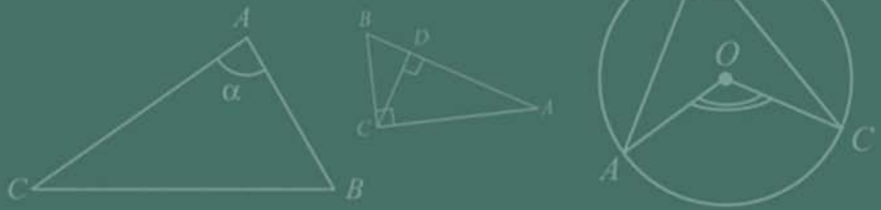
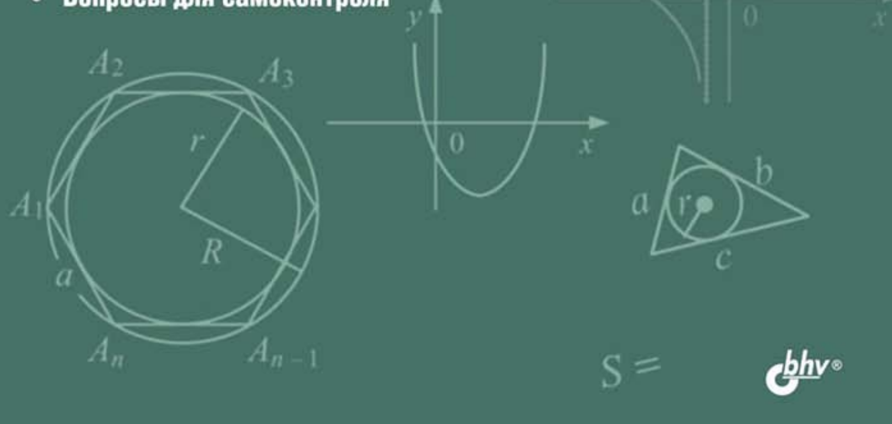
А. О. Андреева



ГИА по математике
Практическая подготовка

- 400 заданий для подготовки к ГИА
- Теоретическая справка: формулы, правила, определения, теоремы, преобразования, графики функций, табличные данные
- Примеры решений и ответы
- Вопросы для самоконтроля



bhv®

А. О. Андреева

ГИА по математике
Практическая подготовка

Санкт-Петербург
«БХВ-Петербург»
2014

УДК 373:51
ББК 22.1я72
А65

Андреева А. О.

А65 ГИА по математике. Практическая подготовка. — СПб.: БХВ-Петербург, 2014. — 160 с.: ил.

ISBN 978-5-9775-3302-7

Пособие предназначено для целевой подготовки к сдаче экзамена по математике в формате ГИА.

В первой части приведены теоретические сведения по алгебре — формулы, правила выполнения математических действий, построения графиков функций; и геометрии — признаки равенства и подобия треугольников, формулы расчета геометрических фигур, теоремы планиметрии. Во второй части представлены блоки заданий, содержащие разобранный типовой пример и от 6 до 12 заданий для самостоятельного решения. Приводятся ответы. Также книга содержит раздел "Проверь себя", позволяющий самостоятельно проверить знания необходимых формул и теорем.

Для образовательных учреждений

УДК 373:51
ББК 22.1я72

Группа подготовки издания:

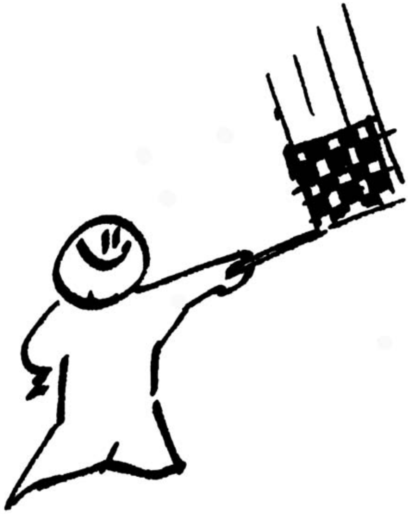
Главный редактор	*Екатерина Кондукова*
Зам. главного редактора	*Людмила Еремеевская*
Зав. редакцией	*Екатерина Капалыгина*
Редактор	*Анна Кузьмина*
Компьютерная верстка	*Ольги Сергиенко*
Корректор	*Зинаида Дмитриева*
Дизайн обложки	*Марины Дамбиевой*

Подписано в печать 30.12.13.
Формат $60 \times 90^1/_{16}$. Печать офсетная. Усл. печ. л. 10.
Тираж 1700 экз. Заказ №
"БХВ-Петербург", 191036, Санкт-Петербург, Гончарная ул., 20.

Первая Академическая типография "Наука"
199034, Санкт-Петербург, 9 линия, 12/28

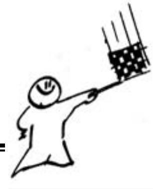
ISBN 978-5-9775-3302-7

Оглавление



1. ТЕОРИЯ

1.1. Алгебра



Формулы сокращенного умножения

1. Разность квадратов: $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$
2. Квадрат суммы: $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$
3. Квадрат разности: $(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$
4. Сумма кубов: $x^3 + y^3 = (x + y)\left(x^2 - xy + y^2\right)$
5. Разность кубов: $x^3 - y^3 = (x - y)\left(x^2 + xy + y^2\right)$
6. Куб суммы: $(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$
7. Куб разности: $(x - y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$

Правила раскрытия скобок

1. Если к алгебраическому выражению прибавляется алгебраическая сумма (разность), заключенная в скобки, то скобки можно опустить, сохранив знак каждого слагаемого этой алгебраической суммы (разности):

$$x+(y+z)=x+y+z \text{ и } x+(y-z)=x+y-z .$$

2. Если из алгебраического выражения вычитается алгебраическая сумма (разность), заключенная в скобки, то скобки можно опустить, изменив знак каждого слагаемого этой алгебраической суммы (разности):

$$x-(y+z)=x-y-z \text{ и } x-(y-z)=x-y+z .$$

3. Если к алгебраическому выражению прибавляется алгебраическая сумма (разность), умноженная на число и заключенная в скобки, то скобки можно опустить, умножив каждое слагаемое (уменьшаемое и вычитаемое) на это число и сохранив знак каждого слагаемого этой алгебраической суммы (разности):

$$x+a(y+z)=x+ay+az \text{ и } x+a(y-z)=x+ay-az .$$

4. Если из алгебраического выражения вычитается алгебраическая сумма (разность), умноженная на число и заключенная в скобки, то скобки можно опустить, умножив каждое слагаемое (уменьшаемое и вычитаемое) на это число и изменив знак каждого слагаемого этой алгебраической суммы (разности):

$$x-a(y+z)=x-ay-az \text{ и } x-a(y-z)=x-ay+az .$$

Квадратные корни

1. Квадрат квадратного корня: $\left(\sqrt{x}\right)^2 = x; \quad x \geq 0$.
2. Квадратный корень из квадрата: $\sqrt{x^2} = |x|$.
3. Произведение квадратных корней: $\sqrt{x} \cdot \sqrt{y} = \sqrt{xy}; \quad x, y \geq 0$.
4. Деление квадратных корней: $\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} = \sqrt{\dfrac{x}{y}}; \quad x \geq 0; \quad y > 0$.

Разложение квадратного трехчлена на множители

Квадратный трехчлен может быть разложен на множители следующим образом:

$$ax^2 + bx + c = a\left(x - x_1\right)\left(x - x_2\right),$$

где x_1 и x_2 — корни квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$.

Признаки делимости

1. **Число делится на 2** без остатка, если на конце этого числа стоит четная цифра (0, 2, 4, 6, 8).
2. **Число делится на 3** без остатка, если сумма цифр этого числа делится на 3 без остатка.
3. **Число делится на 5** без остатка, если это число оканчивается на 5 или на 0.
4. **Число делится на 6** без остатка, если оно делится на 2 и на 3 без остатка.
5. **Число делится на 9** без остатка, если сумма цифр этого числа делится на 9 без остатка.
6. **Число делится на 10** без остатка, если это число оканчивается на 0.

Преобразование степеней

1. $a^0 = 1$
2. $a^1 = a$
3. $a^{-1} = \frac{1}{a}$
4. $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$
5. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
6. $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
7. $(ab)^m = a^m b^m$
8. $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$
9. $\left(a^m\right)^n = a^{mn}$

Квадратное уравнение

Квадратное уравнение — уравнение вида $ax^2 + bx + c = 0$, где $a \neq 0$.

Чтобы решить квадратное уравнение, нужно:

1. **Найти дискриминант по формуле:** $D = b^2 - 4ac$.

   Если $D > 0$, то уравнение имеет 2 корня.

   Если $D = 0$, то уравнение имеет 1 корень.

   Если $D < 0$, то уравнение не имеет корней.

2. **Найти корни уравнения:**

   - если $D > 0$, то корни уравнения находят по формуле:

   $$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a};$$

   - если $D = 0$, то корень уравнения находят по формуле:

   $$x = -\frac{b}{2a}.$$

Теорема Виета:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}; \\ x_1 x_2 = \dfrac{c}{a}. \end{cases}$$

Уравнения с модулем

Чтобы решить уравнение вида $|x| = a$, где a — число, нужно проанализировать число a.

- Если $a > 0$, уравнение имеет *два корня*:

$$\left[\begin{array}{l} x = a; \\ x = -a. \end{array}\right.$$

- Если $a = 0$, уравнение имеет *один корень*: $x = 0$.
- Если $a < 0$, уравнение *не имеет корней*.

Неравенства с модулем

1. $|x| < a,\ a > 0 \Rightarrow x \in (-a;\ a)$.
2. $|x| < a,\ a \le 0 \Rightarrow$ решений нет.
3. $|x| \le a,\ a > 0 \Rightarrow x \in [-a;\ a]$.
4. $|x| \le a,\ a = 0 \Rightarrow x = 0$.
5. $|x| \le a,\ a < 0 \Rightarrow$ решений нет.
6. $|x| > a,\ a \ge 0 \Rightarrow x \in (-\infty;\ -a);\ (a;\ +\infty)$.
7. $|x| > a,\ a < 0 \Rightarrow x \in (-\infty;\ +\infty)$.
8. $|x| \ge a,\ a > 0 \Rightarrow x \in (-\infty;\ -a];[a;\ +\infty)$.
9. $|x| \ge a,\ a \le 0 \Rightarrow x \in (-\infty;\ +\infty)$.

Арифметическая прогрессия

Пусть a_1, a_2, a_3, ..., a_{n-1}, a_n — члены арифметической прогрессии; d — разность арифметической прогрессии.

Тогда каждый член арифметической прогрессии, начиная со второго, вычисляется по формуле:

$$a_{n+1} = a_n + d.$$

Любой член арифметической прогрессии может быть найден по формуле:

$$a_n = a_1 + \left(n-1\right)d,$$

где n — номер определяемого члена арифметической прогрессии.

Сумма членов конечной арифметической прогрессии равна:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n;$$

$$S_n = \frac{2a_1 + \left(n-1\right)d}{2} \cdot n.$$

Геометрическая прогрессия

Пусть b_1, b_2, b_3, ..., b_{n-1}, b_n — члены геометрической прогрессии; q — знаменатель геометрической прогрессии.

Тогда каждый член геометрической прогрессии, начиная со второго, вычисляется по формуле:

$$b_{n+1} = b_n q.$$

Любой член геометрической прогрессии может быть найден по формуле:

$$b_n = b_1 q^{n-1},$$

где n — номер определяемого члена геометрической прогрессии.

Сумма членов конечной геометрической прогрессии, содержащей n членов, равна:

$$S_n = \frac{b_1\left(1-q^n\right)}{1-q}.$$

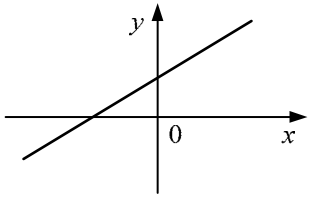
Сумма членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна:

$$S = \frac{b_1}{1-q}.$$

Виды функций

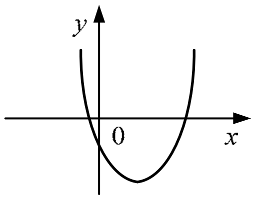
1. Прямая

$$y = kx + b$$



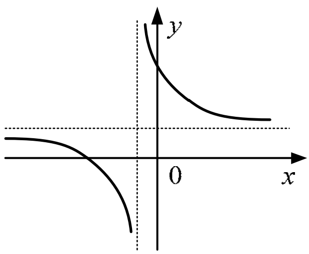
2. Парабола

$$y = ax^2 + bx + c$$



3. Гипербола

$$y = \frac{1}{kx + a} + b$$



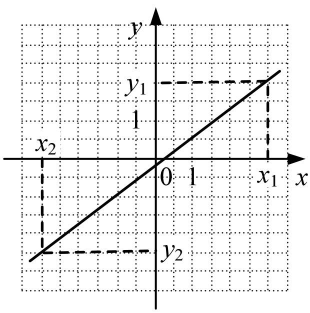
Прямая. Построение прямой

Чтобы построить прямую $y = kx + b$:

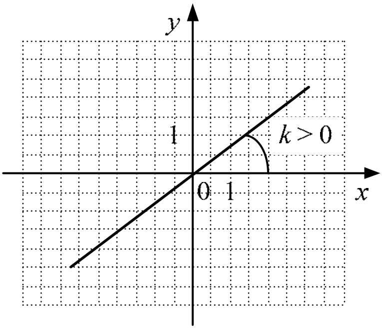
1. Нужно взять любые два значения x_1 и x_2 переменной x и, подставив эти значения в уравнение прямой $y = kx + b$, определить значения y_1 и y_2.

x	x_1	x_2
y	$y_1 = kx_1 + b$	$y_2 = kx_2 + b$

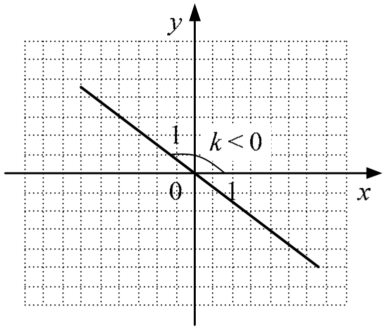
2. Далее нужно отметить полученные точки на координатной плоскости и провести через них прямую.



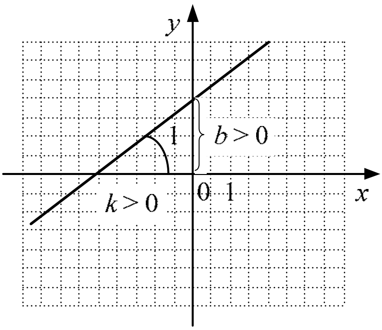
Знаки *k* и *b* прямой *y* = *kx* + *b*



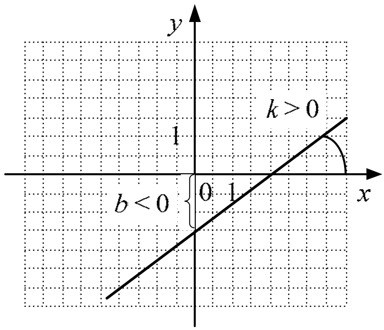
$k > 0;\ \ b = 0$



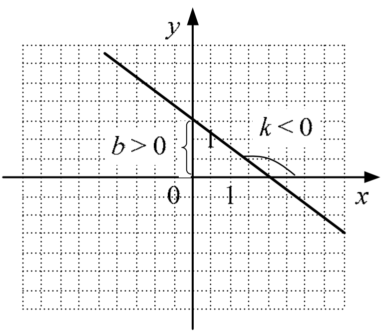
$k < 0;\ \ b = 0$



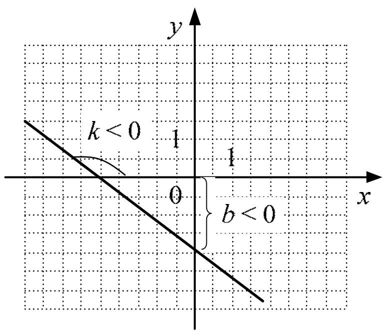
$k > 0;\ \ b > 0$



$k > 0;\ \ b < 0$



$k < 0;\ \ b > 0$



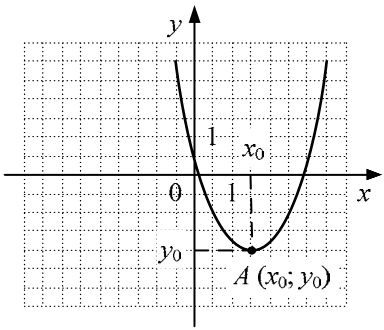
$k < 0;\ \ b < 0$

Парабола

Уравнение параболы:

$$y = ax^2 + bx + c \text{ при } a \neq 0 .$$

График:



Точка $A(x_0; y_0)$ — вершина параболы.

Координаты вершины параболы:

$$x_0 = -\frac{b}{2a};$$

$$y_0 = ax_0^2 + bx_0 + c .$$

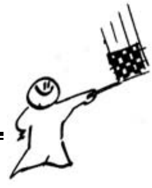
Если $a > 0$, то ветви параболы направлены *вверх*.

Если $a < 0$, то ветви параболы направлены *вниз*.

Табличные значения тригонометрических функций

Угол / Функция	30°	45°	60°	90°
$\sin x$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos x$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\mathrm{tg}\, x$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	—
$\mathrm{ctg}\, x$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

1.2. Геометрия



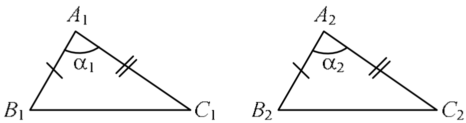
Признаки равенства треугольников

1. **Первый признак равенства треугольников: по двум сторонам и углу между ними.**

   Если две стороны и угол, заключенный между этими сторонами одного треугольника, соответственно равны двум сторонам и углу, заключенному между этими сторонами, другого треугольника, то такие треугольники равны:

   если

   $$A_1B_1 = A_2B_2\,,$$
   $$A_1C_1 = A_2C_2\,,$$
   $$\angle\alpha_1 = \angle\alpha_2\,,$$

   то

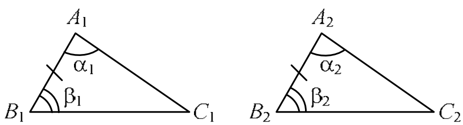
   $$\triangle A_1B_1C_1 = \triangle A_2B_2C_2\,.$$

2. **Второй признак равенства треугольников: по стороне и прилежащим к ней углам.**

   Если сторона и два прилежащих к этой стороне угла одного треугольника соответственно равны стороне и двум прилежащим к этой стороне углам другого треугольника, то такие треугольники равны:

   если

   $$A_1B_1 = A_2B_2\,,$$
   $$\angle\alpha_1 = \angle\alpha_2\,,$$
   $$\angle\beta_1 = \angle\beta_2\,,$$

   то

   $$\triangle A_1B_1C_1 = \triangle A_2B_2C_2\,.$$

3. **Третий признак равенства треугольников: по трем сторонам.**

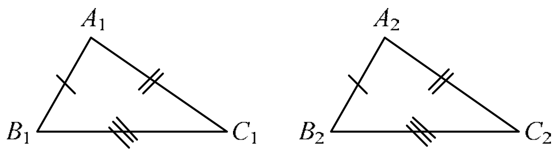
   Если три стороны одного треугольника соответственно равны трем сторонам другого треугольника, то такие треугольники равны:

   если

   $$A_1B_1 = A_2B_2\,,\ A_1C_1 = A_2C_2\,,\ B_1C_1 = B_2C_2\,,$$

   то

   $$\triangle A_1B_1C_1 = \triangle A_2B_2C_2\,.$$



Признаки подобия треугольников

1. **Первый признак подобия треугольников: по двум углам.**

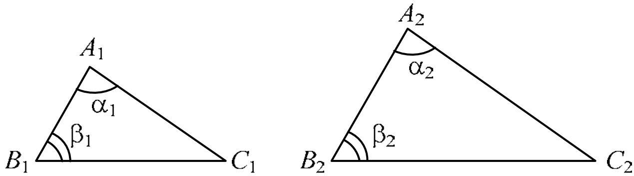
   Если два угла одного треугольника равны двум углам другого треугольника, то такие треугольники подобны:

   если

   $$\angle\alpha_1 = \angle\alpha_2, \quad \angle\beta_1 = \angle\beta_2,$$

   то

   $$\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle A_2B_2C_2.$$



2. **Второй признак подобия треугольников: по двум сторонам и углу между ними.**

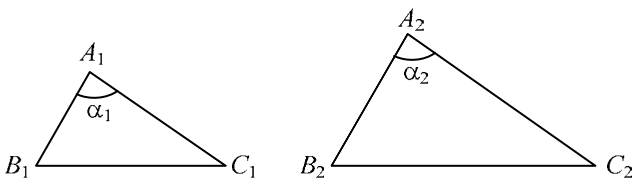
   Если две пары сторон треугольников пропорциональны, а углы, заключенные между этими сторонами, равны, то треугольники подобны:

   если

   $$\frac{A_1B_1}{A_2B_2} = \frac{A_1C_1}{A_2C_2}, \quad \angle\alpha_1 = \angle\alpha_2,$$

   то

   $$\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle A_2B_2C_2.$$



3. **Третий признак подобия треугольников: по трем сторонам.**

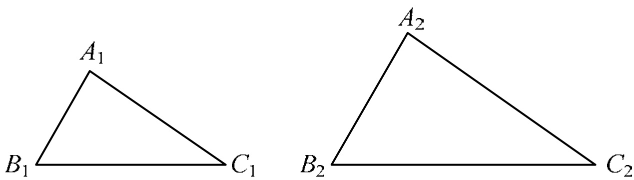
Если три стороны одного треугольника пропорциональны трем сторонам другого треугольника, то треугольники подобны:

если

$$\frac{A_1B_1}{A_2B_2} = \frac{A_1C_1}{A_2C_2} = \frac{B_1C_1}{B_2C_2},$$

то

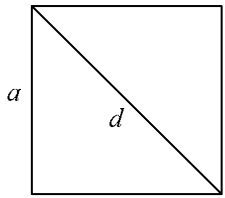
$$\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle A_2B_2C_2.$$



Площади и периметры фигур

1. **Площадь *S*, периметр *P*, диагональ *d* квадрата:**

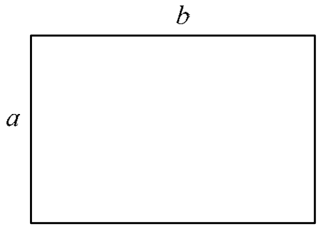
$$S = a^2;$$
$$P = 4a;$$
$$d = \sqrt{2}a,$$



где a — сторона квадрата; d — диагональ квадрата.

2. **Площадь *S*, периметр *P* прямоугольника:**

$$S = ab;$$
$$P = 2(a+b),$$

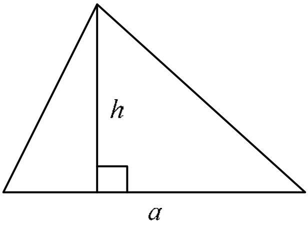


где a, b — стороны прямоугольника.

3. **Площадь треугольника:**

- по основанию и высоте

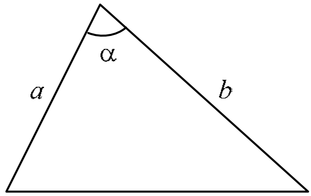
$$S = \frac{1}{2}ah,$$



где a — сторона; h — высота треугольника;

- по двум сторонам и углу между ними

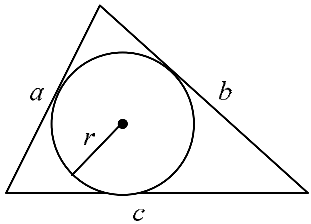
$$S = \frac{1}{2}ab\sin\alpha,$$



где a, b — стороны; α — угол между сторонами a и b треугольника;

- по полупериметру и радиусу вписанной окружности

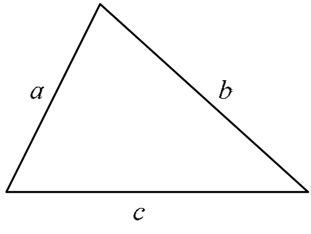
$$S = rp,$$



где r — радиус вписанной окружности; $p = \dfrac{a+b+c}{2}$ — полупериметр треугольника.

Формула Герона:

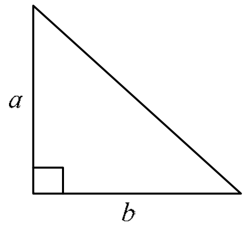
$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$



где $p = \dfrac{a+b+c}{2}$ — полупериметр; a, b, c — стороны треугольника.

Площадь прямоугольного треугольника:

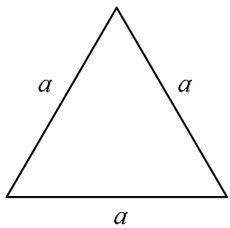
$$S = \frac{1}{2}ab,$$



где a, b — катеты треугольника.

Площадь равностороннего треугольника:

$$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4},$$

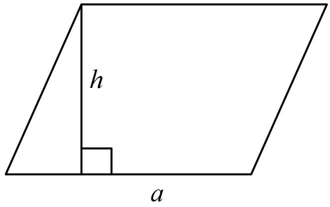


где a — сторона треугольника.

4. **Площадь параллелограмма:**

- по основанию и высоте

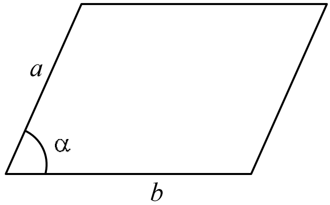
$$S = ah,$$



где a — основание параллелограмма; h — высота параллелограмма;

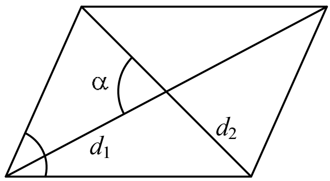
- по двум сторонам и углу между ними:

$$S = ab\sin\alpha,$$



- по двум диагоналям и углу между ними:

$$S = \frac{1}{2}d_1 d_2 \sin\alpha,$$

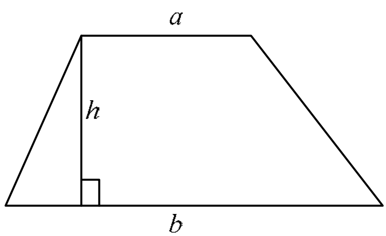


где d_1, d_2 — диагонали; α — угол между диагоналями параллелограмма.

5. **Площадь трапеции:**

- по двум основаниям и высоте:

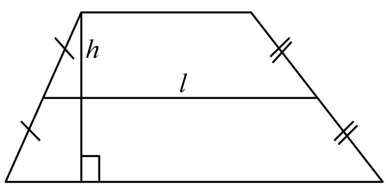
$$S = \frac{a+b}{2}h,$$



где a, b — основания; h — высота трапеции;

- по средней линии и высоте:

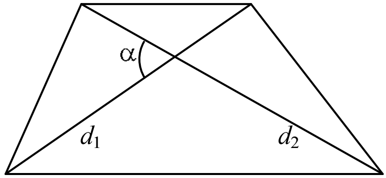
$$S = lh,$$



где l — средняя линия трапеции; h — высота трапеции;

- по двум диагоналям и углу между ними:

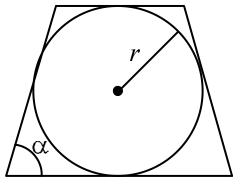
$$S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin\alpha,$$



где d_1, d_2 — диагонали; α — угол между диагоналями трапеции.

Площадь равнобедренной трапеции:

$$S = \frac{4r^2}{\sin\alpha},$$

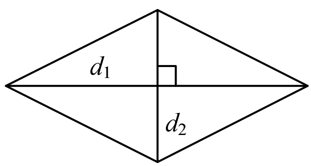


где r — радиус вписанной окружности; α — угол при основании трапеции.

6. **Площадь ромба:**

- по двум диагоналям:

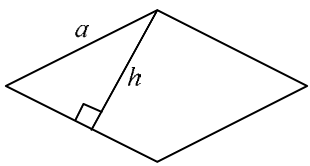
$$S = \frac{d_1 d_2}{2},$$



где d_1, d_2 — диагонали ромба;

- по стороне и высоте:

$$S = ah,$$



где a — сторона; h — высота ромба;