Атанасян Л.С.
Бутузов В.Ф.
Кадомцев С.Б.
Юдина И.И.

Геометрия. 7 класс

МОСКВА
ФИЗМАТЛИТ ®

УДК 373.167.1:514
ББК 22.151я.721
Г 36

Атанасян Л. С., Бутузов В. Ф., Кадомцев С. Б., Юдина И. И. **Геометрия. 7 класс.** — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. — 120 с. — ISBN 5-9221-0572-8.

Настоящее издание является первой частью учебно-методического пособия, содержащего решения задач из учебника «Геометрия 7–9» Л. С. Атанасяна, В. Ф. Бутузова, С. Б. Кадомцева, Э. Г. Позняка, И. И. Юдиной (М.: Просвещение, 1990 и последующие издания). Данный выпуск содержит решения задач, относящихся к 7 классу.

ISBN 5-9221-0572-8

© ФИЗМАТЛИТ, 2005

© Л. С. Атанасян, В. Ф. Бутузов, С. Б. Кадомцев, И. И. Юдина, 2005

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие

Настоящее издание является первой частью учебно-методического пособия, содержащего решения задач из учебника «Геометрия 7–9» Л.С. Атанасяна, В.Ф. Бутузова, С.Б. Кадомцева, Э.Г. Позняка, И.И. Юдиной (М.: Просвещение, 1990 и последующие издания). Данный выпуск содержит решения задач, относящихся к 7 классу; в последующих двух выпусках будут представлены решения задач, относящихся к 8 и 9 классам.

Нумерация задач в пособии такая же, как в учебнике издания 2000 года и последующих изданиях. Вслед за формулировкой задачи дается ее решение. В каждой главе приведены решения всех задач к параграфам (за исключением большинства практических заданий), затем — решения дополнительных задач и после этого — решения задач повышенной трудности.

Приведенные решения не следует рассматривать как образец, которого нужно придерживаться при оформлении решений задач. Так, например, мы не разбиваем решение задачи на отдельные занумерованные пункты, хотя вполне допускаем, что учитель в своей практике может это делать, акцентируя тем самым внимание учащихся на последовательных шагах в решении задачи.

Большинство решений снабжено рисунками. Это относится в первую очередь к задачам первой и второй глав. В дальнейшем, в особенности при решении задач четвертой главы, рисунки даются не всегда. Для простых задач решения часто приведены без рисунка. Это также не следует рассматривать как обязательное правило. Читатель по своему усмотрению может снабдить рисунками решения и таких задач.

Остановимся особо на задачах первой главы, в которых отрабатываются основные понятия и свойства простейших геометрических фигур — точек, прямых, отрезков, лучей, углов. На наш взгляд, при решении этих задач следует опираться прежде всего на наглядные представления основных понятий. Отметим в связи с этим, что в первой главе учебника «Геометрия 7–9» не вводится понятие аксиомы и сами аксиомы не формулируются, а необходимые определения и исходные положения приведены в описательной форме на основе наглядных представлений. Этим и следует руководствоваться при решении задач первой главы.

Авторы

Глава 1

НАЧАЛЬНЫЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

§ 1. Прямая и отрезок

3. Проведите три прямые так, чтобы каждые две из них пересекались. Обозначьте все точки пересечения этих прямых. Сколько получилось точек? Рассмотрите все возможные случаи.

Решение. Проведем сначала две прямые a и b, обозначим буквой O точку их пересечения. Проведем теперь третью прямую c. Возможны два случая: а) прямая c не проходит через точку O. Тогда она пересекает прямые a и b в точках A и B. Таким образом, получилось три точки: O, A, B (рис. 1); б) прямая c проходит через точку O. Получилась всего одна точка O (рис. 2).

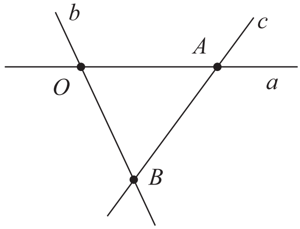

Рис. 1

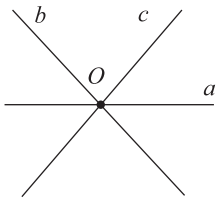

Рис. 2

Ответ. Возможны два случая: три точки и одна точка.

6. Проведите прямую и отметьте на ней три точки. Сколько отрезков получилось на прямой?

Решение. На рисунке 3 проведена прямая и на ней отмечены три точки A, B и C. Каждые две из этих точек определяют отрезок с концами в этих точках. Поэтому на прямой получилось три отрезка: AB, AC и BC.

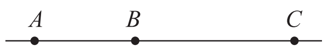

Рис. 3

Ответ. Три отрезка.

§ 2. Луч и угол

8. Проведите прямую, отметьте на ней точки A и B и на отрезке AB отметьте точку C. а) Среди лучей AB, BC, CA, AC и BA найдите пары совпадающих лучей; б) назовите луч, который является продолжением луча CA.

Решение. На рисунке 4 изображен отрезок AB и на этом отрезке — точка C. а) Лучи совпадают, если они лежат на одной прямой, имеют общее начало и ни один из них не является продолжением другого луча. Лучи AB и AC удовлетворяют этим условиям, поэтому они совпадают. Точно так же совпадают лучи BC и BA. б) Луч CB является продолжением луча CA, так как лучи CB и CA лежат на одной прямой, имеют общее начало и не совпадают.

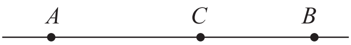

Рис. 4

Ответ. а) Лучи AB и AC, а также BC и BA; б) луч CB.

11. Начертите три луча h, k, и l с общим началом. Назовите все углы, образованные этими лучами.

Решение. На рисунке 5 изображены три луча h, k и l с общим началом O. Эти лучи образуют три угла: $\angle hk$, $\angle hl$ и $\angle kl$.

Ответ. $\angle hk$, $\angle hl$ и $\angle kl$.

14. Начертите неразвернутый угол AOB и проведите: а) луч OC, который делит угол AOB на два угла; б) луч OD, который не делит угол AOC на два угла.

Решение. На рисунке 6 изображен угол AOB. а) Проведем какой-нибудь луч OC, который исходит из вершины O угла AOB и проходит внутри этого угла. Луч OC делит угол AOB на два угла. б) Луч OD на рисунке 6 не делит угол AOC на два угла, так как он не проходит внутри этого угла.

15. Сколько неразвернутых углов образуется при пересечении двух прямых?

Решение. Пусть прямые AB и CD пересекаются в точке O (рис. 7). Образуются четыре неразвернутых угла: AOC, AOD, BOC и BOD.

Ответ. Четыре угла.

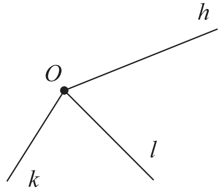

Рис. 5

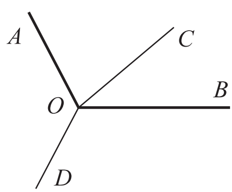

Рис. 6

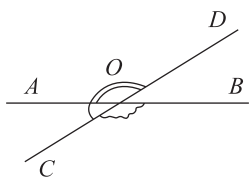

Рис. 7

17. Какие из лучей, изображенных на рисунке 8 (рис. 18 учебника), делят угол AOB на два угла?

Решение. Лучи h, k, l, m и n исходят из вершины O угла AOB, но только два из них — лучи h и l — проходят внутри этого угла, поэтому только лучи h и l делят угол AOB на два угла.

Ответ. Лучи h и l.

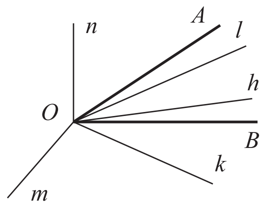

Рис. 8

§ 3. Сравнение отрезков и углов

18. На луче с началом O отмечены точки A, B и C так, что точка B лежит между точками O и A, а точка A — между точками O и C. Сравните отрезки OB и OA, OC и OA, OB и OC.

Решение. 1. Сравним отрезки OB и OA. По условию задачи точка B лежит между точками O и A (рис. 9). Значит, отрезок OB составляет часть отрезка OA, поэтому $OB < OA$.

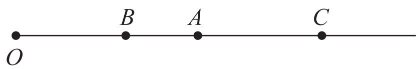

Рис. 9

2. Сравним отрезки OC и OA. Точка A лежит между точками O и C. Значит, отрезок OA составляет часть отрезка OC, поэтому $OA < OC$ и, следовательно, $OC > OA$.

3. Сравним отрезки OB и OC. По доказанному $OB < OA$, а $OA < OC$, следовательно, $OB < OC$.

Ответ. $OB < OA$, $OC > OA$, $OB < OC$.

19. Точка O является серединой отрезка AB. Можно ли совместить наложением отрезки: а) OA и OB; б) OA и AB?

Решение. а) По условию задачи точка O — середина отрезка AB. Отсюда следует, что отрезки OA и OB равны и поэтому их можно совместить наложением.

б) Отрезок OA наложен на отрезок AB так, что они имеют общий конец A, но два других конца этих отрезков — точки O и B — не совмещены. Отсюда следует, что отрезки OA и AB не равны и поэтому их нельзя совместить наложением.

Ответ. а) Да; б) нет.

21. Луч OC делит угол AOB на два угла. Сравните углы AOB и AOC.

Решение. Так как луч OC делит угол AOB на два угла, то угол AOC составляет часть угла AOB. Отсюда следует, что угол AOC меньше угла AOB.

Ответ. $\angle AOC < \angle AOB$.

22. Луч l — биссектриса угла hk. Можно ли наложением совместить углы: а) hl и lk; б) hl и hk?

Решение. а) По условию задачи луч l — биссектриса угла hk. Отсюда следует, что углы hl и lk равны и поэтому их можно совместить наложением.

б) Так как луч l — биссектриса угла hk, то он делит угол hk на два угла. Согласно задаче 21 $\angle hl < \angle hk$. Таким образом, углы hl и hk не равны и поэтому их нельзя совместить наложением.

Ответ. а) Да; б) нет.

§ 4. Измерение отрезков

26. Найдите длины всех отрезков, изображенных на рисунке 10 (рис. 31 учебника), если за единицу измерения принят отрезок: а) KL; б) AB.

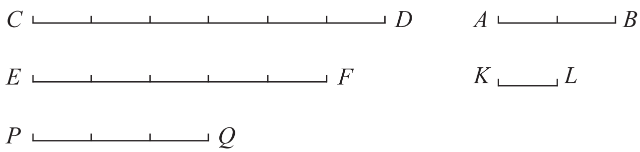

Рис. 10

Решение. а) Так как KL — единица измерения, то $KL = 1$.

В отрезке AB отрезок KL укладывается два раза, поэтому $AB = 2$. Аналогично, $PQ = 3$, $EF = 5$, $CD = 6$.

б) Так как AB — единица измерения, то $AB = 1$. Половина отрезка AB укладывается в отрезке KL один раз, поэтому $KL = \frac{1}{2}$. В отрезке PQ отрезок AB укладывается один раз, и в остатке половина отрезка AB укладывается также один раз, поэтому $PQ = 1 + \frac{1}{2} = 1\frac{1}{2}$. Аналогично, $EF = 2\frac{1}{2}$, $CD = 3$.

Ответ. а) $KL = 1$, $AB = 2$, $PQ = 3$, $EF = 5$, $CD = 6$; б) $KL = \frac{1}{2}$, $AB = 1$, $PQ = 1\frac{1}{2}$, $EF = 2\frac{1}{2}$, $CD = 3$.

29. Начертите прямую AB. С помощью масштабной линейки отметьте на этой прямой точку C, такую, что $AC = 2$ см. Сколько таких точек можно отметить на прямой AB?

Решение. На прямой AB из точки A исходят два луча — луч AB и луч AB_1, являющийся продолжением луча AB. На каждом из этих лучей можно отметить только одну точку — точку C на луче AB и точку C_1 на луче AB_1 — так, чтобы $AC = 2$ см и $AC_1 = 2$ см. Следовательно, на прямой AB можно отметить две такие точки.

Ответ. Две точки.

30. Точка B делит отрезок AC на два отрезка. Найдите длину отрезка AC, если $AB = 7{,}8$ см, $BC = 25$ мм.

Решение. Так как точка B делит отрезок AC на два отрезка AB и BC, то $AC = AB + BC$. По условию $AB = 7{,}8$ см, $BC = 25$ мм $= 2{,}5$ см, поэтому $AC = 7{,}8$ см $+ 2{,}5$ см $= 10{,}3$ см.

Ответ. 10,3 см.

31. Точка B делит отрезок AC на два отрезка. Найдите длину отрезка BC, если: а) $AB = 3{,}7$ см, $AC = 7{,}2$ см; б) $AB = 4$ мм, $AC = 4$ см.

Решение. Так как точка B делит отрезок AC на два отрезка: AB и BC, то $AC = AB + BC$. Отсюда следует, что $BC = AC - AB$.

а) По условию $AC = 7{,}2$ см, $AB = 3{,}7$ см, поэтому $BC = 7{,}2$ см $- 3{,}7$ см $= 3{,}5$ см.

б) По условию $AC = 4$ см $= 40$ мм, $AB = 4$ мм, поэтому $BC = 40$ мм $- 4$ мм $= 36$ мм.

Ответ. а) 3,5 см; б) 36 мм.

32. Точки A, B и C лежат на одной прямой. Известно, что $AB = 12$ см, $BC = 13{,}5$ см. Какой может быть длина отрезка AC?

Решение. Возможны два случая.

а) Точка C лежит на луче BA (рис. 11, *а*). В этом случае

$$AC = BC - BA = 13{,}5 \text{ см} - 12 \text{ см} = 1{,}5 \text{ см}.$$

б) Точка C лежит на продолжении луча AB (рис. 11, *б*). В этом случае $AC = AB + BC = 12$ см $+ 13{,}5$ см $= 25{,}5$ см.

Ответ. 1,5 см или 25,5 см.

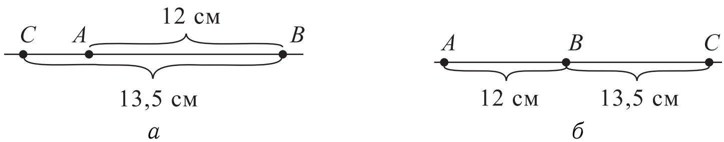

Рис. 11

33. Точки B, D и M лежат на одной прямой. Известно, что $BD = 7$ см, $MD = 16$ см. Каким может быть расстояние BM?

Решение. Возможны два случая.

а) Лучи DB и DM совпадают (рис. 12, *а*). В этом случае $BM = DM - DB = 16$ см $- 7$ см $= 9$ см.

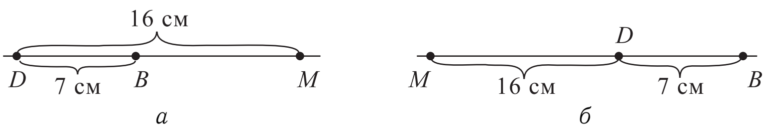

Рис. 12

б) Лучи DB и DM не совпадают, и, следовательно, точка M лежит на продолжении луча DB (рис. 12, *б*). В этом случае $BM = BD + DM = 7$ см $+ 16$ см $= 23$ см.

Ответ. 9 см или 23 см.

34. Точка C — середина отрезка AB, равного 64 см. На луче CA отмечена точка D так, что $CD = 15$ см. Найдите длины отрезков BD и DA.

Решение. Так как точка C — середина отрезка AB и $AB = 64$ см, то $CA = CB = 32$ см. По условию точка D лежит на луче CA, и так как $CD = 15$ см, $CA = 32$ см, то $CD < CA$, и поэтому точка D делит отрезок AC на два отрезка: CD и DA (рис. 13). Следовательно,

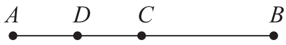

Рис. 13

$$DA = CA - CD = 32 \text{ см} - 15 \text{ см} = 17 \text{ см};$$
$$BD = CD + CB = 15 \text{ см} + 32 \text{ см} = 47 \text{ см}.$$

Ответ. $BD = 47$ см, $DA = 17$ см.

35. Расстояние между Москвой и С.-Петербургом равно 650 км. Город Тверь находится между Москвой и С.-Петербургом в 170 км от Москвы. Найдите расстояние между Тверью и С.-Петербургом, считая, что все три города расположены на одной прямой.

Решение. Пусть M — Москва, T — Тверь, P — С.-Петербург. По условию задачи точка T лежит между точками M и P, поэтому $MT + TP = MP$. Так как $MP = 650$ км, $MT = 170$ км, то $TP = MP - MT = 480$ км.

Ответ. 480 км.

37. Точка C — середина отрезка AB, точка O — середина отрезка AC. а) Найдите AC, CB, AO и OB, если $AB = 2$ см; б) найдите AB, AC, AO и OB, если $CB = 3{,}2$ м.

Решение. На рисунке 14 изображены данный отрезок AB и данные точки C и O.

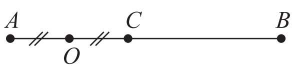

Рис. 14

а) Так как точка C — середина отрезка AB и $AB = 2$ см, то $AC = CB = 1$ см.

Точка O — середина отрезка AC, поэтому $AO = OC = \frac{1}{2}AC = 0{,}5$ см.

$$OB = OC + CB = 1{,}5 \text{ см}.$$

б) $CB = 3{,}2$ м, поэтому $AB = 2CB = 6{,}4$ м, $AC = CB = 3{,}2$ м, $OC = AO = \frac{1}{2}AC = 1{,}6$ м, $OB = OC + CB = 1{,}6$ м $+ 3{,}2$ м $= 4{,}8$ м.

Ответ. а) $AC = 1$ см, $CB = 1$ см, $AO = 0{,}5$ см, $OB = 1{,}5$ см; б) $AB = 6{,}4$ м, $AC = 3{,}2$ м, $AO = 1{,}6$ м, $OB = 4{,}8$ м.

38. На прямой отмечены точки O, A и B так, что $OA = 12$ см, $OB = 9$ см. Найдите расстояние между серединами отрезков OA и OB, если точка O: а) лежит на отрезке AB; б) не лежит на отрезке AB.

Решение. Пусть M и N — середины отрезков OA и OB.

а) Если точка O лежит на отрезке AB (рис. 15, *а*), то $MN = MO + ON$. Но $MO = \frac{1}{2}OA = 6$ см, $ON = \frac{1}{2}OB = 4{,}5$ см, следовательно, $MN = 10{,}5$ см.

б) Пусть точка O не лежит на отрезке AB (рис. 15, *б*). Так как

а *б*

Рис. 15

$OM = \frac{1}{2}OA = 6$ см, $ON = \frac{1}{2}OB = 4{,}5$ см, то $ON < OM$, и поэтому точка N лежит на отрезке OM. Следовательно, $MN = OM - ON = 6\text{ см} - 4{,}5\text{ см} = 1{,}5$ см.

Ответ. а) 10,5 см; б) 1,5 см.

39. Отрезок, длина которого равна a, разделен произвольной точкой на два отрезка. Найдите расстояние между серединами этих отрезков.

Решение. На рисунке 16 на отрезке AB длины a отмечена произвольная точка O, точки M и N — середины отрезков AO и OB. Поэтому

$$MO = \frac{1}{2}AO, \quad ON = \frac{1}{2}OB.$$

$$MN = MO + ON = \frac{1}{2}(AO + OB) = \frac{1}{2}AB = \frac{a}{2}.$$

Ответ. $\frac{a}{2}$.

40. Отрезок, равный 28 см, разделен на три неравных отрезка. Расстояние между серединами крайних отрезков равно 16 см. Найдите длину среднего отрезка.

Решение. Пусть отрезок AB равен 28 см, а точки C и D делят его на три неравных отрезка: AC, CD и DB (рис. 17). Пусть точка

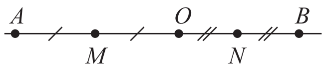

Рис. 16

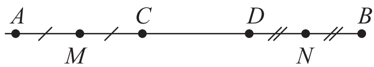

Рис. 17

M — середина отрезка AC, точка N — середина отрезка BD. Тогда $AB = AC + CD + DB$, поэтому

$$AC + CD + DB = 28 \text{ см}. \qquad (1)$$