

**ВЫСШЕЕ ГОРНОЕ ОБРАЗОВАНИЕ**

---

**В.А. БУКРИНСКИЙ**

# **ГЕОМЕТРИЯ НЕДР**

Издание третье, переработанное  
и дополненное

*Допущено Министерством образования Российской Федерации в качестве учебника для студентов высших учебных заведений, обучающихся по специальности «Маркшейдерское дело» направления подготовки дипломированных специалистов «Горное дело».*

**МОСКВА**

**ИЗДАТЕЛЬСТВО МОСКОВСКОГО  
ГОСУДАРСТВЕННОГО ГОРНОГО  
УНИВЕРСИТЕТА**

---

**2 0 0 2**



## **ВЫСШЕЕ ГОРНОЕ ОБРАЗОВАНИЕ**

Виктор Александрович Букринский

# **ГЕОМЕТРИЯ НЕДР**

Федеральная программа книгоиздания России

*Режим выпуска «стандартный»*

Редактор текста: *О.А. Латышева*

Набор: *Т.Н. Абросимова*

Компьютерная верстка и дизайн  
оригинал-макета: *Э.Ф. Губницкая*

Дизайн серии: *Е.Б. Капралова*

Подписано в печать 23.05.2002. Формат 60×90/16. Бумага  
офсетная № 1. Гарнитура «Times». Печать офсетная.  
Уч.-изд. л. 37,26. Усл. печ. л. 34,5. Тираж 2000 экз.  
Заказ

**ИЗДАТЕЛЬСТВО МОСКОВСКОГО  
ГОСУДАРСТВЕННОГО ГОРНОГО УНИВЕРСИТЕТА**

*Лицензия на издательскую деятельность*

*ЛР № 062809 от 30.06.98 г.*

*Код издательства 57(03)*

Отпечатано с готового оригинал-макета  
в ФГУП Ордена «Знак почета» Смоленской  
областной типографии им. В.И. Смирнова  
214000, г. Смоленск, пр-т им. Ю. Гагарина, 2  
Тел. 3-01-60; 3-46-20; 3-46-05

Магниевые штампы изготовлены  
в Первой Образцовой типографии

**119991, Москва, ГСП-1, Ленинский  
проспект, 6; Издательство МГГУ;  
тел. (095) 236-97-80; факс (095) 956-90-40**



*РАЗДЕЛ I*

---

**ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ  
ОСНОВЫ  
ГЕОМЕТРИЗАЦИИ  
МЕСТОРОЖДЕНИЙ**

<b>Глава 5</b> <b>ФОРМА И ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПАРАМЕТРЫ ЗАЛЕЖИ,</b> <b>ИХ ОПРЕДЕЛЕНИЕ И ДОКУМЕНТАЦИЯ</b>
<b>Глава 11</b> <b>ЗАПАСЫ ПОЛЕЗНЫХ ИСКОПАЕМЫХ,</b> <b>ИХ ПАРАМЕТРЫ И КЛАССИФИКАЦИЯ</b>
<b>Глава 1</b> <b>ПОЛЯ РАЗМЕЩЕНИЯ ПОКАЗАТЕЛЕЙ В НЕДРАХ</b> <b>И ИХ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ</b>
<b>Глава 2</b> <b>МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ПРИЕМЫ ОБРАБОТКИ</b> <b>НАБЛЮДЕНИЙ ПОКАЗАТЕЛЕЙ ЗАЛЕЖИ</b>
<b>Глава 3</b> <b>ПРОЕКЦИИ ГЕОМЕТРИЗАЦИИ НЕДР</b>
<b>Глава 4</b> <b>МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ДЕЙСТВИЯ</b> <b>С ГРАФИЧЕСКИМИ ВЫРАЖЕНИЯМИ ФУНКЦИЙ</b> <b>ТОПОГРАФИЧЕСКОГО ВИДА</b>
<b>Глава 6</b> <b>ГЕОМЕТРИЗАЦИЯ ФОРМЫ, УСЛОВИЙ ЗАЛЕГАНИЯ</b> <b>И ПОЛОЖЕНИЯ ЗАЛЕЖИ В НЕДРАХ</b>
<b>Глава 14</b> <b>ПРОГНОЗИРОВАНИЕ РАЗМЕЩЕНИЯ ПОКАЗАТЕЛЕЙ</b> <b>МЕСТОРОЖДЕНИЙ</b>

## **РАЗДЕЛ II**

---

**ОБЩАЯ МЕТОДИКА  
ГЕОМЕТРИЗАЦИИ  
ФОРМ, УСЛОВИЙ  
ЗАЛЕГАНИЯ И  
ФИЗИКО-ХИМИЧЕСКИХ  
СВОЙСТВ**

## *РАЗДЕЛ III*

---

**ПОДСЧЕТ ЗАПАСОВ  
И УПРАВЛЕНИЕ  
ДВИЖЕНИЕМ  
ЗАПАСОВ ПОЛЕЗНЫХ  
ИСКОПАЕМЫХ  
ПРИ ИХ РАЗРАБОТКЕ**

*РАЗДЕЛ IV*

---

**ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ  
МЕТОДЫ  
РЕШЕНИЯ НЕКОТОРЫХ  
ЗАДАЧ ГОРНОГО И  
ГЕОЛОГОРАЗВЕДОЧНОГО  
ДЕЛА**

<b>Глава 7</b> <b>ГЕОМЕТРИЗАЦИЯ СКЛАДЧАТЫХ ФОРМ ЗАЛЕГАНИЯ</b>
<b>Глава 8</b> <b>ГЕОМЕТРИЗАЦИЯ РАЗРЫВНЫХ НАРУШЕНИЙ</b>
<b>Глава 9</b> <b>ГЕОМЕТРИЗАЦИЯ ТРЕЩИНОВАТОСТИ МАССИВА ГОРНЫХ ПОРОД</b>
<b>Глава 10</b> <b>ГЕОМЕТРИЗАЦИЯ РАЗМЕЩЕНИЯ КАЧЕСТВЕННЫХ СВОЙСТВ ЗАЛЕЖИ</b>
<b>Глава 12</b> <b>МАРКШЕЙДЕРСКИЙ КОНТРОЛЬ ОПЕРАТИВНОГО УЧЕТА ДОБЫЧИ ПОЛЕЗНЫХ ИСКОПАЕМЫХ</b>
<b>Глава 13</b> <b>УЧЕТ ДВИЖЕНИЯ ЗАПАСОВ, ПОТЕРЬ И РАЗУБОЖИВАНИЯ ПРИ РАЗРАБОТКЕ МЕСТОРОЖДЕНИЙ</b>
<b>Глава 15</b> <b>КВАЛИМЕТРИЯ НЕДРОПОЛЬЗОВАНИЯ</b>
<b>Глава 16</b> <b>ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ ОПТИМАЛЬНОЙ ТОЧКИ СВОЗА ГРУЗОВ ИЗ НЕСКОЛЬКИХ ПУНКТОВ</b>

**Глава 15**  
**КВАЛИМЕТРИЯ НЕДРОПОЛЬЗОВАНИЯ**

---

**Глава 17**  
**ОХРАНА НЕДР И ОКРУЖАЮЩЕЙ СРЕДЫ**

---

УДК 622:502.7  
ББК 33.12  
Б 90

### Федеральная программа книгоиздания России

#### Рецензенты:

- Проф., д-р. техн. наук *Е.П. Тимофеев*
- Кафедра геодезии и маркшейдерского дела Российского Университета Дружбы Народов (зав. кафедрой, канд. техн. наук *Б.И. Бузин*, канд. техн. наук *В.М. Елисеев*)
- Президент некоммерческой организации «Институт проблем энерго-эффективности», докт. экон. наук, проф. *Б.А. Давыдов*
- Начальник Департамента цен ОАО «Газпром», д-р. эконом. наук, проф. *Е.В. Яркин*.

#### Букринский В.А.

Б 90 Геометрия недр: Учебник для вузов. — 3-е изд., перераб. и доп. — М.: Издательство Московского государственного горного университета, 2002. — 549 с.

ISBN 5-7418-0191-9 (в пер.)

Изложены теоретические основы геометрии и геометризации месторождений полезных ископаемых, вероятностно-статистические методы обработки и оценки исходных данных, рассмотрены проекции, применяемые при геометризации недр. Описана методика геометризации форм, условий залегания залежей и их физико-химических свойств. Приведены способы подсчета запасов, учета добычи, потерь и разубоживания, прогнозирования геологических показателей соседних участков и решения некоторых задач горного дела геометрическими методами. Третье издание (2-е изд. — 1985) значительно переработано и дополнено с учетом требований, установленных образовательным стандартом высшего профессионального образования и новых методов хозяйственного освоения месторождений минерального сырья.

Для студентов горных вузов и факультетов, обучающихся по специальности «Маркшейдерское дело» направления подготовки дипломированных специалистов «Горное дело».

УДК 622:502.7  
ББК 33.12

ISBN 5-7418-0191-9

© В.А. Букринский, 2002

© Издательство МГТУ, 2002

## **ПРЕДИСЛОВИЕ**

---

Геометрия недр — горная наука, представляющая собой совокупность знаний о пространственно-геометрических закономерностях размещения форм горных пород и полезных ископаемых, условий их залегания, физико-химических и качественных свойств и процессов, происходящих в недрах при их разработке.

Геометрия недр — одна из фундаментальных дисциплин маркшейдерской специальности, в результате изучения которой на основе теории вероятностей и математической статистики, геологии, физики, горной технологии, экономики горного производства и других дисциплин студент должен овладеть методами геометризации недр с тем, чтобы, применяя компьютерную технологию, уметь обосновывать методику проведения конкретной геометризации месторождений полезных ископаемых и практического применения ее результатов при технически и экономически обоснованных решениях производственных задач. Учебник подготовлен для студентов горных вузов, обучающихся по маркшейдерской специальности, в соответствии с программой дисциплины «Геометрия недр», составленной с учетом требований, установленных государственным образовательным стандартом высшего профессионального образования.

Книга может быть полезна студентам горно-технологических и геологоразведочных специальностей, а также инженерно-техническим работникам маркшейдерской и геологической службы горных предприятий и геологоразведочных партий.

Второе издание учебника «Геометрия недр» (1985 г.) удостоено Диплома Почета ВДНХ-86.

Автор выражает искреннюю благодарность заведующим кафедрами маркшейдерского дела вузов: проф. Н.И. Стенину и проф. И.Н. Ушакову (С-ПГГИ), проф. Л.Я. Парчевскому (НГАУ), проф. Ю.И. Туринцеву (УГГГА), проф. М.Н. Тевзадзе (ГТУ), проф. В.В. Мирному (ДГТУ), доц. Р.С. Сафонову (ИРкГТУ), проф. А.Ж. Машанову (КНГТУ), проф. П.И. Федоренко (КрГГРИ), доц. С.В. Шаклеину (КузГТУ), проф. А.М. Медянцеву (Ю-РГТУ), доц. А.Т. Шаманской (ПермГТУ), приславшим отзывы на второе издание учеб-

ника «Геометрия недр», в которых наряду с замечаниями дана положительная оценка учебника.

Автор признателен рецензентам рукописи третьего издания учебника «Геометрия недр»: заведующему кафедрой Российского Университета Дружбы Народов, доц. Б.И. Бузинову, доц. В.М. Елисееву, а также докт. техн. наук, проф. Е.П. Тимофеенко.

## **Глава 1**

### **ПОЛЯ РАЗМЕЩЕНИЯ ПОКАЗАТЕЛЕЙ В НЕДРАХ И ИХ ГЕОМЕТРИЗАЦИЯ**

---

#### **1.1. Геометрическая интерпретация размещения показателей в недрах**

Любое физическое, химическое, геологическое, геометрическое и прочее свойство недр — залежи и вмещающих пород, которое может быть в том или ином месте, точке непосредственно или косвенно определено или замерено и выражено числом, называют показателем или признаком объекта недр.

В пространстве недр каждый показатель (признак) размещается в виде поля морфометрических и морфоструктурных свойств тел полезных ископаемых и вмещающих горных пород (мощность, отметки кровли, почвы, напластований, дизъюнктивов, перемежаемость пород и пр.), химических свойств или геохимического поля (содержание компонентов, минералов), физических свойств или геофизического поля (плотность, электрическая сопротивляемость, радиоактивность, магнитная восприимчивость), поля гидрогеологических и инженерно-геологических свойств массива горных пород.

Совокупность полей размещения различных показателей массива горных пород составляет геологическое поле.

Структура поля размещения каждого показателя, как и структура любого физического поля, слоисто-струйчатая (рис. 1.1). Слои с соответствующими средними значениями показателя, как бы не были смяты, не пересекаются. Однако слои различных полей могут пронизывать друг друга. В любом плоском сечении, например  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$ , поле представляется системой изолиний, т. е. топофункцией.

Поля могут быть общие, охватывающие все месторождение, и частные — в пределах одной залежи или ее части.

В зависимости от изменения зафиксированных при изучении объекта величин во времени все разновидности геологических по-

лей подразделяют на *стационарные* (неизменные во времени) и *динамические*.

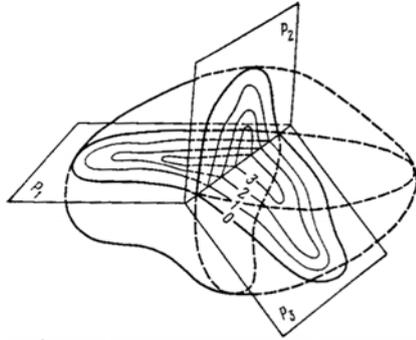


Рис. 1.1. Модель геохимического поля

Это деление условно и зависит от принятого промежутка времени, но оно необходимо, так как определяет методику изучения величин.

Стационарные (квазистационарные) поля можно изучать организованной системой наблюдений длительное время по частям объекта исследования, данные по которым могут быть затем увязаны между собой в единое целое без каких-либо преобразований.

Для изучения динамических полей необходимо создавать сеть стационарных наблюдений за характером изменения показателей во времени. Без знания динамики изменения этих показателей во времени не возможны никакие пространственные увязки результатов исследований.

Стационарные и динамические поля геометрически могут быть представлены скалярными и векторными полями.

К скалярным полям относят размещения геохимических, морфометрических и других показателей изучаемого объекта, характеризующихся скалярными величинами, для задания которых в каждой точке пространства достаточно знать модуль и знак. К векторным относят поля векторных величин, характеризующихся модулем и направлением. При этом любое скалярное поле может быть преобразовано в векторное, если изучать не исходные величины, а их производные, например, скорости изменения (градиенты поля).

Тело полезного ископаемого от вмещающих его пород ограничено поверхностью раздела. В одних случаях эти поверхности выделяются отчетливо, в других — отчетливой границы между полезным ископаемым и вмещающими породами нет. Тогда за поверхность, ограничивающую тело полезного ископаемого, принимают поверхность с определенным значением его свойства

(минимальное промышленное содержание полезного компонента или максимально допустимое содержание вредного компонента).

Свойства месторождений (например, содержание полезного компонента), как правило, изменяются в пределах пространственных форм залежей.

Твердые полезные ископаемые в недрах имеют весьма разнообразные, часто очень сложные пространственные формы; залегают они в самых различных условиях и обладают многообразным характером размещения свойств в этих формах.

Каждый из этих показателей имеет свою геометрию, свою функцию пространственного размещения. Выявление и геометрическое выражение этих функций с определенной степенью точности является геометризацией месторождения.

Различные показатели месторождений полезных ископаемых характеризуются функциями следующих видов (рис. 1.2):

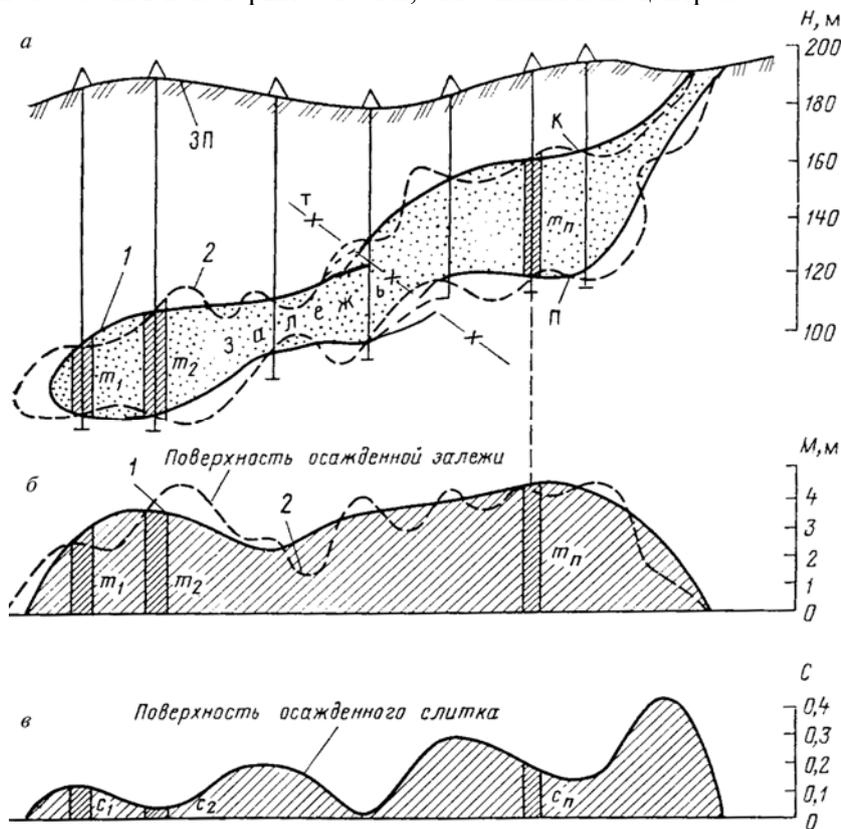
1. Реально существующих поверхностей: земной поверхности (ЗП), поверхности литологических разностей, кровли (К) и почвы (П) залежи, тектонических разрывов (Т) и пр. (рис. 1.2, а).

2. Поверхностей, реально в природе не существующих, но являющихся производными от реальных поверхностей: изомощности залежи или изолинии поверхности «осажденной залежи», которую получают в результате деления залежи на элементарные столбики высотой, равной мощности залежи  $m_1, m_2, \dots, m_n$ , и мысленного осаждения их на горизонтальную плоскость (рис. 1.2, б), а также изомощности толщи горных пород, изоглубины залегания, изосекансы поверхности и пр.

3. Поверхностей условных, не существующих реально и не всегда связанных зависимостью с реально существующими поверхностями месторождения: размещение различных компонентов в залежи, которое представляется изолиниями поверхности мысленно «осажденного слитка» (рис. 1.2, в) на горизонтальную плоскость. К этому виду относят также функции, выражающие интенсивность трещиноватости массива горных пород, изменения физических, геомеханических, горно-геологических и других свойств горных пород.

Функции первого и второго вида устанавливают по значениям показателей, измеренным в отдельных точках.

Функции третьего вида устанавливают по средним значениям показателя в некоторых объемах, относимым к их центрам.



**Рис. 1.2.** Три вида функций размещения показателей залежи:  
*a* — реальные; *б* — производные; *в* — условные; 1 — поверхность, выявленная разведкой; 2 — поверхность действительная

Числовое значение некоторого свойства в пространстве недр можно рассматривать как функцию от пространственного положения точки или центра элементарного объема и времени  $t$ :

$$P = f(x, y, z, t). \quad (1.1)$$

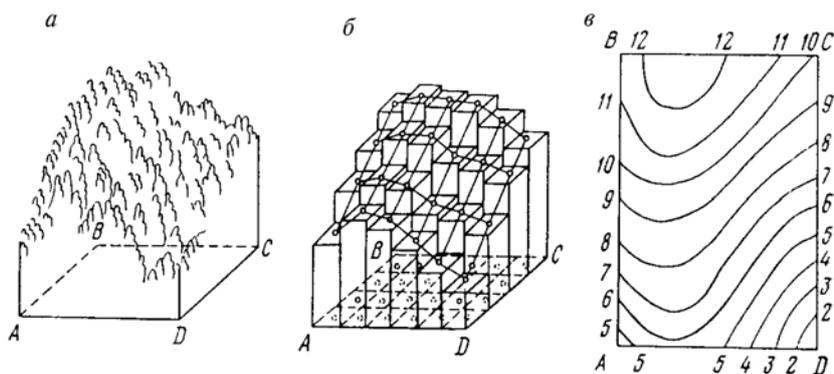
В явном виде эта функция в большинстве случаев не может быть выражена. Однако если в пределах рассматриваемого про-

странства недр она удовлетворяет условиям конечности, однозначности, непрерывности и плавности, то по отдельным измерениям и числовым значениям при соответствующей их математической обработке закономерность изменения этого свойства может быть выявлена и выражена геометрически системой изолиний.

Первые два условия — конечность и однозначность — очевидны и не вызывают сомнений.

Иного порядка свойство непрерывности и плавности изменения функции, особенно третьего рода. Конкретные данные реальных наблюдений (прерывистый характер оруденения) на первый взгляд противоречат этому. Однако это кажущееся противоречие устраняют правильной обработкой результатов измерений показателей методами математической статистики и теории случайных функций.

Пусть имеется план месторождения, на котором у точек опробования выписаны числовые значения содержания какого-нибудь компонента и по ним построена поверхность (рис. 1.3, *a*). Эта поверхность включает в себя закономерную и случайную составляющую размещения показателя. На первый взгляд по мелкопочной, прерывистой поверхности какой-либо плавности и непрерывности в изменении содержания компонента не замечается. Но если на план наложить лист с вырезанным небольшим отверстием — окном, вычислить среднее содержание компонента из значений, попавших в пределы окна, и отнести это среднее к центру окна, то обнаруживается, что при плавном перемещении окна по плану (скользящее окно) также плавно из-



**Рис. 1.3.** Геометрическая интерпретация размещения орудения:  
*a* — геометрия размещения компонента; *b* — усреднение значения показателя; *в* — геометрическое выражение функции размещения показателя

меняется среднее содержание компонента (рис. 1.3, *b*). Метод обработки данных опробования скользящим статическим окном позволяет с определенной средней погрешностью перейти от хаотической многогранной пирамидальной поверхности сначала к призматической, а затем — к некоторой плавной топографической поверхности, выражающей в изолиниях наиболее вероятную закономерную составляющую размещения средних значений показателя (рис. 1.3, *в*).

Если из уравнения (1.1) исключить время  $t$ , считая, что за период изучения свойство объекта практически не изменится, то для некоторого плоского сечения, имеющего постоянную от-метку  $z$ , численные значения функции будут зависеть от изменения аргументов  $x$  и  $y$  и выражаться функцией топографического вида:

$$P_z = F(x, y). \quad (1.2)$$

Отсюда любое свойство поля в любом плоском сечении (слое) геометрически выражают системой непересекающихся изолиний, так же как системой изолиний на плане изображают реальную поверхность рельефа местности, кровли и почвы залежи, поверхность разрыва и т.п.

## ***1.2. Математическое моделирование размещения показателя в недрах***

***Математическая модель*** — это абстрактный аналог физической модели, в которой объекты заменены математическими понятиями — переменными, параметрами, константами.

Математические модели можно разбить на три группы: детерминированные, вероятностные и динамические.

*Детерминированной моделью* называют такую модель, в которой отсутствует случайная компонента и каждому значению аргумента соответствует только одно значение зависимой переменной.

К числу детерминированных моделей можно отнести закономерности и зависимости, устанавливаемые в процессе геомет-

ризации, например уравнения регрессии, полиномиальные модели, тренды, ряды Фурье и т. д.

В практике геометризации детерминированные модели в чистом виде, как правило, не встречаются. В подавляющем большинстве случаев в исходных данных присутствует случайная компонента. Поэтому исследователь имеет дело либо с вероятностной, либо с динамической вероятностной моделями.

К *вероятностным моделям* относят модели законов распределения случайных величин (равномерный закон распределения, нормальный, логарифмически нормальный, Вейбулла и другие).

*Динамические модели*, широко применяемые при геометризации, могут быть детерминированными и вероятностными.

Простейшим примером динамической детерминированной модели может служить синусоида  $y = A\sin(x)$ , в которой каждому значению аргумента соответствует одно, и только одно, значение функции.

Если к этому уравнению добавить случайную компоненту, то получится динамическая вероятностная модель, в которой заранее нельзя предсказать, какое именно значение примет функция при том или ином значении аргумента.

Для изучения динамических рядов используют теорию случайных функций, полиномиальные модели, анализ Фурье.

*Применение компьютера при моделировании месторождений* позволяет автоматизировать решение таких горно-геометрических задач, как выявление статистических закономерностей размещения и связей между показателями, подсчет запасов полезного ископаемого с разбивкой по сортам и категориям, учет добычи, потерь, разубоживания, планирование горных работ в режиме усреднения, построение горно-геометрических графиков размещения различных показателей месторождения, а также определение объемов складов и отвалов по данным маркшейдерской съемки и т. п.

При решении этих задач на компьютере возникает проблема математического отображения в памяти машины геометрических параметров месторождения, размещения качественных характеристик, их математического моделирования.

Выделяют два способа представления информации в памяти компьютера — *матричный* и *аналитический*.

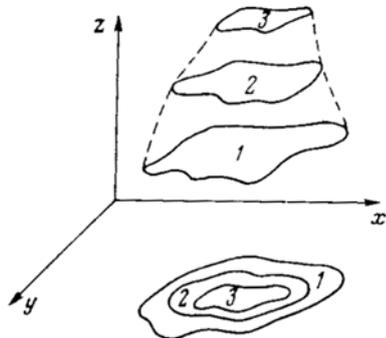
Первый способ характеризуется тем, что информация о геометрических и качественных характеристиках записывается в виде матрицы цифр и определенным образом располагается в памяти машины. Такие математические модели называют дискретными или цифровыми. Во втором способе геометрические и качественные характеристики задают в форме непрерывных функций. Формой хранения информации является аналитическая модель (рис. 1.4):  $z_1 = f_1(x, y)$ ;  $z_2 = f_2(x, y)$  и  $z_3 = f_3(x, y)$ .

Размещения многих геологических параметров настолько сложны, что в ряде случаев невозможно или весьма трудно представить их с помощью математических непрерывных функций. К тому же многие геологические зависимости касаются качественных характеристик (например, тип или сорт пород), которые легче представить в дискретной форме.

Дискретная форма представления информации заключается в приближенном отображении моделируемой поверхности, используя сетку прямоугольных ячеек (см. рис. 1.3, б). Так, двумерная модель, изображенная на рис. 1.3, б, содержит информацию как о поверхности (высота призм), так и о всем теле (расположение призм). Высота призм может характеризовать глубину, мощность, содержание компонента, плотность слоев, размер кондиционных интервалов и т. п. Систематизированная таким образом цифровая последовательность чисел (матрица) представляет собой эффективное средство накопления, хранения и представления геологической информации, т. е. цифровую модель месторождения (рис. 1.5).

Цифровые модели обладают широкими возможностями описания качественных и количественных характеристик, имеющих дискретный характер (геологические нарушения, тип, сорт, содержание компонентов и т. п.).

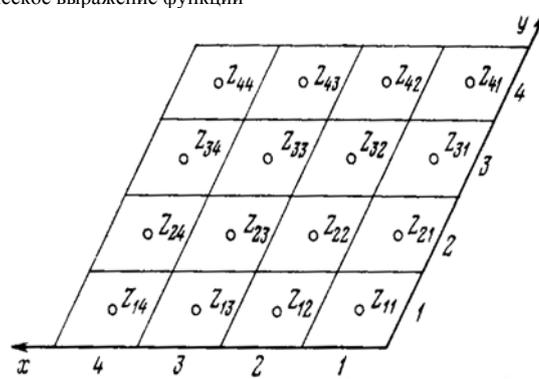
Созданная однажды модель может быть использована при решении различных задач в любое время. Исходной информацией для построения модели являются данные геологоразведочных работ, опробования и маркшейдерских съемок.



В настоящее время разработана система хранения и восстановления геологической информации, а также способов ее картирования — построения планов, разрезов и т. п. С ее помощью осу-

**Рис. 1.4.** Графическая модель параметра залежи:

1, 2, 3 — графическое выражение функций



**Рис. 1.5.** Цифровая модель месторождения

ществляют подсчет объемов и пересчет запасов. В модели проводят аппроксимацию поверхностей раздела тренд-поверхностями в виде общей поверхности второго порядка, полученной с использованием метода наименьших квадратов.

Построение модели месторождения начинают с выбора условной прямоугольной системы координат так, чтобы месторождение в целом или подсчетный блок располагались в первом октанте  $x > 0$ ;  $y > 0$ ;  $z > 0$ . Начало отсчета системы располагают за пределами границ подсчетного блока. Вся площадь моделируемого подсчетного блока покрывают прямоугольной сеткой в плоскости  $xu$ . Во всех прямоугольниках вычисляют среднее значение параметра  $S_i$ , которое относят к центру и считают постоянным в границах прямоугольника. Значение параметра в элементарном прямоугольнике

принимают известным, если в контуре площадки уже имеются исходные значения параметра. Если определить его невозможно, пользуются методом интерполяции между точками с известными значениями, расположенными не дальше радиуса корреляции  $R$ . Причем, если число точек в пределах радиуса корреляции меньше минимального числа точек для интерполирования, то значение в рассматриваемой точке остается неопределенным, т.е. данных недостаточно. Если точек достаточно, то значения параметра определяют методом, соответствующим заданному номеру модификации интерполяции — линейной, оптимальной и пр.

*Построение горно-геометрических графиков* является весьма ответственным и трудоемким процессом. Помимо наглядности, от графика требуется определенная точность, достигаемая большими затратами ручного труда. Развитие компьютерной технологии позволило автоматизировать эту трудоемкую процедуру.

### ***1.3. Методы и виды геометризации недр***

Геометризация (рис. 1.6) предусматривает сбор исходных данных, их предварительную обработку, систематизацию, оценку точности, построение геолого-математической и геометрической модели с последующей оценкой ее качества (точности) и использованием модели при освоении недр, а также выработке новых гипотез о геологии месторождения.

Для осуществления геометризации месторождений необходимо, чтобы интересующие нас показатели залежи и боковых горных пород в различных точках были измерены и выражены числом.

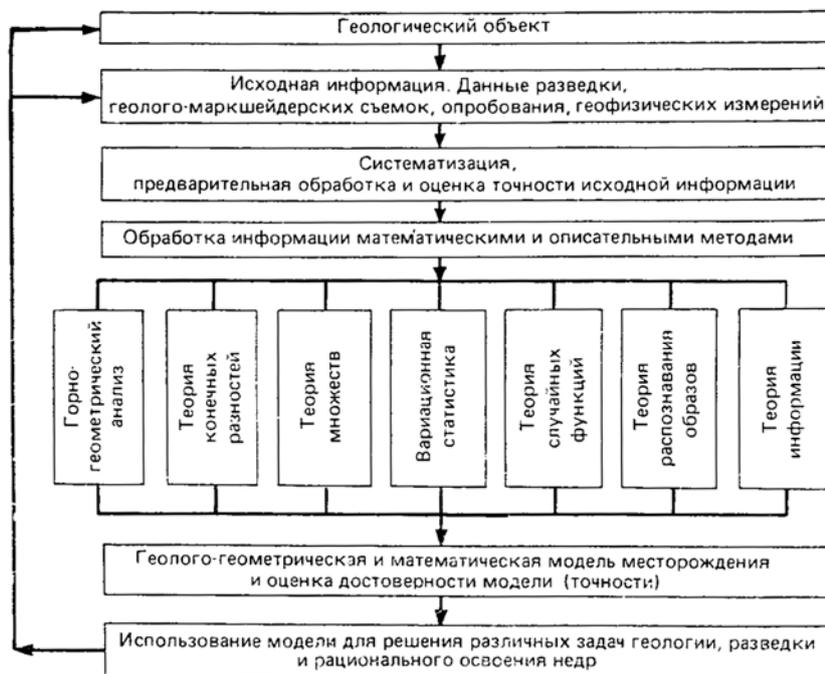


Рис. 1.6. Общая схема геометризации

Эти измерения и определения выполняют при разведке и эксплуатации месторождений. Вначале их выражают в виде таблиц, отдельных зарисовок, фотоснимков и описаний, затем эти данные обрабатывают и обобщают. Обобщение данных наблюдений производят с помощью вероятностно-статистического математического аппарата. По результатам обработки с учетом геологических особенностей месторождения строят специальные горно-геометрические графики, дающие уменьшенное, подобное и наглядное изображение формы залежей месторождения, их положения в недрах и геометрию размещения свойств.

При построении горно-геометрических графиков не только увязывают и обобщают данные наблюдений, но и выявляют и устраняют отдельные ошибки измерений и графических построений.

Геометризацию месторождения производят последовательно на каждой стадии его разведки и разработки.

**Геометризация месторождения** — это процесс его изучения и познания. Процесс этот — постепенный и последовательный.

Каждые, вновь получаемые данные при разведке и особенно при разработке месторождения, уточняют прежние представления о нем, позволяют корректировать ранее составленные графики и использовать их для принятия правильного решения задач последующей разведки и разработки. Геометризация недр не исключает геологического их изучения. Она является научной математической (геометрической) базой комплексного изучения недр.

В большинстве случаев только при разработке полезного ископаемого имеется возможность получить наиболее полные данные о месторождении. Эти данные имеют особое значение при составлении на соседние участки или нижние горизонты достоверных прогнозов, необходимых для рационального планирования горных работ, эффективного использования комплексов машин при добыче и выборе соответствующих мест дополнительных наблюдений — до разведки, опробования.

Для геометризации недр основными являются методы изолиний, геологических разрезов (сечений) и профилей; объемных наглядных графиков и моделирования с использованием компьютеров. Каждый из перечисленных методов применяют самостоятельно или чаще совместно с другими.

**Методом изолиний** при геометризации недр изображают поверхности не только реальные, но и условные. Сложность отображения поверхностей зависит от многих геологических факторов. Поэтому построение изолиний размещения какого-либо показателя при геометризации недр по данным наблюдений в отдельных точках несравненно сложнее построения изогипс земной поверхности.

Достоверность изображения размещения показателя на плане в изолиниях зависит от изменчивости показателя, густоты и соответствия разведочных точек (определений, измерений) характерным точкам показателя, а также от размера, ориентировки проб и масштаба плана.

**Изолинии** — геометрические места точек с одинаковыми значениями показателя недр. Их строят как по результатам измерений в отдельных точках, так и по средним значениям группы точек, относимым к их центру, т. е. двумя способами — непосредственным и косвенным.

**Непосредственный** способ применяют тогда, когда на плоскости чертежа по координатам нанесены точки измерения показателя с

отметками — численными значениями. В результате геометрического анализа отметок намечают инвариантные линии будущей поверхности — линии водораздела, тальвега и седло-вины. Задав сечение, проводят интерполирование отметок по линиям скатов и построение плавных кривых — изолиний.

*Косвенным* способом построения изолиний пользуются тогда, когда исходными данными являются, например, вертикальные разрезы с отмеченными на них значениями показателя. В этом случае с разрезов на план, по линиям разрезов, переносят точки показателя с отметками, кратными выбранному сечению. Точки с одинаковыми отметками соединяют плавными кривыми — *изолиниями*.

При построении изолиний необходимо учитывать все выявленные особенности геологического строения залежи. Этим достигается большое соответствие построенной графической модели натуре.

Метод изолиний имеет свои недостатки. В частности, при изображении формы залежей возникает трудность одновременного изображения и литологии пород, окружающих полезное ископаемое; сложно, а иногда и невозможно в изолиниях изображать тела трубообразной, штокверковой и других сложных форм, а также горизонтально или вертикально залегающие слои правильной формы.

*Способ геологических разрезов* не имеет этого недостатка. Он позволяет отображать форму тела полезного ископаемого и представлять его положение среди вмещающих пород в данном сечении — вертикальном, горизонтальном и наклонном.

При горизонтальном и вертикальном залегании пластовых залежей с выдержанной мощностью система геологических разрезов — вертикальных или горизонтальных — является основной графической документацией, отображающей морфологию и условия залегания месторождения.

Исходными для построения геологических разрезов являются данные геологоразведочных скважин и горных выработок.

На вертикальных разрезах по линии разведочных скважин строят высотную сетку, профиль земной поверхности, профили осей разведочных выработок, по которым в условных знаках наносят пройденные при бурении горные породы, производят увязку стратиграфически одинаковых горных пород и залежей по соседним выработкам.

С помощью одних разрезов, без изолиний, трудно, а иногда невозможно представить на чертеже форму залежи, характер изменения содержания компонента, изменения физико-технических и горно-геологических свойств залежи и боковых пород и т. п.

Поэтому при геометризации используют и метод изолиний и геологические разрезы. Оба метода дополняют друг друга в части наглядности и полноты изображения, а также облегчают взаимное построение и построение других горно-геометрических графиков и моделей.

**Метод объемных наглядных графиков** применяют для наглядного изображения формы, свойств залежей и горных выработок со сложным характером их размещения в недрах.

Наглядные графики строят в аксонометрических, аффинных, векторных и других, например стереоаксонометрических, проекциях. Исходными данными для построения служат планы, разрезы, профили, а также координаты характерных точек изображаемых объектов. Преобразование исходных данных в тот или иной вид проекции осуществляют вручную, с помощью специальных механических приборов, например аффинографов, а также с помощью компьютеров и графопостроителей.

Ведутся работы по геометрическому наглядному моделированию недр с помощью голографии.

**Метод моделирования** является одним из древних методов исследований и одновременно одним из наиболее распространенных способов изучения различных процессов и явлений. Сам термин «модель» происходит от латинского «modus» (копия, образец). Абсолютно точно воссоздать модель явления или процесса практически невозможно, да этого и не требуется. На практике исследователь выявляет лишь существенные, характерные черты процесса и в соответствии с последним подбирает приближенную модель. Различают физическое и символическое моделирование. При физическом моделировании модель воспроизводит изучаемый процесс или объект с сохранением его физической природы. Модели строят статические и динамические.

Символическое моделирование имеет три формы — *графическую, графоаналитическую и математическую*.

*Статические* модели строят для наглядного представления о месторождении на определенный момент его изученности. Главное

внимание здесь обращают на выразительность изображения отдельных особенностей месторождения. При этом модель должна быть достаточно простой, несложной и небольших размеров (не более 1—1,5 м). Стремление показать на одной модели большое число отдельных деталей приводит к построению сложных и запутанных моделей, малопригодных на практике. Для отображения особенностей месторождения модели делают разъемными. Места разъема приурочивают к продольным или поперечным профилям, на которых изображают соответствующие геологические разрезы, разведочные и горные выработки.

Модели изготовляют из дерева, скульптурной глины, пластилина, картона, стекла, пластика (плексиглас, венипроз и пр.) и пластмассы. В качестве связующих веществ применяют различные клеи.

*Динамические* модели месторождений представляют наибольший интерес для действующих горных предприятий. Они состоят из серии маркшейдерских или геологических планов, нанесенных на прозрачные пластины из органического стекла, легко поддающиеся обработке.

От динамических моделей требуется, чтобы они давали подобное уменьшенное изображение ситуации и рельефа местности, геологии участка и системы горных выработок, позволяли легко пополнять модель и видоизменять изображаемый объект по новым данным съемки и разведки.

**Графическое моделирование**, к которому относятся геологические, структурные, петрографические, геохимические планы, карты и разрезы, проекции рудных тел, карты трещиноватости, технологические карты, блок-диаграммы и др., весьма распространено в геологии и горном деле.

Геометрическая модель месторождения представляет собой, во-первых, комплект горно-геометрической графической документации, отражающей закономерности размещения форм и свойств залежей в пространстве недр, и, во-вторых, установленные на основе математической обработки аналитические и вероятностные зависимости между геологическими признаками.

Геометрическая модель служит основой для решения многих задач разработки месторождения, таких как: проектирование схемы вскрытия, порядка отработки и систем разработки месторождения; укрупненное планирование горных работ; оперативное планирова-

ние горных работ; обоснование кондиций по мощности и содержанию; нормирование потерь и разубоживания; нормирование запасов по степени подготовленности; разработка рекомендации по оптимизации плотности разведочных сетей; подсчет запасов полезного ископаемого; прогнозирование размещения полезного ископаемого на неразведанные участки; выводы о генезисе месторождения, моделирование процессов управления разведкой и рациональной разра-боткой месторождений.

В процессе геометризации осуществляют новые теоретические разработки в области математических методов обработки информации. При этом предусматривается решение двух основных задач: *первая* — на основе использования всей полученной о месторождении на данном этапе информации создать наиболее правдоподобную модель месторождения с оценкой ее точности, т. е. установить степень соответствия модели натуре, *вторая* — установить такое минимальное число точек наблюдений (скважин, проб и т. п.) и их расположение при разведке, по данным которых построенная модель месторождения будет близка к натуре с погрешностью, не превышающей величины, устанавливаемой требованиями горного производства.

**Виды геометризации недр.** Геологические показатели разделяются на признаки, характеризующие форму массива горных пород, его свойства и процессы, происходящие в недрах.

В зависимости от того, какую сторону недр главным образом; изучают, различают: геометризацию формы залежей полезных ископаемых и условий их залегания; геометризацию размещения физико-химических и технологических свойств залежей и вмещающих пород; геометризацию процессов, происходивших и происходящих в недрах — как изменение формы и свойств вещества в пространстве и во времени.

При геометризации составляют комплекс горно-геометрических чертежей.

Форму залежей и условия их залегания представляют гипсометрические планы кровли и почвы залежи, изолинии мощности, изоглубины залегания, изогипсы поверхности водоупорного горизонта, поверхностей тектонических нарушений, вертикальные и горизонтальные разрезы и пр.

Геометризацию свойств залежей и массива горных пород представляют графики изолиний содержания того или иного компонен-

та в полезном ископаемом, изолинии трещиноватости, пористости, крепости того или иного слоя горных пород и др.

Происходящие в недрах изменения режима подземных вод, геотемпературного поля Земли, напряженного состояния массива горных пород из-за проведения в нем горных выработок и другие при геометризации представляются соответствующими графиками по линиям (сечениям) или в виде изолиний или векторов, характеризующих направления и скорости изучаемых параметров.

В зависимости от этапа изучения месторождения, конкретных задач и масштабов составления горно-геометрических чертежей различают региональную, детально-разведочную и эксплуатационную геометризацию месторождений.

*Региональную геометризацию* осуществляют в масштабах от 1 : 50 000 до 1 : 500 000 по данным поисковых работ, космической, аэрофотографической, геологической и геофизической съемок. Она позволяет делать широкие обобщения и общие прогнозы, определять районы, перспективные для дальнейшей разведки месторождений.

*Детально-разведочную геометризацию* проводят в масштабах от 1 : 5000 до 1 : 50 000 на основе данных детальной разведки, геологической, структурно-геологической и геофизической съемок. На этой стадии составляют различные горно-геометрические графики формы, условий залегания залежи, размещения в них компонентов и пр. По материалам геометризации оценивают месторождения, подсчитывают запасы, проектируют горные предприятия.

*Эксплуатационную геометризацию* составляют в масштабах 1 : 100 — 1 : 5000. Ее проводят на основе материалов детальной разведки и богатой горно-геологической информации, получаемой при проходке подготовительных и очистных горных выработок.

Эксплуатационная геометризация позволяет вскрывать закономерности структурного и качественного характера, на основе которых становится возможным строить прогнозы на ближайшие участки недр и планировать рациональную их разработку.

Горно-геометрические графики при геометризации строят в проекции на горизонтальную, наклонную и вертикальную плоскости. Плоскость проекции определяют углом падения залежи и назначением графика. Чаще всего их строят в проекции на горизонтальную плоскость и называют планами.

Региональная, детально-разведочная и эксплуатационная геометризация представляют собой этапы последовательного изучения и познания месторождения, начиная от его открытия и до полной отработки.

Различают общую методику геометризации месторождений полезных ископаемых и частные — конкретные.

В общей методике геометризации рассматривают вопросы техники и методики выявления и изображения форм и свойств месторождений, их условий залегания и процессов, происходящих в недрах.

В частных, конкретных методиках геометризации рассматривают особенности геометризации отдельных типов месторождений — угольных, железорудных, цветных металлов, нефтехимических, горнохимического сырья, строительных материалов и других с учетом схемы вскрытия и системы разработки.

Конкретная методика геометризации при открытом и подземном способах разработки месторождений имеет отличия. Обусловлены они разными способами сбора информации о размещении показателей, что приводит к особенностям обработки этой информации и построения горно-геометрических графиков.

При геометризации конкретных месторождений в одних случаях большее внимание уделяется геометризации формы и условий залегания, в других — выявлению закономерностей размещения оруденения, зависимости между показателями, в третьих — максимальному учету всех показателей, характеризующих и форму, и размещение различных свойств залежей и условий их залегания, в четвертых — процессам, происходящим в недрах при проведении горных выработок.

## ***Глава 2***

### ***МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ПРИЕМЫ ОБРАБОТКИ НАБЛЮДЕНИЙ ПОКАЗАТЕЛЕЙ ЗАЛЕЖИ***

---

#### ***2.1. Общие сведения***

Если бы во время разведки (изучения объекта) точки для измерения показателя удалось располагать в характерных местах и в достаточном количестве и определения производить безошибочно, то в результате по реализации или выборочной совокупности можно было бы получить полную, достаточно точную характеристику (модель) изучаемого объекта.

Однако фактически, на первоначальной стадии изучения объекта, характерных его точек мы не знаем или знаем их весьма приближенно (их выявляют лишь после детального изучения объекта, т. е. после разработки залежи). Провести много-численные наблюдения часто не представляется возможным. Поэтому сведения о том или ином показателе и, следовательно, о всей залежи получаются приближенными.

В некоторых случаях на основании геологических предпосылок, особенно при выявлении формы складчатых месторождений, точки наблюдения задают в характерных местах изменения одного какого-то показателя залежи, и его выявляют с большой степенью точности. Однако в основном эти точки оказываются нехарактерными для другого показателя, например какого-либо свойства залежи.

Практически положение разведочных выработок, мест взятия проб, точек замера свойств горных пород при беспорядочном или геометрически определенном расположении по линии или сетке, как правило, является случайным относительно характерных точек размещения изучаемого показателя залежи.

Получаемые таким образом данные являются случайными по значению величинами, т. е. совокупность их представляет собой случайную выборку или, другими словами, изучаемое поле определяют его реализацией так же, как реализациями определяют слу-

чайную функцию. Естественно, что каждая реализация тем ближе отражает действительность, чем больше объем выборки, чем больше точки выборки отвечают характерным точкам размещения показателя (признака), чем меньше ошибки измерений и изменчивость показателя.

Вскрытие закономерности размещения свойств залежи, т.е. генеральной совокупности, по выборочной совокупности (реализации) связано с группировкой, систематизацией и усреднением результатов наблюдений, вычислением обобщенных показателей, их анализом, т.е. статистической обработкой исходных данных. Эти сведения обычно сосредоточены в журналах, каталогах, зарисовках и другой геолого-маркшейдерской документации, а также в банках данных компьютеров.

Методами математической статистики при изучении показателей недр решают, в частности, следующие задачи:

- определение по выборочной совокупности оценок различных характеристик генеральной совокупности (среднего значения, дисперсии, коэффициента вариации и т. д.);
- установление особенностей и законов статистического распределения значений геологических признаков залежи, что помогает определить природу и генезис месторождения (при этом, в частности, можно решить вопрос, рассматривать ли литологические разновидности, слагающие залежь, как однородную статистическую совокупность, как одно геохимическое поле или неоднородную совокупность);
- установление наличия, тесноты и вида корреляции (вероятностной связи) между различными показателями залежи;
- определение оптимального объема выборочной совокупности для получения по ней статистических характеристик всей генеральной совокупности с заданной степенью точности; установление доверительных интервалов, в пределах которых с той или иной вероятностью находятся значения статистических характеристик и законы статистического распределения как выборочной, так и генеральной совокупностей.

Статистические методы исследования недр позволяют устанавливать в кажущемся хаосе данных наблюдений порядок, статистические связи и тем самым объективно познавать изучаемое явление в целом. При этом имеется в виду, что результаты наблюдений (выборочная совокупность) представляют собой совокуп-

ность явлений и событий качественно однородных, внут-ренне связанных, но внешне независимых и обособленных.

Применение формул и методов математической статистики при исследовании недр может быть успешным только при уяснении природы изучаемого объекта и условий появления отдельных значений, часто статистически неравноценных.

Вскрываемые при обработке наблюдений закономерности проявления изучаемого признака или совокупности признаков в недрах позволяют составлять на основе геометризации показателей залежи более вероятные прогнозы на соседние участки месторождения и использовать их для эффективной разработки месторождения.

Математическая статистика тесно связана с теорией вероятностей. Большинство ее выводов базируется на предельных теоремах теории вероятностей, свойствах случайных величин и законах их распределения.

В теории вероятностей существует ряд числовых характеристик случайных величин: математическое ожидание, дисперсия, начальные и центральные моменты и пр.

Аналогичные числовые характеристики существуют и для статистических коллективов. При увеличении числа наблюдений все статистические характеристики сходятся по вероятности к соответствующим математическим характеристикам и при достаточном числе опытов могут быть приняты приближенно равными им.

Итак, методы математической статистики при геометризации недр позволяют выявить статистические характеристики изучаемых объектов. Применение теории случайных функций помогает математически охарактеризовать особенности пространственно-го размещения всей совокупности показателя по ее реализации.

## ***2.2. Случайные величины и законы их распределения***

Случайной называют величину, которая в результате опыта может принять то или иное неизвестное заранее числовое значение. Различают дискретные и непрерывные случайные величины.

*Непрерывная* случайная величина в пределах ее изменения может принимать любые значения. Например, если содержание свинца находится в интервале 0,00 — 20,00 %, то при опробовании мо-

жем получить любое значение в этом интервале. Ее задают функцией распределения и плотностью вероятности (графически — кривыми функции распределения и плотности вероятности).

*Дискретная* случайная величина может принимать только целые значения (0, 1, 2, 3, ...). Например, число золотинок в одном кубическом метре песка россыпного месторождения золота. Ее задают рядом распределения (графически — полигоном распределения или гистограммой) и функцией распределения.

Пусть дискретная величина  $X$  в результате опыта получает различные значения  $x_i$  с вероятностями  $p_i$  (при этом  $\sum p_i = 1$ ).

Связь между возможными значениями случайной величины и вероятностями их появления устанавливает закон распределения. Простейшей формой задания такого закона является *таблица значений  $x_i$  и  $p_i$* , или *ряд распределения*.

Графически ряд распределения *изображают полигоном распределения*: по горизонтальной оси откладывают возможные значения случайной величины, а по вертикальной — вероятности этих значений. Этот же ряд распределения может быть изображен в виде *гистограммы*.

Для непрерывной величины ряд распределения получают путем разделения  $N$  возможных значений непрерывной случайной величины на равные по величине классы (разряды). В каждом разряде подсчитывают *частоту  $n_i$* , и вычисляют частоты  $n_i/N = p_i$ , которые принимают за эмпирические или статистические вероятности. В результате получают распределение вероятностей и для непрерывной величины. Чем меньше величина интервала, тем точнее при достаточно большом объеме выборки построенное распределение отражает действительное.

Для количественной характеристики распределения вероятностей определяют вероятность события  $\sqrt{P}$  при  $X < x$ , где  $x$  — текущая переменная.

Вероятность этого события зависит от  $x$  и есть некоторая функция  $x$ :

$$P(X < x) = F(x). \quad (2.1)$$

Эту функцию называют *статистической*, или *интегральной функцией распределения*. Она дает полную характеристику случай-

ной величины с вероятностной точки зрения и существует для всех случайных величин, непрерывных и дискретных.

Чтобы найти значение статистической функции распределения при данном  $x$ , подсчитывают число  $n$  опытов, в которых  $X$  приняло значение меньше, чем  $x$ , и делят  $n$  на общее число опытов.

Производная от функции распределения называется плотностью вероятности (или дифференциальной функцией распределения):

$$f(x) = F'(x). \quad (2.2)$$

Для статистической совокупности плотность вероятности представляется статистическим рядом, а графически — гистограммой или полигональной кривой. Если всю статистическую совокупность разбить на разряды (интервалы), в каждом разряде подсчитать число наблюдений и разделить его на общее их число, то получим частоты. Интервалы разрядов (или их средние значения) и их частоты представляют статистический, или вариационный, интервальный ряд. Частные значения случайной величины, входящие в вариационный ряд, называются *вариантами*.

Рассмотрим статистическую совокупность, членами которой являются значения содержания никеля, полученные в пределах одной очистной камеры полиметаллического месторождения по данным бороздового опробования и кернового бурения. Совокупность предварительно упорядочена, т.е. члены ее расположены в порядке возрастания их значений.

Номера проб .....	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Содержание, % .....	1,85	2,18	2,37	2,56	2,61	2,69	2,73	2,76	2,84	2,87

*Продолжение*

Номера проб .....	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Содержание, % .....	2,92	2,95	3,07	3,09	3,13	3,15	3,18	3,21	3,24	3,29

*Продолжение*

Номера проб .....	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
Содержание, % .....	3,33	3,35	3,40	3,42	3,48	3,50	3,51	3,57	3,62	3,68

*Продолжение*

Номера проб .....	31	32	33	34	35	36	37	38	$N = 38$	
Содержание, % .....	3,75	3,83	3,91	3,98	4,09	4,32	4,47	4,76		

Упорядоченный вариационный ряд может быть также задан вариантами и соответствующими им частотами (или частотями),

однако в данном случае такой способ задания не имеет смысла, так как каждый вариант встречается только один раз.

Задание ряда существенно упрощается при разбиении его на интервалы. Оптимальную ширину  $h$  интервала определяют по формуле Стердженса:

$$h = (x_{\max} - x_{\min}) / (1 + 3,2 \lg N), \quad (2.3)$$

где  $x_{\max}$  и  $x_{\min}$  — наибольший и наименьший варианты;  $N$  — число вариантов в ряду (объем выборки). Для нашего примера имеем:

$$h = (4,76 - 1,85) / (1 + 3,2 \lg 38) = 0,48 \approx 0,5 \%$$

Разбиваем исходную совокупность на интервалы шириной в 0,5 и подсчитываем частоту, соответствующую каждому из интервалов. Теперь исходная статистическая совокупность может быть задана в виде интервального ряда (табл. 2.1).

По значениям интервалов и частотам  $n_i$  строят гистограмму полученного интервального ряда по серединам интервалов  $\bar{x}_i$  и частотам  $n_i$  или полигональную кривую распределения. Гистограмма и полигональная кривая могут быть построены с использованием не частот  $n_i$ , а частостей  $p_i$ .

В табл. 2.1 подсчитаны также накопленные частоты  $N_i$ , которые могут определяться как в нисходящем, так и в восходящем порядке и служат для графического изображения интервального вариационного ряда с помощью кумулятивной кривой (кумуляты). Кумуляту строят как по накопленным частотам, так и по накопленным частостям.

Таблица 2.1

Интервал значений $x_i$ , %	Значение середины интервала $\bar{x}_i$	Частота $n_i$	Накопленная частота $N_i$	Частотность $p_i = \frac{n_i}{N}$
1,5 — 2	1,75	1	1	0,026
2 — 2,5	2,25	2	3	0,053
2,5 — 3	2,75	9	12	0,237
3 — 3,5	3,25	14	26	0,369
3,5 — 4	3,75	8	34	0,210
4 — 4,5	4,25	3	37	0,079
4,5 — 5	4,75	1	38	0,026
		$N = \sum n_i = 38$		$\sum p_i = 1$

Во всех случаях задания и изображения вариационного ряда с помощью частости последнюю принимают за приближенное значение вероятности. При увеличении объема  $N$  выборки статистическая функция распределения приближается (сходится по вероятности) к действительной функции распределения случайной величины.

**Некоторые законы распределения случайных величин.** Плотность вероятности описывают функциями, куда входят математическое ожидание, дисперсия и стандарт.

*Математическим ожиданием* случайной величины  $X$  дискретного типа называют сумму произведений всех значений величины на их вероятности:

$$M[X] = m_x = \sum_{i=1}^n x_i p_i. \quad (2.4)$$

Математическое ожидание является генеральной средней случайной величины. Оно связано со средним арифметическим наблюдаемых значений (выборочным средним) случайной величины зависимостью такого же порядка, как частость с вероятностью.

При небольшом числе опытов среднее арифметическое их результатов случайно. При увеличении числа опытов оно становится «почти неслучайным» и, стабилизируясь, приближается к постоянной величине — математическому ожиданию.

Математическое ожидание непрерывной случайной величины выражают интегралом

$$M[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx, \quad (2.5)$$

где  $f(x)$  — плотность вероятности величины  $X$ .

*Дисперсией* случайной величины называют математическое ожидание квадрата разности между случайной величиной и ее математическим ожиданием:

$$\sigma^2 = D_x = M[(X - m_x)^2]. \quad (2.6)$$

Дисперсия характеризует рассеяние возможных значений случайной величины около ее среднего значения. Ее вычисляют по несгруппированным данным по формуле

$$\sigma^2 = \sum (x_i - \bar{x})^2 / N, \quad (2.7)$$

по сгруппированным данным по формуле

$$\sigma^2 = \sum (x - \bar{x})^2 n_i / \sum n_i, \quad (2.8)$$

где  $\bar{x}$  — среднее значение случайной величины.

Стандарт представляет собой среднее квадратичное отклонение случайной величины и определяется как корень квадратный из дисперсии:

$$\sigma = \pm \sqrt{\sigma^2}. \quad (2.9)$$

Стандарт средней в  $\sqrt{N}$  раз меньше стандарта отдельной переменной:

$$\sigma_{\bar{x}} = \sigma / \sqrt{N}. \quad (2.10)$$

Рассмотрим теперь некоторые законы распределения случайных величин (рис. 2.1).

Нормальный закон — наиболее часто встречающийся на практике закон распределения. Плотность вероятности характеризуется функцией вида

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, \quad (2.11)$$

где  $a$  — математическое ожидание величины  $X$ ;  $\sigma^2$  — дисперсия случайной величины  $X$ .

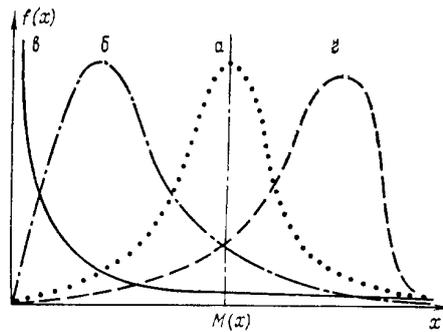
Следовательно, нормальный закон распределения вполне определяется математическим ожиданием и дисперсией (или стандартом) случайной величины. Кривая распределения представляет собой симметричную холмообразную кривую.

*Распределение Пуассона* (распределение редких явлений) — распределение дискретной случайной величины вида:

$$P_m = \frac{a^m}{m!} e^{-a}, \quad (2.12)$$

где  $P_m$  — вероятность появления случайной величины  $m$ ;  $a^m$  — математическое ожидание  $m$  или среднее значение признака для всей совокупности

Закон Пуассона является разновидностью биномиального распределения, когда число событий велико, а вероятность появления отдельного события мала. Редкие события подчиняются закону Пуассона при условии, если вероятность появления одного или нескольких событий в определенной области не зависит от числа появлений их в другой области; и в каждой области события располагаются независимо друг от друга.



**Рис. 2.1.** Типы кривых плотности распределения вероятностей: *a* — нормальные; *б* — логарифмически нормальные; *в* — гиперболовидные (редких явлений Пуассона); *г* — биномиальные

Для распределения Пуассона дисперсия равна математическому ожиданию. Это свойство часто применяют для подтверждения гипотезы распределения: если по данным опыта значения среднего и дисперсии приблизительно равны ( $a \approx \sigma^2$ ), то это дает основание считать, что распределение подчиняется закону Пуассона.

### 2.3. Сравнение эмпирического распределения с теоретическим

Подбор теоретической плавной кривой распределения (закона), наилучшим образом описывающей данное статистическое распределение, называется выравниванием (сглаживанием) статистического ряда.

Как бы хорошо не была подобрана теоретическая кривая, между нею и статистическим распределением неизбежны некоторые расхождения. Величину этого расхождения определяют графически или с помощью *критерия согласия* (критерий А.Н. Колмогорова, хи-квадрат Пирсона и др.).

При графическом способе сравнения строят эмпирическую функцию распределения  $F_э(x)$ . На этом же чертеже проводят теоретическую кривую распределения  $F_т(x)$ . По совпадению кривых определяют соответствие принятого по гипотезе закона и эмпирического распределения.