Атанасян Л.С.
Бутузов В.Ф.
Кадомцев С.Б.
Юдина И.И.

Геометрия. 8 класс

МОСКВА
ФИЗМАТЛИТ ®

УДК 373.167.1:514
ББК 22.151я.721
Г 36

Атанасян Л. С., Бутузов В. Ф., Кадомцев С. Б., Юдина И. И. **Геометрия. 8 класс.** — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. — 240 с. — ISBN 5-9221-0573-6.

Настоящее издание является второй частью учебно-методического пособия, содержащего решения задач из учебника «Геометрия 7–9» Л. С. Атанасяна, В. Ф. Бутузова, С. Б. Кадомцева, Э. Г. Позняка, И. И. Юдиной (М.: Просвещение, 1990 и последующие издания). Данный выпуск содержит решения задач, относящихся к 8 классу.

ISBN 5-9221-0573-6

ОГЛАВЛЕНИЕ

Глава 1

ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКИ

§ 1. Многоугольники

364. Найдите сумму углов выпуклого: а) пятиугольника; б) шестиугольника; в) десятиугольника.

Решение. а) $S_5 = 180^\circ \cdot (5-2) = 180^\circ \cdot 3 = 540^\circ$;
б) $S_6 = 180^\circ \cdot (6-2) - 180^\circ \cdot 4 = 720^\circ$;
в) $S_{10} = 180^\circ \cdot (10-2) = 180^\circ \cdot 8 = 1440^\circ$.

Ответ. а) 540°; б) 720°; в) 1440°.

365. Сколько сторон имеет выпуклый многоугольник, каждый угол которого равен: а) 90°; б) 60°; в) 120°; г) 108°?

Решение. Пусть выпуклый многоугольник имеет n сторон и:

а) каждый угол его равен 90°, тогда

$$180^\circ \cdot (n-2) = 90^\circ \cdot n,$$

$180^\circ \cdot n - 360^\circ = 90^\circ \cdot n$, $90^\circ \cdot n = 360^\circ$, $n = 4$;

б) каждый угол его равен 60°, тогда

$$180^\circ \cdot (n-2) = 60^\circ \cdot n,$$

$180^\circ \cdot n - 60^\circ \cdot n = 360^\circ$, $120^\circ \cdot n = 360^\circ$, $n = 3$;

в) каждый угол его равен 120°, тогда

$$180^\circ \cdot (n-2) = 120^\circ \cdot n,$$

$180^\circ \cdot n - 360^\circ = 120^\circ \cdot n$, $60^\circ \cdot n = 360^\circ$, $n = 6$;

г) каждый угол его равен 108°, тогда

$$180^\circ \cdot (n-2) = 108^\circ \cdot n,$$

$72^\circ \cdot n = 360^\circ$, $n = 5$.

Ответ. а) 4; б) 3; в) 6; г) 5.

366. Найдите стороны четырехугольника, если его периметр равен 8 см, а одна сторона больше каждой из других соответственно на 3 мм, 4 мм и 5 мм.

Решение. Пусть бо́льшая сторона, например, AB четырехугольника $ABCD$, равна x мм, тогда $BC = (x-3)$ мм, $CD = (x-4)$ мм, $DA = (x-5)$ мм.

По условию периметр его равен 8 см $= 80$ мм, следовательно,
$AB + BC + CD + DA = x + (x-3) + (x-4) + (x-5) = 80$,
$4x - 12 = 80$, $4x = 92$, $x = 23$, т. е. $AB = 23$ мм, $BC = 20$ мм, $CD = 19$ мм, $DA = 18$ мм.

Ответ. 23 мм, 20 мм, 19 мм, 18 мм.

367. Найдите стороны четырехугольника, если его периметр равен 66 см, первая сторона больше второй на 8 см и на столько же меньше третьей стороны, а четвертая — в три раза больше второй.

Решение. Пусть первая сторона четырехугольника равна x см, тогда его вторая сторона $(x-8)$ см, третья сторона $(x+8)$ см, а четвертая сторона равна $3 \cdot (x-8)$ см. По условию периметр этого четырехугольника равен 66 см, следовательно,
$x + (x-8) + (x+8) + 3(x-8) = 66$,
$x + x - 8 + x + 8 + 3x - 24 = 66$, $6x = 90$, $x = 15$.

Ответ. 15 см, 7 см, 23 см, 21 см.

368. Найдите углы выпуклого четырехугольника, если они равны друг другу.

Решение. Сумма углов выпуклого четырехугольника равна $360°$, и так как все они равны друг другу, то каждый из них равен $360° : 4 = 90°$.

Ответ. $90°$.

369. Найдите углы A, B и C выпуклого четырехугольника $ABCD$, если $\angle A = \angle B = \angle C$, а $\angle D = 135°$.

Решение. Так как сумма углов выпуклого четырехугольника равна $360°$ и по условию $\angle D = 135°$, то $\angle A + \angle B + \angle C = 360° - 135° = 225°$.

$\angle A = \angle B = \angle C$ по условию, а их сумма равна $225°$, следовательно, $\angle A = \angle B = \angle C = 225° : 3 = 75°$.

Ответ. $75°$.

370. Найдите углы выпуклого четырехугольника, если они пропорциональны числам 1, 2, 4, 5.

Решение. Так как сумма углов выпуклого четырехугольника равна $360°$ и по условию они пропорциональны числам 1, 2, 4, 5, то $\angle 1 = 360° : (1+2+4+5) \cdot 1 = 30°$,
$\angle 2 = 360° : 12 \cdot 2 = 60°$,
$\angle 3 = 360° : 12 \cdot 4 = 120°$,
$\angle 4 = 360° : 12 \cdot 5 = 150°$.

Ответ. $30°$, $60°$, $120°$, $150°$.

§ 2. Параллелограмм и трапеция

371. Докажите, что выпуклый четырехугольник $ABCD$ является параллелограммом, если: а) $\angle BAC = \angle ACD$ и $\angle BCA = \angle DAC$; б) $AB \parallel CD$, $\angle A = \angle C$.

Решение. а) Пусть в выпуклом четырехугольнике $ABCD$ проведена диагональ AC. Равные углы BAC и ACD являются накрест лежащими при пересечении прямых AB и CD секущей AC, поэтому $AB \parallel CD$, а равные углы BCA и DAC являются накрест лежащими при пересечении прямых BC и AD секущей AC, поэтому $BC \parallel AD$.

Итак, противоположные стороны выпуклого четырехугольника $ABCD$ попарно параллельны, следовательно, по определению этот четырехугольник — параллелограмм.

б) В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ углы A и D — односторонние при пересечении параллельных прямых AB и CD секущей AD, поэтому $\angle A + \angle D = 180^\circ$, а так как по условию $\angle A = \angle C$, то $\angle C + \angle D = 180^\circ$. Углы C и D являются односторонними углами при пересечении прямых BC и AD секущей CD, и их сумма равна 180°, поэтому $BC \parallel AD$.

Итак, в выпуклом четырехугольнике $ABCD$ имеем $AB \parallel DC$ и $BC \parallel AD$, следовательно, четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм.

372. Периметр параллелограмма равен 48 см. Найдите стороны параллелограмма, если: а) одна сторона на 3 см больше другой; б) разность двух сторон равна 7 см; в) одна из сторон в два раза больше другой.

Решение. а) Пусть сторона AD параллелограмма $ABCD$ на 3 см больше стороны AB, тогда по условию

$$2(AB + AD) = 48 \text{ см и } AD = AB + 3 \text{ см}.$$

Имеем:
$AB + AD = 24$ см, $AB + AB + 3$ см $= 24$ см,
$2AB = 21$ см, $AB = 10{,}5$ см, $AD = 13{,}5$ см.

б) Пусть разность сторон AD и AB параллелограмма $ABCD$ равна 7 см, тогда по условию имеем

$$2(AB + AD) = 48 \text{ см и } AD - AB = 7 \text{ см}.$$

Получаем:
$AB + AD = 24$ см, $AD = AB + 7$ см, откуда
$2AB + 7$ см $= 24$ см, $2AB = 17$ см, $AB = 8{,}5$ см, $AD = 8{,}5$ см $+ 7$ см $= 15{,}5$ см.

в) Пусть сторона AD параллелограмма $ABCD$ в два раза больше стороны AB, тогда по условию имеем

$$2(AB + AD) = 48 \text{ см и } AD = 2AB.$$

Получаем:

$AB + AD = 24$ см, $AB + 2AB = 24$ см, $3AB = 24$ см, $AB = 8$ см, $AD = 16$ см.

Ответ. а) 10,5 см, 13,5 см; б) 8,5 см, 15,5 см; в) 8 см, 16 см.

373. Периметр параллелограмма $ABCD$ равен 50 см, $\angle C = 30°$, а перпендикуляр BH к прямой CD равен 6,5 см. Найдите стороны параллелограмма.

Решение. Пусть BH — высота параллелограмма $ABCD$ (рис. 1). В прямоугольном треугольнике CBH $\angle C = 30°$, поэтому катет BH, лежащий против угла в $30°$, равен половине гипотенузы и $CB = 13$ см. Так как периметр параллелограмма равен 50 см, то $CB + CD = 25$ см и $CD = 25$ см $-$ 13 см $= 12$ см.

Ответ. $AB = CD = 12$ см, $AD = BC = 13$ см.

374. Биссектриса угла A параллелограмма $ABCD$ пересекает сторону BC в точке K. Найдите периметр этого параллелограмма, если $BK = 15$ см, $KC = 9$ см.

Решение. Обозначим углы BAK, KAD и BKA цифрами 1, 2, 3, как показано на рисунке 2.

$\angle 1 = \angle 2$, так как луч AK — биссектриса угла A, $\angle 2 = \angle 3$, так как эти углы накрест лежащие при пересечении параллельных прямых BC и AD секущей AK, следовательно, $\angle 1 = \angle 3$.

Треугольник ABK — равнобедренный, так как два его угла 1 и 3 равны, поэтому $AB = BK = 15$ см.

Так как точка K лежит на стороне BC, то $BC = BK + KC = 15$ см $+ 9$ см $= 24$ см.

Итак, $P_{ABCD} = 2(AB + BC) = 2(15 + 24)$ см $= 78$ см.

Ответ. 78 см.

375. Найдите периметр параллелограмма, если биссектриса одного из его углов делит сторону параллелограмма на отрезки 7 см и 14 см.

Решение. Возможны два случая.

а) Рассмотрим параллелограмм $ABCD$, в котором биссектриса угла A пересекает сторону BC в точке K так, что $BK = 7$ см, $KC = 14$ см, и обозначим углы BAK, KAD и AKB цифрами 1, 2, 3, как показано на рисунке 2.

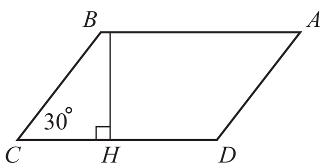


Рис. 1

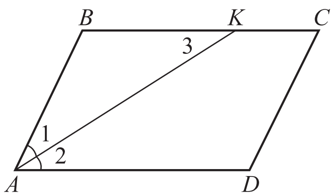


Рис. 2

$\angle 1 = \angle 2$, так как луч AK — биссектриса угла A; $\angle 2 = \angle 3$, так как эти углы — накрест лежащие при пересечении параллельных прямых BC и AD секущей AK. Следовательно, $\angle 1 = \angle 3$ и треугольник ABK — равнобедренный, поэтому $AB = BK = 7$ см.

Так как точка K лежит на стороне BC и $BK = 7$ см, $KC = 14$ см, то

$$BC = BK + KC = 7 \text{ см} + 14 \text{ см} = 21 \text{ см}.$$

Итак, $P_{ABCD} = 2(7 + 21)$ см $= 56$ см.

б) Пусть в параллелограмме $ABCD$ биссектриса угла A пересекает сторону BC в точке K так, что $BK = 14$ см, $KC = 7$ см. Треугольник ABK — равнобедренный (см. п. а), поэтому

$$AB = BK = 14 \text{ см}, \ BC = 21 \text{ см}.$$

Итак, $P_{ABCD} = 2(14 + 21)$ см $= 70$ см.

Ответ. 56 см или 70 см.

376. Найдите углы параллелограмма $ABCD$, если: а) $\angle A = 84°$; б) $\angle A - \angle B = 55°$; в) $\angle A + \angle C = 142°$; г) $\angle A = 2\angle B$; д) $\angle CAD = 16°$, $\angle ACD = 37°$.

Решение. а) Рассмотрим параллелограмм $ABCD$, в котором $\angle A = 84°$. Так как $\angle A$ и $\angle C$ — противоположные углы параллелограмма $ABCD$, то $\angle C = \angle A = 84°$.

Углы A и B — односторонние углы при пересечении параллельных прямых AD и BC секущей AB, поэтому $\angle A + \angle B = 180°$, откуда $\angle B = 180° - 84° = 96°$. Углы B и D — противоположные углы параллелограмма $ABCD$, поэтому они равны, т. е. $\angle B = \angle D = 96°$.

б) $\angle A + \angle B = 180°$ (см. п. а), а по условию $\angle A - \angle B = 55°$, следовательно, $2\angle A = 235°$, $\angle A = 117°30'$, $\angle B = 62°30'$.

Противоположные углы параллелограмма равны, поэтому $\angle A = \angle C = 117°30'$, $\angle B = \angle D = 62°30'$.

в) Так как $\angle A$ и $\angle C$ — противоположные углы параллелограмма $ABCD$, то они равны, а так как по условию $\angle A + \angle C = 142°$, то $\angle A = \angle C = 142° : 2 = 71°$.

$\angle A + \angle B = 180°$ (см. п. а), следовательно, $\angle B = 180° - 71° = 109°$.

Углы B и D — противоположные углы параллелограмма, поэтому $\angle B = \angle D = 109°$.

г) $\angle A + \angle B = 180°$, а так как $\angle A = 2 \cdot \angle B$ по условию, то $2 \cdot \angle B + \angle B = 180°$, $3 \cdot \angle B = 180°$, $\angle B = 60°$, а $\angle A = 120°$.

Итак, $\angle A = \angle C = 120°$, $\angle B = \angle D = 60°$.

д) Рассмотрим треугольник ADC. По условию в этом треугольнике $\angle A = 16°$, $\angle C = 37°$, поэтому $\angle D = 180° - (16° + 37°) = 127°$.

Углы D и B — противоположные углы параллелограмма $ABCD$, поэтому $\angle B = \angle D = 127°$.

$\angle D + \angle C = 180°$ (см. п. а), следовательно, $\angle C = 180° - 127° = 53°$.

Углы A и C — противоположные углы параллелограмма $ABCD$, поэтому $\angle A = \angle C = 53^\circ$.

О т в е т. а) 84°, 96°, 84°, 96°; б) $117^\circ 30'$, $62^\circ 30'$, $117^\circ 30'$, $62^\circ 30'$; в) 71°, 109°, 71°, 109°; г) 120°, 60°, 120°, 60°; д) 53°, 127°, 53°, 127°.

377. В параллелограмме $MNPQ$ проведен перпендикуляр NH к прямой MQ, причем точка H лежит на стороне MQ. Найдите стороны и углы параллелограмма, если известно, что $MH = 3$ см, $HQ = 5$ см, $\angle MNH = 30^\circ$.

Р е ш е н и е. Точка H лежит на отрезке MQ (рис. 3), поэтому

$MH + HQ = MQ = 8$ см и $NP = MQ = 8$ см.

В прямоугольном треугольнике MHN $\angle MNH = 30^\circ$, следовательно, $\angle M = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$, а катет MH, лежащий против угла в 30°, равен половине гипотенузы.

Итак, $MN = PQ = 6$ см.

Так как противоположные углы параллелограмма равны, то $\angle P = \angle M = 60^\circ$, $\angle N = 180^\circ - \angle M = 120^\circ$, $\angle Q = \angle N = 120^\circ$.

О т в е т. 6 см, 8 см, 6 см, 8 см; 60°, 120°, 60°, 120°.

379. Из вершин B и D параллелограмма $ABCD$, у которого $AB \neq BC$ и $\angle A$ острый, проведены перпендикуляры BK и DM к прямой AC. Докажите, что четырехугольник $BMDK$ — параллелограмм.

Р е ш е н и е. Пусть в параллелограмме $ABCD$ углы BAK, DCM, BKM, DMK обозначены цифрами 1, 2, 3, 4 соответственно (рис. 4).

Рассмотрим прямоугольные треугольники AKB и CMD. Эти треугольники равны по гипотенузе и острому углу ($AB = DC$ по свойству противоположных сторон параллелограмма, $\angle 1 = \angle 2$, так как эти углы — накрест лежащие при пересечении параллельных прямых AB и CD секущей AC), поэтому $BK = DM$.

По условию $\angle 3 = \angle 4 = 90^\circ$, и эти углы — накрест лежащие при пересечении прямых BK и DM секущей KM, поэтому $BK \parallel DM$.

Итак, в четырехугольнике $BMDK$ стороны BK и DM равны и параллельны, поэтому четырехугольник $BMDK$ — параллелограмм (признак 1° параллелограмма, п. 43 учебника).

380. На сторонах AB, BC, CD и DA четырехугольника $ABCD$ отмечены соответственно точки M, N, P и Q так, что $AM = CP$, $BN = DQ$, $BM = DP$, $NC = QA$. Докажите, что $ABCD$ и $MNPQ$ — параллелограммы.

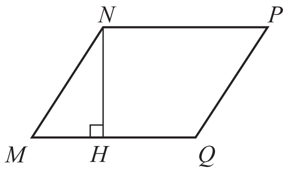


Рис. 3

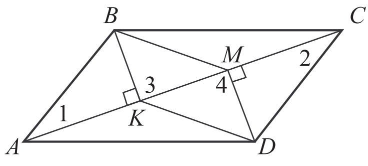


Рис. 4

Р е ш е н и е. 1) Рассмотрим четырехугольник $ABCD$ (рис. 5). Так как $AB = AM + MB$, $DC = DP + PC$ и по условию $AM = PC$, $MB = DP$, то $AB = DC$. Аналогично можно доказать $BC = AD$. Итак, в четырехугольнике $ABCD$ противоположные стороны попарно равны, поэтому четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм (признак 2°, п. 43 учебника).

2) Треугольники MAQ и PCN равны по двум сторонам и углу между ними ($AM = CP$, $AQ = CN$ — по условию, углы A и C равны как противоположные углы параллелограмма $ABCD$), следовательно, $MQ = PN$. Аналогично можно доказать, что треугольники MBN и PDQ равны и, следовательно, $MN = PQ$.

Итак, в четырехугольнике $MNPQ$ противоположные стороны попарно равны, поэтому $MNPQ$ — параллелограмм.

381. На рисунке 163 учебника изображены два одинаковых колеса тепловоза. Радиусы O_1A и O_2B равны. Стержень AB, длина которого равна расстоянию O_1O_2 между центрами колес, передает движение от одного колеса к другому. Докажите, что отрезки AB и O_1O_2 либо параллельны, либо лежат на одной прямой.

Р е ш е н и е. Рассмотрим положение стержня AB, показанное на рисунке 6. Четырехугольник O_1ABO_2 — параллелограмм, так как его противоположные стороны равны: $O_1A = O_2B$ и $O_1O_2 = AB$ (по условию), поэтому $AB \parallel O_1O_2$.

Так как $\angle AO_1O_2 = \angle BO_2B_1$, где угол BO_2B_1 — смежный с углом BO_2O_1, то при повороте колеса на угол AO_1O_2 точка A совместится с некоторой точкой A_1 прямой O_1O_2, а точка B — с некоторой точкой B_1 этой прямой и, следовательно, отрезки AB и O_1O_2 будут лежать на одной прямой. Итак, отрезки AB и O_1O_2 либо параллельны, либо лежат на одной прямой.

382. Диагонали параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке O. Докажите, что четырехугольник $A_1B_1C_1D_1$, вершинами которого являются середины отрезков OA, OB, OC и OD, — параллелограмм.

Р е ш е н и е. Так как диагонали AC и BD параллелограмма $ABCD$ точкой пересечения делятся пополам, то $BO = OD$, а так как точки B_1 и D_1 — середины отрезков BO и OD, то $B_1O = OD_1$. Аналогично можно доказать, что $A_1O = OC_1$. Таким образом, в четырехугольнике

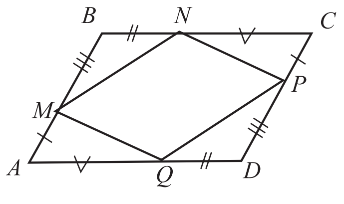


Рис. 5

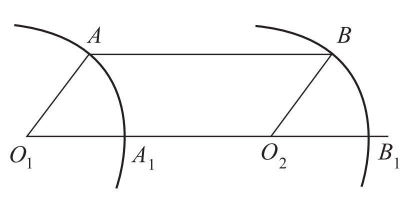


Рис. 6

$A_1B_1C_1D_1$ диагонали A_1C_1 и B_1D_1 пересекаются в точке O и точкой пересечения делятся пополам. Следовательно, этот четырехугольник — параллелограмм (признак 3° параллелограмма, п. 43 учебника).

383. На диагонали BD параллелограмма $ABCD$ отмечены две точки P и Q так, что $PB = QD$. Докажите, что четырехугольник $APCQ$ — параллелограмм.

Решение. Возможны два случая.

1) Точка P лежит между точками B и Q (рис. 7, *а*). Так как $AB \parallel CD$, то $\angle ABD = \angle CDB$ и $\triangle ABP = \triangle CDQ$ по двум сторонам и углу между ними ($AB = CD$, $PB = QD$, $\angle ABP = \angle CDQ$). Отсюда следует, что $AP = CQ$. Аналогично доказывается, что $\triangle ADQ = \triangle CBP$ и поэтому $AQ = CP$.

Итак, в четырехугольнике $APCQ$ противоположные стороны попарно равны ($AP = CQ$, $AQ = CP$), поэтому $APCQ$ — параллелограмм (признак 2°, п. 43 учебника).

2) Точка Q лежит между точками B и P (рис. 7, *б*).

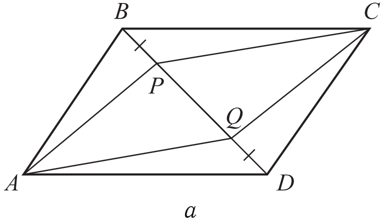
В этом случае из равенства $BP = DQ$ получаем: $PD = QB$, после чего доказательство утверждения, что четырехугольник $APCQ$ — параллелограмм, проводится так же, как в первом случае.

386. Докажите, что отрезок, соединяющий середины боковых сторон трапеции, параллелен основаниям трапеции.

Решение. Пусть точки M и N — середины боковых сторон AB и CD трапеции $ABCD$. Проведем через точку M прямую, параллельную основаниям AD и BC трапеции $ABCD$. Эта прямая по теореме Фалеса (задача 385 учебника) пересечет отрезок CD в его середине, т. е. пройдет через точку N. Таким образом, отрезок MN, соединяющий середины боковых сторон трапеции, параллелен основаниям трапеции.

387. Найдите углы B и D трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC, если $\angle A = 36°$, $\angle C = 117°$.

Решение. В трапеции $ABCD$ основания AD и BC параллельны, углы A и B, углы C и D — односторонние углы при пересечении



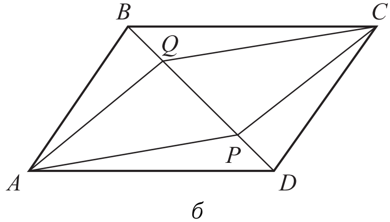


Рис. 7

параллельных прямых AD и BC секущими AB и CD соответственно, поэтому

$$\angle B = 180^\circ - \angle A = 180^\circ - 36^\circ = 144^\circ,$$
$$\angle D = 180^\circ - \angle C = 180^\circ - 117^\circ = 63^\circ.$$

Ответ. $\angle B = 144^\circ$, $\angle D = 63^\circ$.

388. Докажите, что в равнобедренной трапеции: а) углы при каждом основании равны; б) диагонали равны.

Решение. Рассмотрим равнобедренную трапецию $ABCD$ с основаниями AD и BC. Пусть $AD > BC$.

а) Проведем прямую BE, параллельную прямой CD, E — точка на отрезке AD (рис. 8, *а*). Так как $BCDE$ — параллелограмм, то $CD = BE$. Но $CD = AB$ ($ABCD$ — равнобедренная трапеция), поэтому $AB = BE$, т. е. треугольник ABE равнобедренный и, значит, $\angle A = \angle BEA$.

Так как $BE \parallel CD$, то $\angle BEA = \angle D$, следовательно, $\angle A = \angle D$, т. е. углы при основании AD равны.

Далее, $\angle B = 180^\circ - \angle A$, $\angle C = 180^\circ - \angle D$, поэтому $\angle B = \angle C$. Итак, углы при каждом основании равнобедренной трапеции равны.

б) Треугольники ABD и DCA равны по двум сторонам и углу между ними ($AB = CD$, AD — общая сторона, $\angle A = \angle D$ по доказанному в п. а) (рис. 8, *б*), следовательно, $BD = AC$.

389. Докажите, что трапеция равнобедренная, если: а) углы при основании равны; б) диагонали трапеции равны.

Решение. а) Пусть в трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC $BC < AD$, $\angle A = \angle D$ (рис. 9, *а*).

Проведем прямую CE, параллельную прямой AB (точка E лежит на прямой AD). Тогда $\angle 1$ и $\angle 3$ — соответственные углы при пересечении параллельных прямых AB и CE секущей AD, поэтому $\angle 3 = \angle 1$.

По условию $\angle 1 = \angle 2$, следовательно, $\angle 2 = \angle 3$ и поэтому треугольник ECD — равнобедренный: $CD = CE$.

Так как четырехугольник $ABCE$ — параллелограмм, то $CE = AB$, а так как $CE = CD$, то $AB = CD$, т. е. трапеция $ABCD$ — равнобедренная.

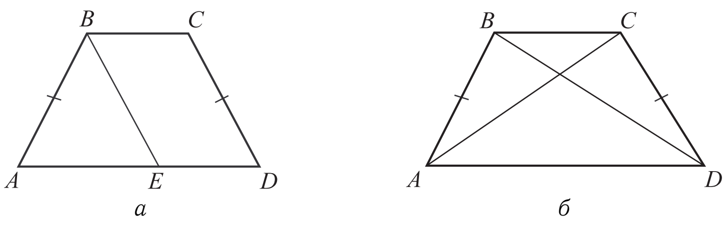


Рис. 8

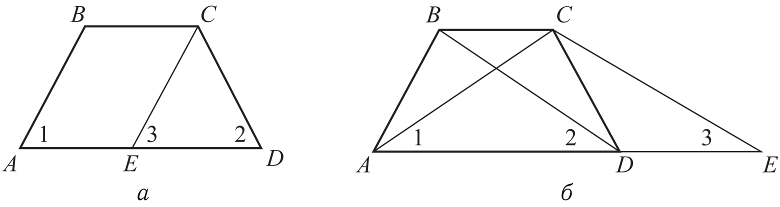


Рис. 9

б) Пусть в трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC диагонали AC и BD равны (рис. 9, *б*).

Через вершину C проведем прямую CE, параллельную диагонали BD (точка E лежит на прямой AD). Образовавшийся четырехугольник $BCED$ — параллелограмм ($BC \parallel DE$ и $BD \parallel CE$), поэтому $CE = BD = AC$ и, следовательно, треугольник ACE — равнобедренный с основанием AE, а значит, $\angle 1 = \angle 3$.

Так как $\angle 2 = \angle 3$ (соответственные углы при пересечении параллельных прямых BD и CE секущей AE) и $\angle 1 = \angle 3$, то $\angle 1 = \angle 2$.

$\triangle ACD = \triangle DBA$ по двум сторонам и углу между ними ($AC = DB$ по условию, AD — общая сторона, $\angle 1 = \angle 2$), следовательно, $AB = CD$, т. е. трапеция $ABCD$ — равнобедренная.

390. Один из углов равнобедренной трапеции равен 68°. Найдите остальные углы трапеции.

Решение. Пусть в равнобедренной трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC $\angle A = 68^\circ$. Так как углы при каждом основании равнобедренной трапеции равны (задача 388, а), то $\angle D = \angle A = 68^\circ$.

Углы A и B — односторонние углы при пересечении параллельных прямых AD и BC секущей AB, поэтому

$$\angle B = 180^\circ - 68^\circ = 112^\circ, \ \angle C = \angle B = 112^\circ.$$

Ответ. 68°, 112°, 112°.

391. Докажите, что из одинаковых плиток, имеющих форму равнобедренной трапеции, можно сделать паркет, полностью покрывающий любую часть плоскости.

Решение. Рассмотрим две плитки — две равные равнобедренные трапеции $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ ($AB = CD = A_1B_1 = C_1D_1$, $AD = A_1D_1$, $BC = B_1C_1$, $\angle A = \angle D = \angle A_1 = \angle D_1$, $\angle B = \angle C = \angle B_1 = \angle C_1$ (рис. 10, *а*)).

Приложим эти трапеции друг к другу так, чтобы совместились их равные боковые стороны CD и C_1D_1, причем точка C совместилась с D_1, а точка D — с C_1 (рис. 10, *б*). Тогда основания BC и A_1D_1 будут лежать на одной прямой, так как сумма углов C и D_1 равна 180°. Действительно, $\angle C + \angle D = 180^\circ$, а $\angle D = \angle D_1$, поэтому

$$\angle C + \angle D_1 = 180^\circ.$$

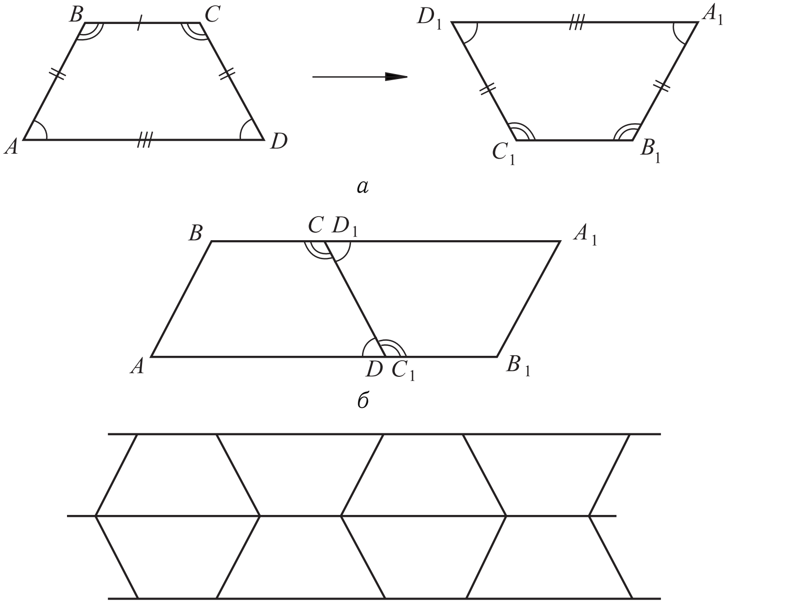


Рис. 10

Аналогично, основания AD и B_1C_1 также будут лежать на одной прямой, причем $BA_1 \parallel AB_1$ (см. рис. 10, *б*).

Приставляя последовательно указанным способом равные трапеции, можно покрыть любую часть полосы между параллельными прямыми AB_1 и BA_1. В свою очередь, с помощью таких параллельных полос можно покрыть любую часть плоскости (рис. 10, *в*).

392. Основания прямоугольной трапеции равны a и b, один из углов равен α. Найдите: а) бóльшую боковую сторону трапеции, если $a = 4$ см, $b = 7$ см, $\alpha = 60°$; б) меньшую боковую сторону трапеции, если $a = 10$ см, $b = 15$ см, $\alpha = 45°$.

Решение. Пусть в прямоугольной трапеции $ABCD$ с основаниями $AD = b$ и $BC = a$ ($AD > BC$): $\angle A = \angle B = 90°$, $\angle D = \alpha$ (рис. 11).

а) Проведем прямую CE, параллельную AB (E — точка на стороне AD), тогда четырехугольник $ABCE$ — параллелограмм, поэтому $AE = BC = a = 4$ см, $AB = CE$ и так как $\angle A = 90°$, то $\angle CEA = 90°$.

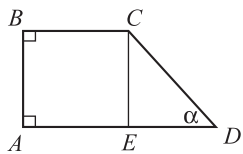


Рис. 11

В прямоугольном треугольнике CED $ED = AD - AE = b - a = 7$ см $- 4$ см $=$ $= 3$ см. $\angle C = 90° - \angle D = 90° - 60° = 30°$, поэтому $CD = 2 \cdot ED = 6$ см.

Так как CD — гипотенуза, а CE — катет прямоугольного треугольника CED, то

$CD > CE = AB$, поэтому CD — бо́льшая боковая сторона трапеции $ABCD$. Итак, бо́льшая боковая сторона трапеции равна 6 см.

б) В прямоугольном треугольнике CED

$ED = AD - AE = b - a = 15$ см $- 10$ см $= 5$ см, $\angle D = \alpha = 45°$, поэтому

$$\angle C = 90° - \angle D = 45°$$

и, значит, треугольник CED — равнобедренный: $CE = ED = 5$ см. Следовательно, $AB = CE = 5$ см, т. е. меньшая боковая сторона трапеции равна 5 см.

Ответ: а) 6 см; б) 5 см.

393. Постройте параллелограмм: а) по двум смежным сторонам и углу между ними; б) по двум диагоналям и углу между ними.

Решение. а) Пусть даны отрезки P_1Q_1 и P_2Q_2 и угол hk. Требуется построить параллелограмм $ABCD$, у которого смежные стороны, скажем, AB и AD, равны соответственно отрезкам P_1Q_1 и P_2Q_2, а угол BAD равен данному углу hk.

Сначала построим треугольник ABD по двум заданным сторонам и углу между ними (п. 38, задача 1), а затем достроим его до параллелограмма.

Описанный ход построения показывает, что при любых данных отрезках P_1Q_1 и P_2Q_2 и неразвернутом угле hk задача имеет единственное решение.

б) Пусть даны отрезки P_1Q_1 и P_2Q_2 и угол hk. Требуется построить параллелограмм $ABCD$, у которого диагонали AC и BD равны соответственно данным отрезкам P_1Q_1 и P_2Q_2, угол между ними равен углу hk.

Сначала построим угол AOB, равный данному углу hk, а затем на сторонах этого угла и их продолжениях отложим отрезки $OA = OC = \frac{1}{2}P_1Q_1$, $OB = OD = \frac{1}{2}P_2Q_2$. Четырехугольник $ABCD$ и есть искомый параллелограмм.

Описанный ход построения показывает, что при любых данных отрезках P_1Q_1 и P_2Q_2 и неразвернутом угле hk задача имеет единственное решение.

394. Даны три точки A, B и C, не лежащие на одной прямой. Постройте параллелограмм так, чтобы три его вершины совпали с данными точками. Сколько таких параллелограммов можно построить?

Решение. Пусть A, B, C — данные точки, не лежащие на одной прямой. Соединим попарно эти точки отрезками и через каждую вершину треугольника ABC проведем прямую, параллельную противолежащей стороне (рис. 12) (задача 222). Четырехугольники A_1BAC, C_1ACB, B_1ABC — параллелограммы, так как их противоположные стороны попарно параллельны. Каждый из них удовлетворяет условию задачи. Задача, очевидно, имеет только эти три решения, так как не существует других прямых, проходящих через точки A, B, C и параллельных прямым BC, AC, AB соответственно.

Ответ. Три.

395. Даны острый угол hk и два отрезка P_1Q_1 и P_2Q_2. Постройте параллелограмм $ABCD$ так, чтобы расстояние между параллельными прямыми AB и DC равнялось P_1Q_1, $AB = P_2Q_2$ и $\angle A = \angle hk$.

Решение. Построим прямоугольный треугольник ADE по катету $DE = P_1Q_1$ и противолежащему острому углу A, равному данному углу hk (задача 314, б). На луче AE отложим отрезок AB, равный данному отрезку P_2Q_2 (рис. 13). Через точки B и D проведем прямые, параллельные прямым AD и AB соответственно. Они пересекаются в некоторой точке C. Четырехугольник $ABCD$ — по построению параллелограмм, в котором $AB = P_2Q_2$, $\angle A = \angle hk$, и так как $DE \perp AB$, то DE — расстояние между параллельными прямыми AB и CD, причем $DE = P_1Q_1$.

Итак, построенный параллелограмм $ABCD$ удовлетворяет всем условиям задачи. Ясно, что если $\angle A < 180°$, то задача имеет единственное решение.

397. Постройте равнобедренную трапецию $ABCD$: а) по основанию AD, углу A и боковой стороне AB; б) по основанию BC, боковой стороне AB и диагонали BD.

Решение. а) Пусть даны $\angle hk$ и отрезки MN и M_1N_1 (рис. 14, *а*). Требуется построить трапецию $ABCD$ такую, что

$$AD \parallel BC,\ AB = CD,\ AD = MN,\ AB = M_1N_1,\ \angle A = \angle hk.$$

Построение. а) Построим $\triangle ABD$ так, чтобы $AD = MN$, $AB = M_1N_1$, $\angle A = \angle hk$ (см. п. 38, задача 1) (рис. 14, *б*).

Через точку B проведем прямую a, параллельную прямой AD. Затем от луча DA отложим угол ADE, равный углу A (см. рис. 14, *б*). Точку пересечения луча DE с прямой a обозначим буквой C. Четырехугольник $ABCD$ и есть искомая трапеция. Действительно, по построению $BC \parallel AD$, а стороны AB и CD не параллельны (если допустить,

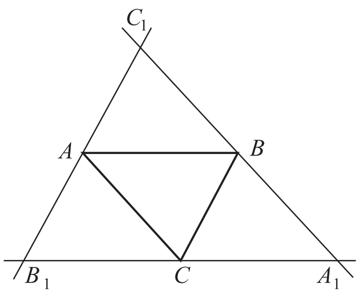


Рис. 12

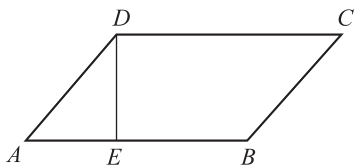


Рис. 13

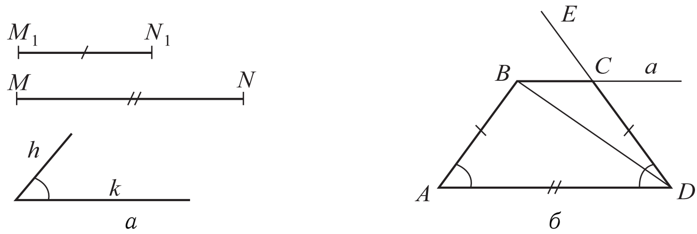


Рис. 14

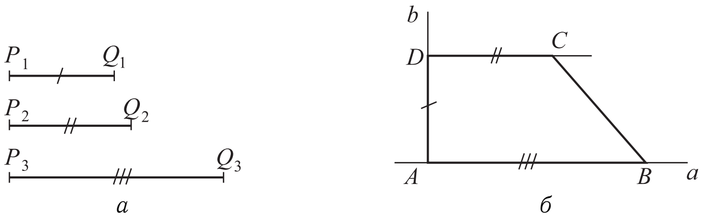


Рис. 15

что $AB \parallel CD$, то $\angle A + \angle D = 180^\circ$, а так как $\angle A = \angle D$ и $\angle A + \angle D = 180^\circ$, то $\angle A = \angle D = 90^\circ$, но угол равнобедренной трапеции не может быть прямым).

По построению $AD = MN$, $AB = M_1N_1$, $\angle A = \angle hk$, а так как $\angle D = \angle A$ (по построению), то трапеция $ABCD$ — равнобедренная (задача 389, а). Таким образом, трапеция $ABCD$ удовлетворяет всем условиям задачи.

Если угол hk — тупой, то задача имеет единственное решение. Если же угол hk — острый, то задача имеет единственное решение, если луч DE лежит во внешней области угла ADB, и не имеет решения, если луч DE лежит внутри угла ABD или совпадает с лучом DB.

б) Пусть даны отрезки MN, M_1N_1 и M_2N_2. Требуется построить трапецию $ABCD$ такую, что

$$AD \parallel BC,\ AB = CD,\ BC = MN,\ AB = M_1N_1,\ BD = M_2N_2.$$

Построение. Сначала построим треугольник BCD по трем сторонам так, чтобы $BC = MN$, $DC = M_1N_1$, $BD = M_2N_2$, а затем достроим его до равнобедренной трапеции $ABCD$ (см. п. а).

Задача не будет иметь решения, если какой-нибудь из данных отрезков больше или равен сумме двух других отрезков.

398. Постройте прямоугольную трапецию $ABCD$ по основаниям и боковой стороне AD, перпендикулярной к основаниям.

Решение. Пусть даны отрезки P_1Q_1, P_2Q_2, P_3Q_3 (рис. 15, a). Требуется построить прямоугольную трапецию $ABCD$ так, чтобы ее боковая сторона AD, перпендикулярная к основаниям, была равна P_1Q_1, а основания DC и AB были равны соответственно P_2Q_2 и P_3Q_3.

Проведем две взаимно перпендикулярные прямые a и b, пересекающиеся в точке A, и от точки A на прямой a отложим отрезок AB, равный данному отрезку P_3Q_3, а на прямой b — отрезок AD, равный данному отрезку P_1Q_1 (рис. 15, *б*).

Через точку D проведем прямую, параллельную прямой AB (задача 222), и от точки D отложим на ней отрезок DC, равный данному отрезку P_2Q_2 так, чтобы точка C лежала по ту же сторону от прямой AD, что и точка B. Соединив точки B и C отрезком, получим трапецию $ABCD$. Построенная трапеция удовлетворяет всем условиям задачи. Задача имеет единственное решение.

§ 3. Прямоугольник, ромб, квадрат

399. Докажите, что параллелограмм, один из углов которого прямой, является прямоугольником.

Решение. Пусть в параллелограмме $ABCD$ $\angle A = 90°$. Тогда и $\angle C = 90°$, так как противоположные углы параллелограмма равны.

$\angle B = 180° - \angle A = 90°$, $\angle D = \angle B = 90°$.

Итак, все углы параллелограмма $ABCD$ прямые, поэтому этот параллелограмм — прямоугольник (по определению).

400. Докажите, что если в четырехугольнике все углы прямые, то четырехугольник является прямоугольником.

Решение. Пусть в четырехугольнике $ABCD$ все углы прямые. Так как $\angle A = \angle B = 90°$, то $AD \parallel BC$, а так как $\angle A = \angle D = 90°$, то $AB \parallel DC$. Таким образом, противоположные стороны четырехугольника $ABCD$ попарно параллельны, поэтому четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм, а так как все его углы прямые, то $ABCD$ — прямоугольник.

401. Найдите периметр прямоугольника $ABCD$, если биссектриса угла A делит: а) сторону BC на отрезки 45,6 см и 7,85 см; б) сторону DC на отрезки 2,7 дм и 4,5 дм.

Решение. а) Возможны два случая.

1) Пусть биссектриса угла A пересекает сторону BC в точке E так, что $BE = 45{,}6$ см, $EC = 7{,}85$ см (рис. 16).

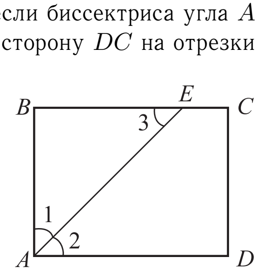


Рис. 16

Так как $AD \parallel BC$, то $\angle 2 = \angle 3$, а $\angle 2 = \angle 1$ — по условию, поэтому $\angle 1 = \angle 3$. Следовательно, $\triangle ABE$ — равнобедренный и поэтому $AB = BE = 45{,}6$ см, $BC = BE + EC = 45{,}6$ см $+ 7{,}85$ см $= 53{,}45$ см.

$P_{ABCD} = 2(AB + AD) = 2(45{,}6 + 53{,}45)$ см $= 2 \cdot 99{,}05$ см $= 198{,}1$ см.

2) Пусть $BE = 7{,}85$ см, $EC = 45{,}6$ см, тогда $AB = BE = 7{,}85$ см и $P_{ABCD} = 2(7{,}85\text{ см} + 53{,}45\text{ см}) = 2 \cdot 61{,}3\text{ см} = 122{,}6$ см.

б) Возможны два случая.

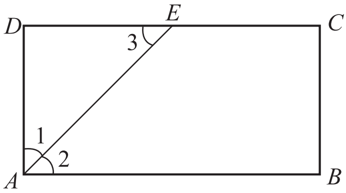


Рис. 17

1) $DE = 4{,}5$ дм, $CE = 2{,}7$ дм (рис. 17). Так как $\triangle ADE$ равнобедренный (см. п. а), то $AD = DE = 4{,}5$ дм; $DC = 4{,}5\text{ дм} + 2{,}7\text{ дм} = 7{,}2$ дм.

$P_{ABCD} = 2(4{,}5\text{ дм} + 7{,}2\text{ дм}) = 2 \times \times 11{,}7\text{ дм} = 23{,}4$ дм.

2) $DE = 2{,}7$ дм, $CE = 4{,}5$ дм. В этом случае $AD = DE = 2{,}7$ дм, $DC = 7{,}2$ дм.

$P_{ABCD} = 2(2{,}7 + 7{,}2)\text{ дм} = 2 \cdot 9{,}9\text{ дм} = 19{,}8$ дм.

Ответ. а) 198,1 см или 122,6 см; б) 23,4 дм или 19,8 дм.

402. Диагонали прямоугольника $ABCD$ пересекаются в точке O. Докажите, что треугольники AOD и AOB равнобедренные.

Решение. Так как $ABCD$ — прямоугольник, то его диагонали равны, а так как прямоугольник является параллелограммом, то его диагонали точкой пересечения делятся пополам, поэтому $AO = OD$ и $AO = OB$, т. е. треугольники AOD и AOB — равнобедренные.

403. В прямоугольнике $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O. Найдите периметр треугольника AOB, если $\angle CAD = 30°$, $AC = 12$ см.

Решение. Так как $ABCD$ — прямоугольник, то его диагонали равны и точкой пересечения делятся пополам, поэтому $\triangle AOB$ — равнобедренный, боковая сторона которого равна 6 см.

$\triangle ADC$ — прямоугольный с гипотенузой AC, равной 12 см, и острым углом A, равным $30°$, поэтому катет $CD = \dfrac{1}{2}AC = 6$ см. $AB = CD = 6$ см. Таким образом, $\triangle AOB$ — равносторонний и $P_{AOB} = 3 \cdot 6\text{ см} = 18$ см.

Ответ. 18 см.

404. Докажите, что медиана прямоугольного треугольника, проведенная к гипотенузе, равна половине гипотенузы.

Решение. Пусть BM — медиана прямоугольного треугольника ABC, проведенная к гипотенузе AC. Докажем, что $BM = \dfrac{1}{2}AC$.

Рассмотрим четырехугольник $ABCD$ (рис. 18), в котором D — точка, симметричная точке B относительно точки M.

В четырехугольнике $ABCD$ $BM = MD$ (так как точки B и D симметричны относительно точки M), $AM = MC$ по условию, поэтому четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм (признак 3°, п. 43).

Так как в параллелограмме $ABCD$ угол B — прямой по условию, то параллелограмм $ABCD$ — прямоугольник (задача 399), а в прямоугольнике диагонали равны.

Итак, $BM = \frac{1}{2}BD = \frac{1}{2}AC$, что и требовалось доказать.

405. В ромбе одна из диагоналей равна стороне. Найдите: а) углы ромба; б) углы, которые диагонали ромба образуют с его сторонами.

Решение. Пусть в ромбе $ABCD$ диагональ BD равна его стороне (рис. 19).

а) Треугольник ABD — равносторонний, поэтому все его углы равны между собой и каждый равен $60°$, в частности, $\angle A = 60°$.

$\angle C = \angle A = 60°$; $\angle B = \angle D = 180° - 60° = 120°$.

б) $\angle 1 = 60°$ (см. п. а), $\angle 2 = \angle 1 = 60°$; так как диагонали ромба делят его углы пополам, то $\angle 3 = \angle 4 = \frac{1}{2}\angle A = \frac{1}{2} \cdot 60° = 30°$.

Итак, диагонали ромба составляют с его сторонами углы, равные $60°$ и $30°$.

Ответ. а) $60°$ и $120°$; б) $60°$ и $30°$.

406. Найдите периметр ромба $ABCD$, если $\angle B = 60°$, $AC = 10{,}5$ см.

Решение. В треугольнике ABC $AB = BC$ (так как стороны ромба равны) и угол B равен $60°$. Следовательно, этот треугольник — равносторонний, а так как $AC = 10{,}5$ см по условию, то и $AB = 10{,}5$ см.

$P_{ABCD} = 4 \cdot 10{,}5$ см $= 42$ см.

Ответ. 42 см.

407. Найдите углы, которые образуют диагонали ромба с его сторонами, если один из углов ромба равен $45°$.

Решение. Пусть угол A ромба $ABCD$ равен $45°$ (см. рис. 19). Тогда $\angle D = 180° - 45° = 135°$.

$\angle 1 = \angle 2$ и $\angle 3 = \angle 4$, так как диагонали ромба делят его углы пополам. Поэтому $\angle 1 = \angle 2 = 67°30'$, $\angle 3 = \angle 4 = 22°30'$.

Ответ. $22°30'$ и $67°30'$.

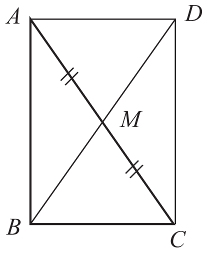


Рис. 18

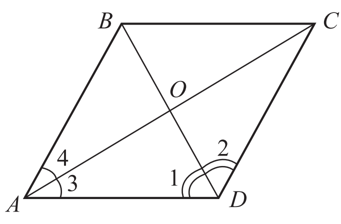


Рис. 19

408. Докажите, что параллелограмм является ромбом, если: а) его диагонали взаимно перпендикулярны; б) диагональ параллелограмма является биссектрисой его угла.

Решение. а) Пусть диагонали AC и BD параллелограмма $ABCD$ взаимно перпендикулярны, O — точка их пересечения (см. рис. 19). Так как $AO = OC$ и $BO = OD$, то прямоугольные треугольники AOB и BOC, COD и DOA равны друг другу по двум катетам. Отсюда следует, что равны их гипотенузы: $AB = BC = CD = DA$, т. е. параллелограмм $ABCD$ является ромбом.

б) Пусть диагональ AC параллелограмма $ABCD$ является биссектрисой его угла A (см. рис. 19). Тогда в треугольнике ABD медиана AO является биссектрисой и поэтому $\triangle ABD$ — равнобедренный (задача 342), т. е. $AB = AD$. Но $AB = CD$, $AD = BC$ и, следовательно, в параллелограмме $ABCD$ все стороны равны, т. е. параллелограмм $ABCD$ — ромб.

409. Докажите, что ромб, у которого один угол прямой, является квадратом.

Решение. Согласно задаче 399 ромб, у которого один угол прямой, является прямоугольником, а так как у этого прямоугольника все стороны равны, то это квадрат.

410. Является ли четырехугольник квадратом, если его диагонали: а) равны и взаимно перпендикулярны; б) взаимно перпендикулярны и имеют общую середину; в) равны, взаимно перпендикулярны и имеют общую середину?

Решение. а) Нет. Например, в четырехугольнике $ABCD$ на рисунке 20 диагонали AC и BD равны и взаимно перпендикулярны, но точка их пересечения не является серединой отрезка AC, и поэтому $AB \neq BC$. Значит, четырехугольник $ABCD$ не является квадратом.

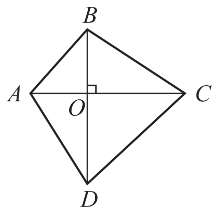


Рис. 20

б) Нет. Например, диагонали ромба взаимно перпендикулярны и имеют общую середину, но ромб может не быть квадратом.

в) Докажем, что в этом случае четырехугольник является квадратом.

Так как диагонали четырехугольника имеют общую середину, т. е. пересекаются и точкой пересечения делятся пополам, то этот четырехугольник — параллелограмм, а параллелограмм, в котором диагонали равны, — прямоугольник. С другой стороны, параллелограмм, диагонали которого взаимно перпендикулярны, — ромб (задача 408, а), т. е. все его стороны равны.

Итак, в данном случае четырехугольник является прямоугольником, у которого все стороны равны, т. е. это квадрат.

Ответ: а) Нет; б) нет; в) да.

411. В прямоугольном треугольнике проведена биссектриса прямого угла. Через точку пересечения этой биссектрисы с гипотенузой проведены прямые, параллельные катетам. Докажите, что полученный четырехугольник — квадрат.

Решение. Пусть в прямоугольном треугольнике ABC с гипотенузой AB проведены биссектриса CD и прямые DE и DF, параллельные катетам BC и AC соответственно (рис. 21).

Тогда четырехугольник $CEDF$ — параллелограмм ($DE \parallel FC$ и $CE \parallel FD$), а так как $\angle C = 90°$, то параллелограмм $CEDF$ — прямоугольник (задача 399).

По условию $\angle 1 = \angle 2$, т. е. диагональ CD делит угол C пополам. Отсюда следует, что $CEDF$ — ромб (задача 408, б).

Итак, четырехугольник $CEDF$ является прямоугольником и ромбом, поэтому этот четырехугольник — квадрат.

412. Даны равнобедренный прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C, катетом $AC = 12$ см и квадрат $CDEF$ такой, что две его стороны лежат на катетах, а вершина E — на гипотенузе треугольника. Найдите периметр квадрата.

Решение. Так как треугольник ABC равнобедренный и прямоугольный (рис. 22), то $\angle A = \angle B = \frac{1}{2} \cdot 90° = 45°$. В прямоугольном треугольнике ADE $\angle A = 45°$ и, следовательно, $AD = DE$. Но $DE = DC$ (так как $CDEF$ — квадрат), поэтому $AD = DC = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2} \cdot 12$ см $= 6$ см; $P_{CDEF} = 6$ см $\cdot 4 = 24$ см.

Ответ. 24 см.

413. Постройте прямоугольник: а) по двум смежным сторонам; б) по стороне и диагонали; в) по диагонали и углу между диагоналями.

Решение. а) Пусть даны отрезки P_1Q_1 и P_2Q_2 (рис. 23, *а*). Требуется построить прямоугольник $ABCD$ так, чтобы $AB = P_1Q_1$, $AD = P_2Q_2$.

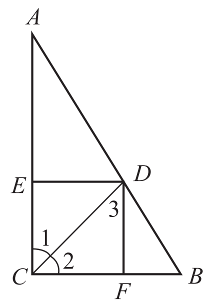


Рис. 21

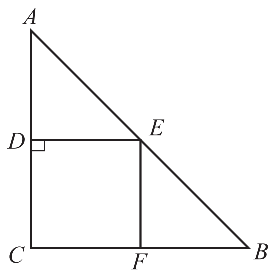


Рис. 22

Проведем прямую AE, а затем построим прямую AF, перпендикулярную к прямой AE (см. п. 23 учебника). На луче AE отложим отрезок AB, равный P_1Q_1, а на луче AF — отрезок AD, равный P_2Q_2 (рис. 23, *б*). Через точку B проведем прямую, параллельную AD, а через точку D — прямую, параллельную AB (задача 222). Проведенные прямые пересекаются в некоторой точке C. Четырехугольник $ABCD$ — искомый прямоугольник.

В самом деле, по построению четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм ($BC \parallel AD$ и $DC \parallel AB$), а так как $\angle A = 90°$, то $ABCD$ — прямоугольник (задача 399), причем $AB = P_1Q_1$, $AD = P_2Q_2$, т. е. построенный прямоугольник $ABCD$ удовлетворяет всем условиям задачи.

б) Пусть даны отрезки P_1Q_1 и P_2Q_2. Требуется построить прямоугольник $ABCD$ так, чтобы $AB = P_1Q_1$ и $BD = P_2Q_2$.

Сначала построим прямоугольный треугольник ABD с прямым углом A, в котором $AB = P_1Q_1$, $BD = P_2Q_2$ (задача 314, в).

Затем через вершины B и D проведем прямые, параллельные прямым AD и AB соответственно. Они пересекаются в некоторой точке C. Полученный четырехугольник $ABCD$ является искомым прямоугольником.

В самом деле, по построению $ABCD$ — параллелограмм, у которого угол A — прямой. Следовательно, $ABCD$ — прямоугольник, причем $AB = P_1Q_1$, $BD = P_2Q_2$, т. е. прямоугольник $ABCD$ удовлетворяет всем условиям задачи.

в) Задача решается так же, как задача 393, б, в случае, когда диагонали равны.

414. Постройте ромб: а) по двум диагоналям; б) по стороне и углу.

Решение. а) Задача решается так же, как задача 393, б, в случае, когда угол между диагоналями — прямой.

б) Задача решается так же, как задача 393, а, в случае, когда смежные стороны равны.

415. Постройте квадрат: а) по стороне; б) по диагонали.

Решение. а) Задача решается так же, как задача 413, а, в случае, когда смежные стороны равны.

б) Задача решается так же, как задача 414, а, в случае, когда диагонали равны.

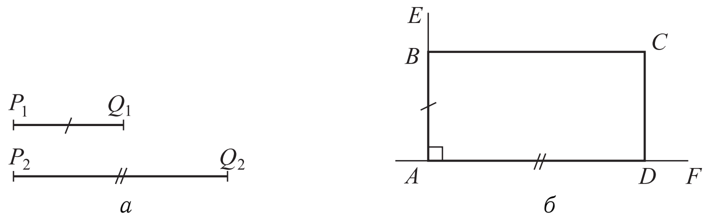


Рис. 23