$\frac{1}{a^8}$	$-\frac{1}{a^{-6}}$	$\sqrt[5]{a}$	$\sqrt[5]{a^8}$	$\frac{1}{\sqrt[3]{a^2}}$
$\frac{1}{a^5}$	$-\frac{1}{a^{-7}}$	$\sqrt[7]{a}$	$\sqrt[7]{a^2}$	$-\frac{1}{\sqrt[3]{a^{-2}}}$
$\frac{1}{a^{13}}$	$\frac{1}{a^{-10}}$	$\sqrt[8]{a}$	$\sqrt[8]{a^{15}}$	$\frac{1}{\sqrt[3]{a^{-4}}}$

2. Избавиться от отрицательных и дробных степеней:

a^{-2}	$-a^{\frac{1}{7}}$	$4a^{-3/7}$	$-5\frac{1}{a^{-\frac{3}{7}}}$
a^{-5}	$-8a^{\frac{6}{13}}$	$-2a^{-2/5}$	$\frac{3}{a^{-1/3}}$
a^{-7}	$8a^{\frac{6}{13}}$	$2a^{-2/5}$	$\frac{2}{a^{-8/3}}$
a^{-19}	$-a^{\frac{6}{31}}$	$4a^{-5/7}$	$\frac{1}{3}a^{-2}$

3. Вычислить:

- вариант 1:

$\sqrt[4]{0}$	$\sqrt[4]{625}$	$\sqrt[4]{0{,}0016}$
$\sqrt[4]{1}$	$\sqrt[4]{1296}$	$\sqrt[3]{0{,}008}$
$\sqrt[4]{16}$	$\sqrt[4]{\dfrac{16}{81}}$	$\sqrt[5]{0{,}00001}$
$\sqrt[4]{81}$	$\sqrt[4]{\dfrac{256}{625}}$	$\sqrt[3]{0{,}343}$

- вариант 2:

$\left(\sqrt[6]{7^3}\right)^2$	$\sqrt{\sqrt[3]{729}}$
$\left(\sqrt[10]{32}\right)^2$	$\sqrt{\sqrt{256}}$
$\left(\sqrt[8]{16}\right)^{-4}$	$\sqrt[3]{\sqrt[3]{9}} \cdot \sqrt[9]{3^7}$
$\left(\sqrt[6]{9}\right)^{-3}$	$\sqrt[4]{\sqrt[3]{25}} \cdot \sqrt[6]{5^5}$

Внесение множителя под знак корня

Освоим решение еще одного типового задания ЕГЭ — внесение множителя под знак корня.

Сначала научимся выносить множитель из-под знака корня.

Пример.

$$\sqrt[3]{2^3 \cdot a} = 2 \cdot \sqrt[3]{a}\,.$$

$$\sqrt[5]{a^5 \cdot b} = a \cdot \sqrt[5]{b}\,.$$

$$\sqrt[7]{a^{14} \cdot b^7} = a^2 \cdot b\,.$$

Пояснение:

$$\sqrt[3]{2^3 \cdot a} = \left(2^3 \cdot a\right)^{1/3} = \left(2^3\right)^{1/3} \cdot a^{1/3} = 2 \cdot a^{1/3} = 2 \cdot \sqrt[3]{a}.$$

Мне удобнее проводить вычисления, действуя со степенями, а не с корнями. Впрочем, это вопрос вкуса. Теперь будем действовать в обратную сторону:

$$2 \cdot \sqrt[3]{a} = \sqrt[3]{2^x \cdot a}\ .$$

В какую степень должна возводиться двойка, чтобы при вынесении из-под корня мы получили 2?

$$2 \cdot \sqrt[3]{a} = \sqrt[3]{2^3 \cdot a} = \sqrt[3]{8a}. \ \triangleleft$$

Пример. ▶ Внесем множитель под знак корня:

$$a \cdot \sqrt[5]{b} = \sqrt[5]{a^5 \cdot b}. \ \triangleleft$$

Упражнение 1.19

Вычислите:

1) $3\sqrt{2} =$ ________________;
2) $2 \cdot \sqrt[3]{b} =$ ________________;
3) $k^2 \cdot \sqrt[3]{3} =$ ________________;
4) $k^{1,5} \cdot \sqrt[8]{5} =$ ________________.

Решение задания 3:

$$k^2 \cdot \sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{\left(k^2\right)^3 \cdot 3} = \sqrt[3]{k^6 \cdot 3} = \sqrt[3]{3k^6}.$$

Упражнение 1.20

Вычислите:

1) $\sqrt[3]{a^6 \cdot b} =$ ________________;
2) $2 \cdot \sqrt[5]{3} =$ ________________;
3) $k^{\frac{7}{8}} \cdot \sqrt[16]{2} =$ ________________;
4) $2a^3 \cdot \sqrt[3]{3} =$ ________________.

Существует одна хитрость. Обсудим ее на более сложном случае. Для этого мы должны быть абсолютно уверены в том, что корень четной степени из любого числа всегда неотрицателен, если он существует. То есть $\sqrt[3]{-2}$, $\sqrt[5]{-2}$; $\sqrt[7]{-2}$ и т. д. существуют и отрицательны, а $\sqrt{2}$, $\sqrt[4]{-2}$, $\sqrt[6]{-2}$ и т. д. не существуют.

Упражнение 1.21

Здесь четыре положительных, четыре отрицательных и четыре несуществующих числа. Рассортируйте числа:

1) $\sqrt{(-5)^2}$;	5) $\sqrt[4]{(-5)^3}$;	9) $\sqrt[20]{(-2)^{17}}$;
2) $\sqrt[4]{(-5)^6}$;	6) $\sqrt[3]{(-5)^4}$;	10) $-\sqrt[4]{(-2)^8}$;
3) $\sqrt[3]{(-5)^6}$;	7) $\sqrt[4]{(-5)^{13}}$;	11) $-\sqrt{(-2)^4}$;
4) $\sqrt[3]{(-5)^5}$;	8) $\sqrt[3]{(-2)^7}$;	12) $-\sqrt[6]{(-3)^7}$.

Итак:

- четная степень — $\sqrt{f}$, $\sqrt[4]{f}$, $\sqrt[6]{f}$ и т. д.
  - существование корня: $f \geq 0$;
  - знак корня: всегда + или 0;
  - график[2] — на рис. 1.1;

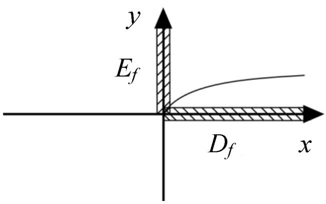

Рис. 1.1

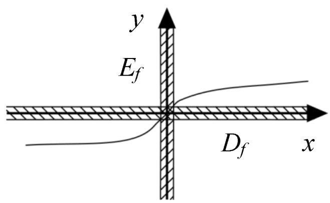

Рис. 1.2

- четная степень — $\sqrt[3]{f}$, $\sqrt[5]{f}$, $\sqrt[7]{f}$ и т. д.
  - существование корня: f — любое число;
  - знак корня: $f \geq 0$; $\sqrt[2n+1]{f} \geq 0$, $f < 0$; $\sqrt[2n+1]{f} < 0$;
  - график — на рис. 1.2.

---

[2] На рис. 1.1 и 1.2 используются обозначения: E — множество значений, D — область определения.

Теперь вернемся к примеру.

$$\sqrt[4]{3^4 \cdot b} = 3 \cdot \sqrt[4]{b}\,,\ b \geq 0\,.$$

Но:

$$\sqrt[4]{(-3)^4 \cdot b} = \sqrt[4]{3^4 \cdot b} = 3 \cdot \sqrt[4]{b}.$$

Упражнение 1.22

Теперь вынесите множитель из-под знака корня:

1) $\sqrt[8]{(-3)^8 \cdot 5} =$ ____________;
2) $\sqrt[7]{(-3)^7 \cdot 5} =$ ____________;
3) $\sqrt[3]{(-2)^3 \cdot a} =$ ____________;
4) $\sqrt[4]{(-2)^4 \cdot a} =$ ____________.

Пример. Теперь внесем множитель под знак корня:

$$-2 \cdot \sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{(-2)^3 \cdot 5} = \sqrt[3]{-8 \cdot 5} = \sqrt[3]{-40}.$$

Проверим знак каждого выражения в равенстве. Все элементы равенства отрицательны.

$$-2 \cdot \sqrt[4]{5} = -\sqrt[4]{2^4 \cdot 5} = -\sqrt[4]{16 \cdot 5} = -\sqrt[4]{80}.$$

Проверим знак каждого выражения в равенстве. Первое выражение отрицательно. Но если мы внесем минус под знак корня, то получим число положительное! Значит, знак "минус" не может вноситься внутрь корня четной степени.

Упражнение 1.23

Попробуйте сами внести множитель под знак корня (здесь $a,\ x \geq 0$).

1) $-5 \cdot \sqrt{x} =$ ________________;
2) $-5 \cdot \sqrt[3]{x} =$ ________________;
3) $-2 \cdot \sqrt[4]{a} =$ ______________;
4) $-2 \cdot \sqrt[3]{a} =$ ______________.

Модуль числа

Модуль числа — тема особенная. Многие ее не понимают. Вычислительно тема проста, сложность ее — логическая. Будем разбираться "по слогам".

1. **Шаг 1.** У модуля числа есть два определения; одно более понятное, зато другое — более удобное.

Определение 1 (геометрическое)

$|a|$ — это расстояние от 0 до числа a. Тогда:

$|5| = 5$, $|-5| = 5$.

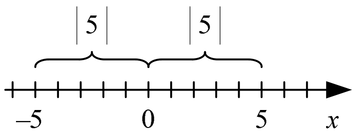

Рис. 1.3

Упражнение 1.24

Вычислите:

1) $|7| =$ ____________________;
2) $|-7| =$ ____________________;
3) $|\sqrt{2}| =$ ____________________;
4) $|-1-\sqrt{2}| =$ ____________________;
5) $|\sqrt{2}-1| =$ ____________________;
6) $|3-\sqrt{17}| =$ ____________________.

Упражнение 1.25

Известно, что $|x| = 0$. Как вы думаете, что это за число, если расстояние от него до 0 равно 0? Сколько таких чисел?

Упражнение 1.26

Может ли расстояние быть отрицательным? Определите, какие числа x не существуют, остальные вычислите.