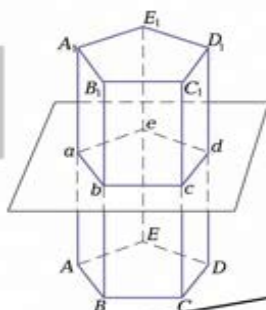


А.П. Киселёв

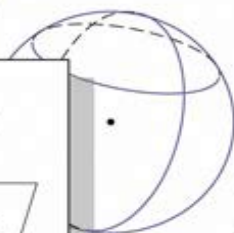
Геометрия

$$S = 4\pi R^2$$

$$V = SH$$



$$V = \frac{4}{3} \pi R^3$$



А.П. Киселёв

ГЕОМЕТРИЯ

ПЛАНИМЕТРИЯ
СТЕРЕОМЕТРИЯ

УЧЕБНИК

Под редакцией и с дополнениями
проф. Н.А. Глаголева



МОСКВА
ФИЗМАТЛИТ®
2013

УДК 501
ББК 22.151
К 44

Киселёв А.П. **Геометрия** / Под ред. Н.А. Глаголева. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2013. — 328 с. — ISBN 978-5-9221-0367-1.

А.П. Киселёв (1852–1940) — выдающийся педагог-математик. Его «Элементарная геометрия» впервые вышла в 1892 г.

В наше время книги Киселёва стали библиографической редкостью и неизвестны молодым учителям. А между тем дальнейшее совершенствование преподавания математики невозможно без личного знакомства каждого учителя с учебниками, которые некогда считались эталонными. Именно по этой причине и предпринимается переиздание «Геометрии» Киселёва.

О Г Л А В Л Е Н И Е

ГЕОМЕТРИЯ — ПО ЕВКЛИДУ И ПО КИСЕЛЁВУ	8
ПРЕДИСЛОВИЕ	12
ВВЕДЕНИЕ	13
Плоскость	13
Прямая линия	14
Понятие об окружности	16

Часть I

П Л А Н И М Е Т Р И Я

Глава I. ПРЯМАЯ ЛИНИЯ

1. УГЛЫ	19
Предварительные понятия	19
Измерение углов	22
Смежные и вертикальные углы	24
<i>Упражнения</i>	28
2. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ПРЕДЛОЖЕНИЯ	28
3. ТРЕУГОЛЬНИКИ	31
Понятие о многоугольнике и треугольнике	31
Симметрия геометрических фигур относительно оси	33
Некоторые свойства равнобедренного треугольника	35
Признаки равенства треугольников	36
Внешний угол треугольника и его свойство	39
Соотношения между сторонами и углами треугольника	40
Сравнительная длина прямолинейного отрезка и ломаной линии	41

Сравнительная длина перпендикуляра и наклонных	44
Признаки равенства прямоугольных треугольников	45
Свойство перпендикуляра, проведенного к отрезку прямой через его середину, и свойство биссектрисы угла	46
4. ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ НА ПОСТРОЕНИЕ	48
<i>Упражнения</i>	52
5. ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ ПРЯМЫЕ	55
Основные теоремы	55
Углы с соответственно параллельными или перпендикулярными сторонами	59
Сумма углов треугольника и многоугольника	61
Центральная симметрия	63
6. ПАРАЛЛЕЛОГРАММЫ И ТРАПЕЦИИ	65
Параллелограммы	65
Некоторые частные виды параллелограммов: прямоугольник, ромб, квадрат	68
Некоторые теоремы, основанные на свойствах параллелограмма ...	69
Трапеции	71
Задачи на построение	72
<i>Упражнения</i>	73

Глава II. ОКРУЖНОСТЬ

1. ФОРМА И ПОЛОЖЕНИЕ ОКРУЖНОСТИ	78
2. ЗАВИСИМОСТЬ МЕЖДУ ДУГАМИ, ХОРДАМИ И РАССТОЯНИЯМИ ХОРД ОТ ЦЕНТРА	81
3. ВЗАИМНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ПРЯМОЙ И ОКРУЖНОСТИ ..	82
4. ВЗАИМНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ДВУХ ОКРУЖНОСТЕЙ	85
5. ВПИСАННЫЕ И НЕКОТОРЫЕ ДРУГИЕ УГЛЫ. ПОСТРОЕНИЕ КАСАТЕЛЬНОЙ	88
Задачи на построение	94
<i>Упражнения</i>	96
6. ВПИСАННЫЕ И ОПИСАННЫЕ МНОГОУГОЛЬНИКИ	100
7. ЧЕТЫРЕ ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫЕ ТОЧКИ В ТРЕУГОЛЬНИКЕ	103
<i>Упражнения</i>	105

Глава III. ПОДОБНЫЕ ФИГУРЫ

1. ПОНЯТИЕ ОБ ИЗМЕРЕНИИ ВЕЛИЧИН	108
2. ПОДОБИЕ ТРЕУГОЛЬНИКОВ	117
Три признака подобия треугольников	120
Признаки подобия прямоугольных треугольников	123
3. ПОДОБИЕ МНОГОУГОЛЬНИКОВ	126
4. ПОДОБИЕ ФИГУР ПРОИЗВОЛЬНОГО ВИДА	132

Задачи на построение	136
5. НЕКОТОРЫЕ ТЕОРЕМЫ	
О ПРОПОРЦИОНАЛЬНЫХ ОТРЕЗКАХ	139
Свойство биссектрисы угла треугольника	141
6. МЕТРИЧЕСКИЕ СООТНОШЕНИЯ	
МЕЖДУ ЭЛЕМЕНТАМИ ТРЕУГОЛЬНИКА	
И НЕКОТОРЫХ ДРУГИХ ФИГУР	143
7. ПРОПОРЦИОНАЛЬНЫЕ ЛИНИИ В КРУГЕ	150
8. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ ОСТРОГО УГЛА	152
9. ПОНЯТИЕ О ПРИЛОЖЕНИИ АЛГЕБРЫ К ГЕОМЕТРИИ	158
Упражнения	162

Глава IV. ПРАВИЛЬНЫЕ МНОГОУГОЛЬНИКИ И ВЫЧИСЛЕНИЕ ДЛИНЫ ОКРУЖНОСТИ

1. ПРАВИЛЬНЫЕ МНОГОУГОЛЬНИКИ	167
Упражнения	176
2. ВЫЧИСЛЕНИЕ ДЛИНЫ ОКРУЖНОСТИ И ЕЕ ЧАСТЕЙ	177
Предел числовой последовательности	178
Длина окружности	182
Упражнения	190

Глава V. ИЗМЕРЕНИЕ ПЛОЩАДЕЙ

1. ПЛОЩАДИ МНОГОУГОЛЬНИКОВ	191
Теорема Пифагора и основанные на ней задачи	202
Отношение площадей подобных фигур	204
2. ПЛОЩАДЬ КРУГА И ЕГО ЧАСТЕЙ	207
Упражнения	211

Часть II. СТЕРЕОМЕТРИЯ

Предварительные замечания	215
---------------------------------	-----

Глава I. ПРЯМЫЕ И ПЛОСКОСТИ

1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОЛОЖЕНИЯ ПЛОСКОСТИ	215
2. ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ ПРЯМЫЕ И ПЛОСКОСТИ	217
Параллельные прямые	217
Прямая и плоскость, параллельные между собой	218
Параллельные плоскости	219

Задачи на построение	221
3 ПЕРПЕНДИКУЛЯР И НАКЛОННЫЕ К ПЛОСКОСТИ.....	222
4. ЗАВИСИМОСТЬ МЕЖДУ ПАРАЛЛЕЛЬНОСТЬЮ И ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТЬЮ ПРЯМЫХ И ПЛОСКОСТЕЙ ..	225
Задачи на построение	227
5. ДВУГРАННЫЕ УГЛЫ. УГОЛ ПРЯМОЙ С ПЛОСКОСТЬЮ, УГОЛ ДВУХ СКРЕЩИВАЮЩИХСЯ ПРЯМЫХ. МНОГОГРАННЫЕ УГЛЫ	229
Двугранные углы	229
Перпендикулярные плоскости	232
Угол двух скрещивающихся прямых	233
Угол, образуемый прямой с плоскостью	233
Многогранные углы	234
Простейшие случаи равенства трехгранных углов.....	237
Упражнения	238

Глава II. ОРТОГОНАЛЬНЫЕ ПРОЕКЦИИ ТОЧКИ, ОТРЕЗКА И ФИГУРЫ

ОРТОГОНАЛЬНЫЕ ПРОЕКЦИИ	240
------------------------------	-----

Глава III. МНОГОГРАННИКИ

1. ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕД И ПИРАМИДА	251
Свойства граней и диагоналей параллелепипеда	254
Свойства параллельных сечений в пирамиде	255
Боковая поверхность призмы и пирамиды	257
Упражнения	259
2. ОБЪЕМ ПРИЗМЫ И ПИРАМИДЫ	259
Объем параллелепипеда	260
Объем призмы	265
Объем пирамиды	267
3. ПОДОБИЕ МНОГОГРАННИКОВ.....	274
4. ПОНЯТИЕ О ПРАВИЛЬНЫХ МНОГОГРАННИКАХ	276
5. ПОНЯТИЕ О СИММЕТРИИ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ФИГУР ..	279
Упражнения	285

Глава IV. КРУГЛЫЕ ТЕЛА

1. ЦИЛИНДР И КОНУС	287
Поверхность цилиндра и конуса	289

Объем цилиндра и конуса	294
Подобные цилиндры и конусы	295
2. ШАР	296
Сечение шара плоскостью	296
Плоскость, касательная к шару	298
Поверхность шара и его частей	299
Объем шара и его частей	303
<i>Упражнения</i>	310

ДОПОЛНЕНИЕ

ОБ АКСИОМАХ ГЕОМЕТРИИ	312
Таблица тригонометрических функций	324

ГЕОМЕТРИЯ — ПО ЕВКЛИДУ И ПО КИСЕЛЕВУ

В декабре 2002 г. научная и педагогическая общественность России отметила 150-летие со дня рождения Андрея Петровича Киселева (1852–1940). В центре Орла был установлен бюст выдающегося педагога-математика (он родился в городе Мценске Орловской губернии); в Орловском университете открылся музей отечественного школьного учебника и прошла мемориальная научно-педагогическая конференция. Конференция, посвященная юбилею просветителя, состоялась и в Воронежском университете (в Воронеже А. П. Киселев долгие годы работал).

Среди деятелей отечественного образования А. П. Киселев занимает совершенно особое, можно сказать, уникальное место. Он явился автором исключительно удачных учебников сразу по трем компонентам школьной математики — по арифметике, алгебре и геометрии (ни до, ни после него никто не создавал такой палитры учебников!). Все эти его учебники прожили долгую жизнь с огромной пользой для многих поколений юношества. Но рекордсменом-долгожителем оказался учебник по геометрии.

Истории российских школьных учебников по математике в текущем году исполняется три века, если считать с появившейся в 1703 г. «Арифметики» Л. Ф. Магницкого. Первый учебник специально по геометрии — «Генеральная геометрия» Н. Г. Курганова — увидел свет в 1765 г. В последующие времена создавались все новые и новые учебники по геометрии (как не упомянуть здесь и «Руководство начальной геометрии» нашего выдающегося математика М. В. Остроградского), причем одни из них быстро исчезали из школы, а другие (скажем, учебник А. Ю. Давыдова) просуществовали целые десятилетия.

А. П. Киселев впервые выпустил «Элементарную геометрию» (ч. I, «Планиметрия»; ч. II, «Стереометрия») в 1892 г. Уже в начале XX века этот учебник завоевал широкую популярность и профессиональное признание учителей России. Он регулярно переиздавался и начал постепенно вытеснять конкурирующие учебники геометрии других

авторов (например, в 1916 г. вышло его 25-е издание под названием «Элементарная геометрия. Для средних учебных заведений. С приложением большого количества упражнений и статьи: Главнейшие методы решения геометрических задач на построение»). Такой успех был предопределен тем, что А. П. Киселев обладал исключительным педагогическим даром, глубоко и свободно владел предметом, внимательно изучал новинки методики преподавания, постоянно интересовался новостями науки, имел богатейший многолетний практический опыт работы с учащимися, от издания к изданию неустанно совершенствовал свою книгу, учитывая замечания практикующих учителей.

После 1917 г. наша средняя школа (как и вся отечественная система образования) претерпела многочисленные реформы и эксперименты, но учебники А. П. Киселева продолжали жить и использоваться. В 1938 г. «Геометрия» А. П. Киселева после переработки, выполненной известным математиком и педагогом Н. А. Глаголевым, получила официальное утверждение как стабильный и единственный учебник по геометрии (в двух частях — соответственно для 6–8 и 9–10 классов) советской средней школы (дополнявшийся в учебной работе «Сборником задач по геометрии» Н. А. Рыбкина).

Этот учебник просуществовал без всяких изменений в качестве общепринятого до 1956 г., когда школьная программа по математике претерпела изменения. Появились другие учебники, но они не отличались ни особой новизной, ни большей удачностью изложения и в школе не прижились. Многие учителя предпочитали, как и раньше, учить по «Планиметрии» А. П. Киселева, а его «Стереометрия» продержалась до 1974 г. Довольно трудно точно сказать, сколько всего изданий выдержал учебник А. П. Киселева (тем более, что две его части не всегда выходили в комплекте), но, видимо, их насчитывается много десятков.

Впрочем, и позже, после реформ школьного математического образования в 70-х годах прошлого века, о «Геометрии» А. П. Киселева вспоминали с ностальгией, наблюдая, как растет неприязнь школьников к геометрии, и констатируя, что ее изучение по очередным, но по-прежнему неудачным учебникам ведет лишь к катастрофическому падению геометрического образования. Предпринималась даже попытка (СПб.: Специальная литература, 1999) подстроить «Планиметрию» А. П. Киселева «под новую программу» с помощью специальных дополнений, но эта попытка была изначально обречена на провал. Кроме того, книга А. П. Киселева еще выпускалась как пособие для учителей — в том виде, какой она имела до переработки 1938 г. (М.: Просвещение, 1980, 1998), и в виде, идентичном стабильному учебнику, вместе с задачником Н. А. Рыбкина (М.: Дрофа, 1995).

Хотя современная программа средней школы по геометрии «модернизирована» координатами, векторами, преобразованиями, уравнениями простейших линий и др., ее основу составляет классическая элементарная геометрия. Конечно, чтобы глубже познакомиться с ней,

можно изучать русский перевод «Начал» Евклида или штудировать какой-нибудь солидный вузовский учебник. Но книга А. П. Киселева и сегодня остается наиболее удобным, четко и доступно написанным образцом изложения евклидовой геометрии, приспособленным к нуждам школы. Именно поэтому она включена в новую серию «Библиотека физико-математической литературы для школьников и учителей» и, несомненно, будет полезна и творческому учителю (прежде всего — начинающему), и даже интересующемуся ученику.

Дело, однако, не только в желании просто сделать доступным широкому кругу читателей «канонический» учебник, верой и правдой служивший советской школе два десятилетия. Книга А. П. Киселева предоставляет еще и богатую пищу для методических размышлений и поисков. Учителю математики было бы очень полезно проанализировать — с точки зрения нынешних наших представлений об учебнике для школы — такие вопросы, как подбор материала и манера его преподнесения, соотношение между научностью и доступностью изложения, сочетание теории и задач, целесообразность раздельного изучения планиметрии и стереометрии, использование фактов из истории математики, учет возрастной психологии, язык и стиль книги, ее оформление и т. д. Ибо дальнейшее совершенствование геометрического образования в школе и объективная оценка ныне действующих учебников немыслимы без тщательного личного ознакомления с опытом прошлого.

В последнее время явно прослеживается усиление интереса к изучению истории математического образования в России. Достаточно упомянуть здесь два фундаментальных труда по этой проблематике — Ю. М. Колягина «Русская школа и математическое образование. Наша гордость и наша боль» (М.: Просвещение, 2001) и Т. С. Поляковой «История математического образования в России» (Изд-во МГУ, 2002). Но нельзя не обратить внимание на одно обстоятельство: в большинстве проводимых многими авторами исследований ударение делается на слово «история», в центре внимания оказываются чисто фактологические детали летописания. Между тем, важно осуществлять систематическую и целенаправленную работу по той же тематике с ударением на слово «математического», чтобы понять внутреннюю логику и определяющие факторы эволюции содержания преподавания, выбора доказательств и примеров, требований к строгости обоснования, стиля изложения, общих взглядов на учебник и т. д.

Десятки изданий учебника А. П. Киселева, сопутствовавшие им методические материалы, иные учебники и пособия открывают широкие возможности для научного изучения исторической динамики развития методических воззрений на конкретные вопросы преподавания геометрии и создания учебника. Вот лишь один пример: в разных изданиях «Геометрии» А. П. Киселева мы встречаем и «алгебраическое», и «геометрическое» обоснования несоизмеримости диагонали квадрата с его стороной. Отметим и такой удивительный факт: из из-

дания в издание в книге повторялось неудачное определение призмы, не адекватное фактически изучаемому геометрическому телу (под это определение подпадает и ромбический додекаэдр).

Жизнь идет вперед, изменяются общественные взгляды, в том числе на цели, содержание и методику преподавания математики новым подрастающим поколениям. Конечно, в буквальном виде «Геометрия» А. П. Киселева сейчас уже не может рассматриваться как учебник для современной российской школы. Но эта книга, благодаря своему исключительному педагогическому потенциалу, не потеряла своей значимости и еще послужит отечественному образованию.

Н. Розов

профессор, декан факультета
педагогического образования МГУ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Учебник элементарной геометрии А. П. Киселева был долгое время самым распространенным учебником геометрии. Его главные достоинства — простота и отчетливость языка и доступность для понимания учащимися средних школ.

В порядке переработки учебника и приспособления его к существующим программам средних школ внесены многочисленные изменения и дополнения с целью уточнить, а иногда и более широко осветить отдельные вопросы. В вопросах же принципиального характера мною сделаны в тексте автора изменения по существу. В издаваемой первой части книги (Планиметрия) наиболее важными изменениями являются следующие: при изложении вопроса об измерении отрезков введены бесконечные десятичные дроби; теория подобия поставлена в связь с общей задачей подобного преобразования; дано более строгое изложение вопроса об измерении длины окружности; уточнено и вместе с тем несколько упрощено изложение теории измерения площадей; указано значение отдельных теорем в общем курсе геометрии; даны дополнительные указания к решению некоторых наиболее трудных задач; методы решения задач на построение, данные автором в виде приложения в конце всей книги, размещены с надлежащими редакционными изменениями в соответствующих местах книги (чтобы учащийся мог познакомиться с ними и использовать их в процессе изучения предмета); сокращена часть задач на вычисление, именно: выпущены задачи, имеющие малую теоретическую и практическую ценность; вовсе опущена глава «об отношениях и пропорциях», содержание которой с современной точки зрения является совершенно устарелым.

Кроме того, мною написаны следующие дополнения к первой части книги: 1) о симметрии фигур (осевой и центральной, §§ 37 и 84–86); 2) о подобном преобразовании фигур, перспективном расположении многоугольников и подобии окружностей (§§ 173–178); о пределе числовой последовательности и переменной величины (§§ 227–231).

Во всей переработке учебника я старался дать более точное изложение предмета и более широкое освещение отдельных вопросов, а также выдвинуть на первый план основные геометрические идеи о движении, о симметрии, о подобии, как геометрическом преобразовании, в той мере, в какой это допускают рамки готового текста и самый размер книги. Кроме того, при переработке текста я старался избежать создания в книге разных стилей, что могло бы затруднить чтение книги учащимися.

Н.Глаголев.
г. Верея, 20/11 1938 г.

ВВЕДЕНИЕ

1. Геометрические фигуры. Часть пространства, ограниченная со всех сторон, называется **геометрическим телом**.

Геометрическое тело отделяется от окружающего пространства **поверхностью**.

Часть поверхности отделяется от смежной части **линией**.

Часть линии отделяется от смежной части **точкой**.

Геометрическое тело, поверхность, линия и точка не существуют раздельно. Однако при помощи отвлечения мы можем рассматривать поверхность независимо от геометрического тела, линию — независимо от поверхности и точку — независимо от линии. При этом поверхность мы должны представить себе не имеющей толщины, линию — не имеющей ни толщины, ни ширины и точку — не имеющей ни длины, ни ширины, ни толщины.

Совокупность каких бы то ни было точек, линий, поверхностей или тел, расположенных известным образом в пространстве, называется вообще геометрической **фигурой**. Геометрические фигуры могут перемещаться в пространстве, не подвергаясь никаким изменениям. Две геометрические фигуры называются равными, если перемещением одной из них в пространстве ее можно совместить со второй фигурой так, что обе фигуры совместятся во всех своих частях.

2. Геометрия. Наука, рассматривающая свойства геометрических фигур, называется **геометрией**, что в переводе с греческого языка означает **землемерие**. Такое название этой науке было дано потому, что в древнее время главной целью геометрии было измерение расстояний и площадей на земной поверхности.

Плоскость

3. Плоскость. Из различных поверхностей наиболее знакомая нам есть плоская поверхность, или просто **плоскость**, представление о которой дает нам, например, поверхность хорошего оконного стекла или поверхность спокойной воды в пруде и т. п.

Укажем следующее свойство плоскости: *Всякую часть плоскости можно наложить всеми ее точками на другое место этой или другой плоскости, причем накладываемую часть можно предварительно перевернуть другой стороной.*

Прямая линия

4. Прямая линия. Самой простой линией является прямая. Представление о прямой линии, или просто о прямой, всем хорошо знакомо. Представление о ней дает туго натянутая нить или луч света, выходящий из малого отверстия. С этим представлением согласуется следующее основное свойство прямой:

Через всякие две точки пространства можно провести прямую и притом только одну.

Из этого свойства следует:

Если две прямые наложены одна на другую так, что какие-нибудь две точки одной прямой совпадают с двумя точками другой прямой, то эти прямые сливаются и во всех остальных точках (потому что в противном случае через две точки можно было бы провести две различные прямые, что невозможно).

По той же причине *две прямые могут пересечься только в одной точке.*

Прямая линия может лежать на плоскости. При этом плоскость обладает следующим свойством:

Если на плоскости взять какие-нибудь две точки и провести через них прямую линию, то все точки этой прямой будут находиться в этой плоскости.

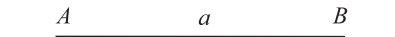


Рис. 1

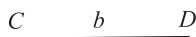


Рис. 2

5. Неограниченная прямая; луч; отрезок. Если прямую представляют продолженной в обе стороны бесконечно, то ее называют **бесконечной** (или **неограниченной**) прямой.

Прямую обозначают обыкновенно двумя большими буквами, поставленными у двух каких-либо ее точек. Так, говорят: «прямая AB » или « BA » (рис. 1).

Часть прямой, ограниченная с обеих сторон, называется **отрезком прямой**; отрезок обыкновенно обозначается двумя буквами, поставленными у его концов (отрезок CD , рис. 2). Иногда прямую или отрезок прямой обозначают и одной буквой (малой); например, говорят: «прямая a , отрезок b » и т. п.



Рис. 3

Для краткости вместо «отрезок прямой» мы будем часто говорить просто «отрезок».

Иногда рассматривают прямую, ограниченную только с одной стороны, например в точке A (рис. 3). О такой прямой говорят, что она исходит из точки A ; ее называют **лучом** (или **полупрямой**).

6. Равенство и неравенство отрезков. Два отрезка равны, если они могут быть наложены один на другой так, что их концы совпадут. Положим, например, что мы накладываем отрезок AB на



Рис. 4

отрезок CD (рис. 4) так, чтобы точка A совпала с точкой C и чтобы прямая AB пошла по прямой CD , если при этом концы B и D совпадут, то отрезки AB и CD равны; в противном случае отрезки будут не равны, причем меньшим считается тот, который составит часть другого.

Чтобы на какой-нибудь прямой отложить отрезок, равный данному отрезку, употребляют **циркуль** — прибор, известный учащимся из опыта.

7. Сумма отрезков. Суммой нескольких данных отрезков AB , CD , $EF, \dots$ (рис. 5) называется такой отрезок, который получится следующим образом. На какой-нибудь прямой берем произвольную

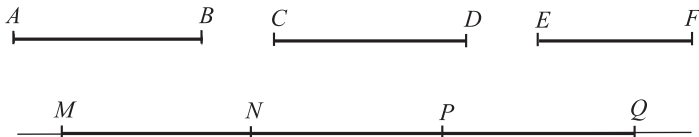


Рис. 5

точку M и откладываем от нее отрезок MN , равный AB , затем от точки N в том же направлении откладываем отрезок NP , равный CD , и отрезок PQ , равный EF . Тогда отрезок MQ и будет суммой отрезков AB , CD и EF (которые по отношению к этой сумме называются слагаемыми). Подобным образом можно получить сумму какого угодно числа отрезков.

Сумма отрезков обладает всеми свойствами суммы чисел; так, она не зависит от порядка слагаемых (переместительный закон) и не изменяется, если некоторые слагаемые будут заменены их суммой (сочетательный закон). Так:

$$AB + CD + EF = AB + EF + CD = EF + CD + AB = \dots$$

и

$$AB + CD + EF = AB + (CD + EF) = CD + (AB + EF) = \dots$$

8. Действия над отрезками. Из понятия о сумме выводятся понятия о разности отрезков, умножении и делении отрезков на отвлеченное число. Так, разность отрезков AB и CD (если $AB > CD$) есть такой третий отрезок, сумма которого с CD равна AB ; произведение отрезка AB на число 3 есть сумма трех отрезков, из которых каждый равен AB ; частное от деления отрезка AB на число 3 есть третья часть AB и т. п.

Если данные отрезки измерены какой-нибудь линейной единицей (например, сантиметром), и длины их выражены соответствующими числами, то длина суммы отрезков выразится суммой чисел, измеряющих эти отрезки, разность выразится разностью чисел и т. д.

Понятие об окружности

9. Окружность. Если дадим циркулю произвольный раствор и, поставив одну его ножку острием в какую-нибудь точку O плоскости (рис. 6), станем вращать циркуль вокруг этой точки, то другая его ножка, снабженная карандашом или пером, прикасающимся к плоскости, опишет на плоскости непрерывную линию, все точки которой одинаково удалены от точки O . Эта линия называется **окружностью**, и точка O — **центром** ее. Отрезки $OA, OB, OC, \dots$, соединяющие центр с какими-нибудь точками окружности, называются **радиусами**. Все радиусы одной окружности равны между собой.

Окружности, описанные одинаковыми радиусами, равны, так как они при совмещении их центров совмещаются всеми своими точками. Прямая (MN , рис. 6), проходящая через какие-нибудь две точки окружности, называется **секущей**.

Отрезок прямой (EP), соединяющий две какие-нибудь точки окружности, называется **хордой**.

Всякая хорда (AD), проходящая через центр, называется **диаметром**. Диаметр равен сумме двух радиусов, и потому все диаметры одной окружности равны между собой. Какая-нибудь часть окружности (например, EmP) называется **дугой**.

О хорде (EF), соединяющей концы какой-нибудь дуги, говорят, что она **стягивает** эту дугу.

Дуга обозначается иногда знаком $\smile$; например, пишут: $\smile EmP$. Часть плоскости, ограниченная окружностью, называется **кругом***).

Часть круга, заключенная между двумя радиусами (часть COB , покрытая штрихами на рис. 6), называется **сектором**, а часть, отсекаемая от круга какой-нибудь секущей (часть EmF), называется **сегментом**.

*) Иногда слово «круг» употребляют в том же смысле, как и окружность. Но этого следует избегать, так как употребление одного и того же термина для разных понятий может приводить к ошибкам.

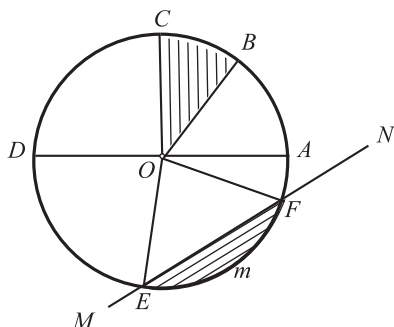


Рис. 6

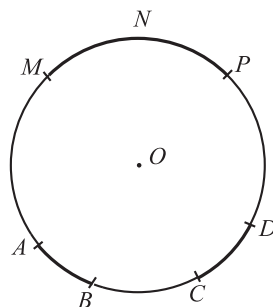


Рис. 7

10. Равенство и неравенство дуг. Две дуги одной и той же окружности (или равных окружностей) равны между собой, если они могут быть совмещены так, что их концы совпадут. Положим, например, что мы накладываем дугу AB (рис. 7) на дугу CD так, чтобы точка A совпала с точкой C и дуга AB пошла по дуге CD ; если при этом концы B и D совпадут, то совпадут и все промежуточные точки этих дуг, так как они находятся на одинаковом расстоянии от центра, значит, $\smile AB = \smile CD$; если же B и D не совпадут, то дуги не равны, причем та считается меньше, которая составит часть другой.

11. Сумма дуг. Суммой нескольких данных дуг одинакового радиуса называется такая дуга того же радиуса, которая составлена из частей, соответственно равных данным дугам. Так, если от произвольной точки M (рис. 7) окружности отложим часть MN , равную AB , и затем от точки N в том же направлении отложим часть NP , равную CD , то дуга MP будет суммой дуг AB и CD . Подобно этому можно составить сумму трех и более дуг.

При сложении дуг одинакового радиуса их сумма может не уместиться на одной окружности, одна из дуг может частично покрыть другую. В таком случае суммой дуг будет являться дуга, большая целой окружности. Так, например, при сложении дуги AmB с дугой CnD (рис. 8) получаем дугу, состоящую из целой окружности и дуги AD .

Сумма дуг, как и сумма отрезков прямой, обладает свойствами **переместительным** и **сочетательным**.

Из понятия о сумме дуг выводятся понятия о разности дуг, умножении и делении дуги на отвлеченное число, так же как и для отрезков прямых.

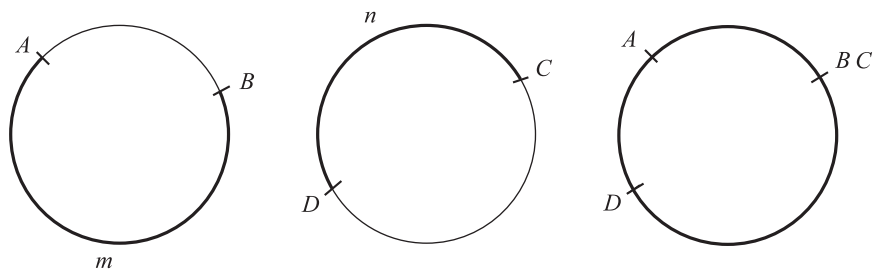


Рис. 8

12. Разделение геометрии. Геометрия разделяется на две части: **планиметрию** и **стереометрию**. Первая рассматривает свойства таких фигур, все части которых помещаются на одной плоскости; вторая — свойства таких фигур, у которых не все части помещаются на одной плоскости.

ПЛАНИМЕТРИЯ

Глава I

ПРЯМАЯ ЛИНИЯ

1. УГЛЫ

Предварительные понятия

13. Угол. Фигура, образованная двумя лучами, исходящими из одной точки, называется **углом**. Полупрямые, образующие угол, называются **сторонами**, а точка, из которой они исходят, — **вершиной угла**. Стороны следует представлять себе неограниченно продолженными от вершины.

Угол обыкновенно обозначается тремя большими буквами, из которых средняя ставится у вершины, а крайние — у каких-нибудь точек сторон; например, говорят: «угол AOB » или «угол BOA » (рис. 9). Но можно обозначить угол и одной буквой, поставленной у вершины, если при этой вершине нет других углов. Мы иногда будем обозначать угол цифрой, поставленной внутри угла около вершины.

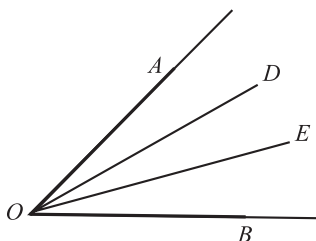


Рис. 9

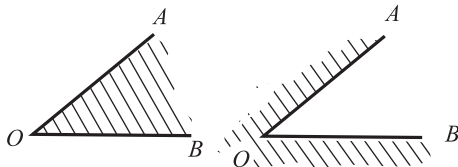


Рис. 10

Стороны угла разделяют всю плоскость, в которой лежит этот угол, на две области. Одна из них называется **внутренней областью угла**, другая — **внешней его областью**. Обычно внутренней областью считается та, в которой целиком помещается отрезок прямой,

соединяющей две любые точки, взятые на сторонах угла, например точки A и B на сторонах угла AOB (рис. 9). Но иногда приходится считать внутренней областью угла другую часть плоскости. В этих случаях обычно делается специальное указание, какая область плоскости считается внутренней областью угла.

На рис. 10 представлены раздельно оба случая. Внутренней областью угла в каждом случае служит заштрихованная часть плоскости. Если из вершины угла (рис. 9) проведем внутри него какие-нибудь прямые OD , OE , ..., то образовавшиеся при этом углы AOD , DOE , EOB , ..., рассматриваются как части угла AOB .

Слово «угол» при записи заменяется часто знаком $\angle$.

Например, вместо «угол AOB » обычно пишут: $\angle AOB$.

14. Равенство и неравенство углов. В соответствии с общим определением равенства геометрических фигур (§1) *два угла считаются равными, если при наложении они могут совместиться*.

Положим, например, что мы накладываем угол AOB на угол $A_1O_1B_1$ (рис. 11) так, чтобы вершина O совпала с O_1 , сторона OB пошла по O_1B_1 и чтобы внутренние области обоих углов были расположены по одну сторону от прямой O_1B_1 . Если при этом сторона OA совместится с O_1A_1 , то углы равны; если же OA пойдет внутри угла O_1B_1 или же вне его, то углы не равны, причем тот из них будет меньше, который составит часть другого угла.

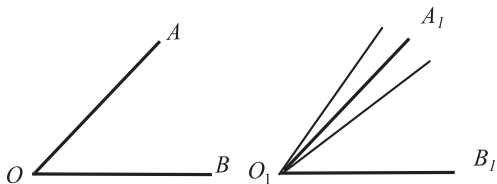


Рис. 11

15. Сумма углов. Суммой углов AOB и $A_1O_1B_1$ (рис. 12) называется такой угол, который получится следующим образом. Строим

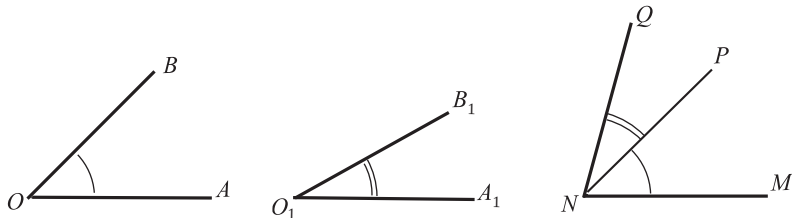


Рис. 12

угол MNP , равный первому данному углу AOB , и к нему пристраиваем угол PNQ , равный другому данному углу $A_1O_1B_1$ так, чтобы у обоих углов оказалась общая вершина N и общая сторона NP и чтобы внутренние области углов были расположены по разные

стороны от общей стороны NP . Тогда угол MNQ называется суммой углов AOB и $A_1O_1B_1$. Внутренней областью этого угла служит та область плоскости, которая образована совокупностью внутренних областей складываемых углов. Это та область, в которой лежит общая сторона (NP) складываемых углов. Подобным образом может быть составлена сумма трех и более углов.

Сумма углов, как и сумма отрезков прямой, обладает свойствами переместительным и сочетательным. Часто приходится говорить о такой полупрямой, которая делит данный угол пополам; такой полупрямой дали особое название: **биссектриса** (или **равноделящая**) (рис. 13).

16. Расширение понятия об угле. При нахождении суммы углов могут представиться некоторые особые случаи, которые полезно рассмотреть отдельно.

1. Может случиться, что после сложения нескольких углов, например трех: AOB , BOC и COD (рис. 14), сторона OD угла COD составит продолжение стороны OA угла AOB . Мы получим тогда фигуру, образованную двумя полупрямыми (OA и OD), исходящими из одной точки (O) и составляющими продолжение одна другой. Такую фигуру принято тоже называть углом (**развернутым**, или **выпрямленным**).

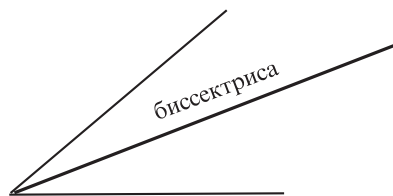


Рис. 13

2. Может случиться, что после сложения нескольких углов, например пяти углов: AOB , BOC , COD , DOE и EOA (рис. 15), сторона OA угла EOA совместится со стороной OA угла AOB .

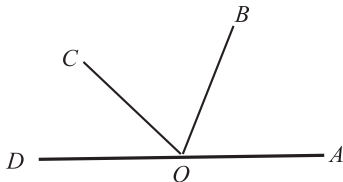


Рис. 14

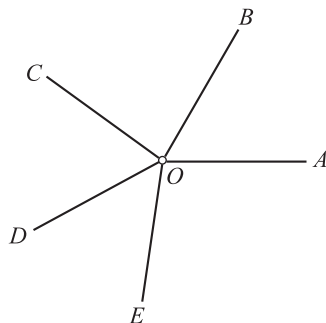


Рис. 15

Фигура, образованная такими совпавшими полупрямыми (рассматриваемая вместе со всей плоскостью, расположенной вокруг общей вершины O), также называется углом (**полным**).

3. Наконец, может случиться, что, строя сумму углов, мы не только заполним всю плоскость вокруг их общей вершины, но даже будем вынуждены налагать углы один на другой, покрывая плоскость вокруг общей вершины во второй раз, в третий раз и т. д. Такая сумма углов равна одному полному углу, сложенному с некоторым углом, или равна двум полным углам, сложенным с некоторым углом, и т. д.

Измерение углов

17. Центральный угол. Угол (AOB , рис. 16), образованный двумя радиусами окружности, называется центральным углом; о таком угле и дуге, заключенной между его сторонами, говорят, что они **соответствуют** друг другу.

Центральные углы по отношению к соответствующим им дугам обладают следующими двумя свойствами.

В одном круге или в равных кругах:

1) *Если центральные углы равны, то и соответствующие им дуги равны.*

2) *Обратно. Если дуги равны, то и соответствующие им центральные углы равны.*

Пусть $\angle AOB = \angle COD$ (рис. 17), покажем, что дуги AB и CD также равны. Вообразим, что сектор AOB мы повернули вокруг центра O в направлении, указанном стрелкой, настолько, чтобы радиус OA совпал с OC . Тогда, вследствие равенства углов, радиус OB совместится с OD ; значит, совместятся и дуги AB и CD , т. е. они будут равны.

Второе свойство также легко обнаружить наложением.

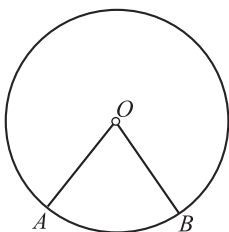


Рис. 16

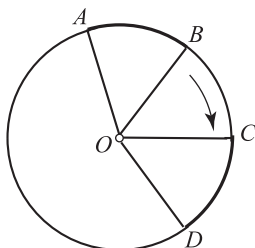


Рис. 17

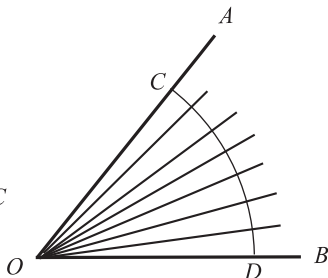


Рис. 18

18. Градусы дуговой и угловой. Вообразим, что какая-нибудь окружность разделена на 360 равных частей и ко всем точкам деления проведены радиусы. Тогда вокруг центра образуются 360 центральных углов, которые, как соответствующие равным дугам, должны быть равны между собой. Каждая из полученных таким образом на окружности дуг называется **дуговым градусом**, а каждый из

образовавшихся при центре углов называется **угловым градусом**. Значит, можно сказать, что дуговой градус есть $\frac{1}{360}$ часть окружности, а угловой градус есть центральный угол, соответствующий дуговому градусу.

Градусы (дуговые и угловые) подразделяются еще на 60 равных частей, называемых **минутами**, а минуты подразделяются еще на 60 равных частей, называемых **секундами***).

19. Соответствие между центральными углами и дугами.

Пусть AOB есть какой-нибудь угол (рис. 18). Опишем между его сторонами с центром в вершине O дугу CD произвольного радиуса; тогда угол AOB будет центральным углом, соответствующим дуге CD .

Положим, например, что в этой дуге содержится 7 дуговых градусов (на чертеже градусы изображены в увеличенном размере). Тогда, если соединим точки деления с центром, угол AOB разделится, очевидно, на 7 угловых градусов. Вообще можно сказать, что *угол измеряется соответствующей ему дугой*, разумея под этим, что в угле содержится столько угловых градусов, минут и секунд, сколько в соответствующей ему дуге содержится дуговых градусов, минут и секунд. Если, например, в дуге CD содержится 20 градусов 10 минут 15 секунд дуговых, то и в угле AOB заключается 20 градусов 10 минут 15 секунд угловых, что принято сокращенно выражать так: $\angle AOB = 20^\circ 10' 15''$ обозначая знаками $^\circ$, $'$ и $''$ соответственно градусы, минуты и секунды.

Величина углового градуса не зависит от радиуса окружности. Действительно, если сложить по правилу, указанному в § 15, 360 угловых градусов, то получим полный угол при центре окружности. Каков бы ни был радиус окружности, этот полный угол будет один и тот же. Значит, можно сказать, что угловой градус составляет $\frac{1}{360}$ часть полного угла. Это мера угла, вполне определяющая его величину независимо от радиуса окружности. Число

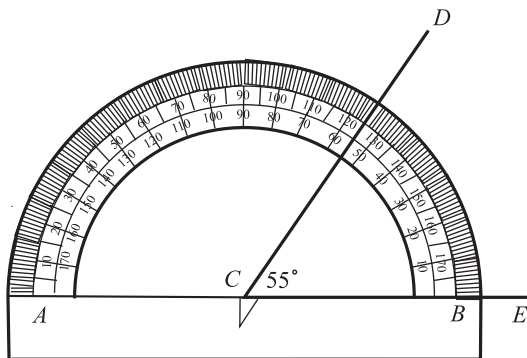


Рис. 19

*)Употребительна также сотенная система мер углов и дуг; по этой системе за **град** дуги принимают $\frac{1}{100}$ четверти окружности, минуту принимают равной $\frac{1}{100}$ града, секунду — $\frac{1}{100}$ минуты.

угловых градусов в данном угле принимают за меру наклона одной стороны угла к другой.

20. Транспортир. Для измерения углов употребляется особый прибор — **транспортир**. Этот прибор (рис. 19) представляет собой полукруг, дуга которого разделена на 180° . Чтобы измерить угол DCE , накладывают на него прибор так, чтобы центр полукруга совпадал с вершиной угла, а радиус CB был расположен по стороне CE . Тогда число градусов, содержащееся в дуге, заключенной между сторонами угла DCE , покажет величину его. При помощи транспортира можно также начертить угол, содержащий данное число градусов.

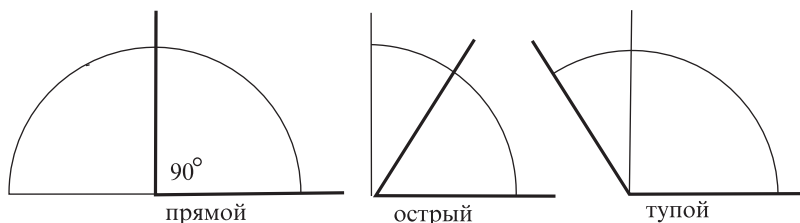


Рис. 20

21. Прямой, острый и тупой углы. Угол в 90° (составляющий, следовательно, половину развернутого угла или четверть полного угла) называют **прямым** углом; угол, меньший прямого, называют **острым**, а угол, больший прямого, но меньший развернутого, называют **тупым** (рис. 20)

Конечно, **все прямые углы**, как содержащие одинаковое число градусов, **равны между собой**.

Величину прямого угла иногда обозначают буквой d (начальная буква французского слова (*droit*, что значит «прямой»)).

Смежные и вертикальные углы

22. Смежные углы и их свойства. Два угла (AOB и BOC , рис. 21) называются **смежными**, если одна сторона у них общая, а две другие стороны составляют продолжение одна другой.

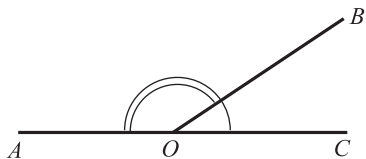


Рис. 21

Так как такие углы в сумме составляют развернутый угол, то **сумма двух смежных углов равна 180°** (другими словами, она равна сумме двух прямых углов).

Для каждого данного угла можно построить два смежных с ним угла. Например, для угла AOB (рис. 22), продолжив сторону AO , мы получим один смежный угол AOD . Два угла, BOC и AOD , смежные с одним и тем же углом AOB , равны между собой, так

как каждый из них дополняет угол AOB до 180° . Если угол AOB прямой (рис. 23), т. е. если он содержит 90° , то и каждый из смежных с ним углов COB и AOD должен быть также прямой, так как он содержит в себе $180^\circ - 90^\circ$, т. е. 90° ; четвертый угол COD тоже должен быть прямым, так как три угла AOB , BOC и AOD составляют в сумме 270° и, следовательно, от 360° на долю четвертого угла COD остается тоже 90° . Таким образом: *если при пересечении двух прямых (AC и BD , рис. 23) один из четырех углов окажется прямой, то и остальные три угла должны быть прямыми.*

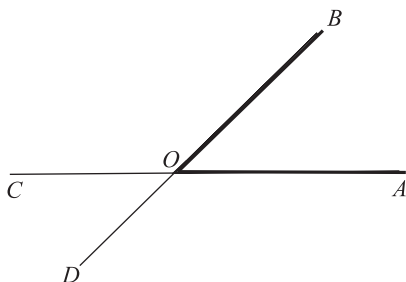


Рис. 22

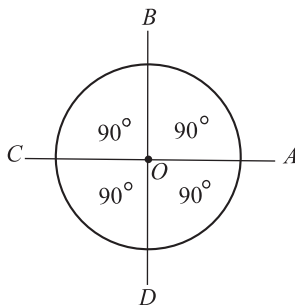


Рис. 23

23. Перпендикуляр и наклонная. Общая сторона (OB) двух смежных углов называется **наклонной** к прямой (AC), на которой лежат две другие стороны, в том случае, когда смежные углы не равны между собой (рис. 24); в том же случае, когда смежные углы равны (рис. 25) и когда, следовательно, каждый из углов есть прямой, общая сторона называется **перпендикуляром** к прямой, на которой лежат две другие стороны. Общая вершина (O) в первом случае называется **основанием наклонной**, во втором случае — **основанием перпендикуляра**.

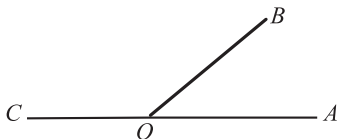


Рис. 24

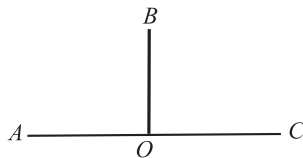


Рис. 25

Две прямые (AC и BD , рис. 23), пересекающиеся между собой под прямым углом, называются **взаимно перпендикулярными**. Что прямая AC перпендикулярна к прямой BD , записывают так: $AC \perp BD$.

З а м е ч а н и я. 1) Если перпендикуляр к прямой AC (рис. 25) приходится проводить из точки O , лежащей на этой прямой, то говорят, что этот перпендикуляр надо «восставить» к прямой AC , а если требуется перпендикуляр провести из точки B , лежащей вне прямой, то говорят, что его надо «опустить» на прямую (все равно: вниз или вверх, или вбок).

2) Очевидно, что из всякой точки данной прямой можно к этой прямой восставить перпендикуляр и притом только один.

24. Докажем, что *из всякой точки, лежащей вне прямой, можно опустить на эту прямую перпендикуляр и только один.*

Пусть дана какая-нибудь прямая AB (рис. 26) и вне ее произвольная точка M ; требуется показать, что, во-первых, из этой точки можно опустить на прямую AB перпендикуляр и, во-вторых, что этот перпендикуляр может быть только один.

Вообразим, что мы перегнули чертеж по прямой AB так, чтобы верхняя его часть упала на нижнюю. Тогда точка M займет некоторое положение N . Отметив это положение, приведем чертеж в прежний вид и затем соединим точки M и N прямой. Теперь убедимся, что полученная прямая MN перпендикулярна к AB , а всякая иная прямая, исходящая из M , например MD , не перпендикулярна к AB . Для этого перегнем чертеж вторично. Тогда точка M снова совместится с N , а точки C и D останутся на своих местах; следовательно, прямая MC совпадет с NC , а MD с ND . Из этого следует, что $\angle MCB = \angle BCN$ и $\angle MDC = \angle CDN$.

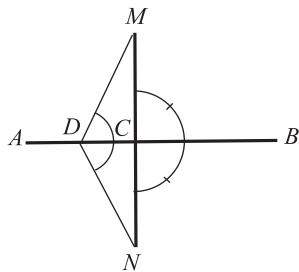


Рис. 26

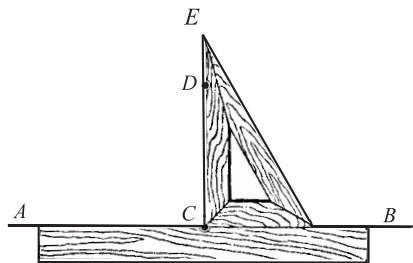


Рис. 27

Но углы MCB и BCN смежные и, как теперь видим, равные; следовательно, каждый из них есть прямой, а потому $MN \perp AB$. Так как линия MDN не прямая (потому что не может быть двух различных прямых, соединяющих точки M и N), то сумма двух равных углов MDC и CDN не равна $2d$; поэтому угол MDC не есть прямой, и, значит, MD не перпендикулярна к AB . Таким образом, другого

перпендикуляра из точки M на прямую AB опустить нельзя.

25. Чертежный треугольник. Для построения перпендикуляра к данной прямой очень удобен чертежный треугольник, у которого один из углов делается прямым. Чтобы провести перпендикуляр к прямой AB (рис. 27) через точку C , лежащую на этой прямой, или через точку D , взятую вне прямой, приставляют линейку к прямой AB , к линейке треугольник, а затем, придерживая линейку рукой, двигают треугольник вдоль линейки до тех пор, пока другая сторона прямого угла не пройдет через точку C или D , затем проводят прямую CE .

26. Вертикальные углы и их свойство. Два угла называются **вертикальными**, если стороны одного составляют продолжение сторон другого. Так, при пересечении двух прямых AB и CD (рис. 28) образуются две пары вертикальных углов: $\angle AOD$ и $\angle COB$, $\angle AOC$ и $\angle DOB$ (и четыре пары смежных углов).

Два вертикальных угла равны между собой (например, $\angle AOD = \angle COB$), так как каждый из них есть смежный с одним и тем же углом (с $\angle DOB$ или с $\angle AOC$), а такие углы, как мы видели (§ 22), равны друг другу.

27. Замечания об углах, имеющих общую вершину. Об углах, имеющих общую вершину, полезно помнить следующие простые истины:

1) Если сумма нескольких углов ($\angle AOB$, $\angle BOC$, $\angle COD$, $\angle DOE$, рис. 29), имеющих общую вершину, составляет развернутый угол, то она равна $2d$, т. е. 180° .

2) Если сумма нескольких углов ($\angle AOB$, $\angle BOC$, $\angle COD$, $\angle DOE$, рис. 30), имеющих общую вершину, составляет полный угол, то она равна $4d$, т. е. 360° .

3) Если два угла ($\angle AOB$ и $\angle BOC$, рис. 24) имеют общую вершину (O) и общую сторону (OB) и в сумме составляют $2d$ (т. е. 180°), то их две другие стороны (AO и OC) составляют продолжение одна другой (т. е. такие углы будут смежными).

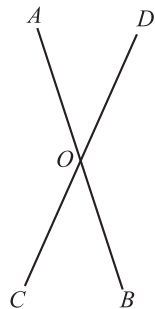


Рис. 28

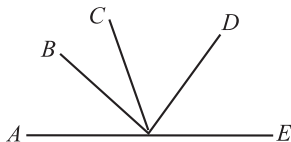


Рис. 29

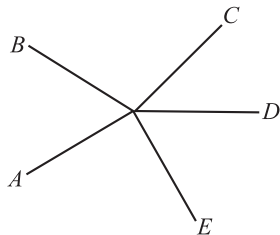


Рис. 30

УПРАЖНЕНИЯ

1. Некоторый угол равен $38^\circ 20'$; найти величину смежного с ним угла.
 2. Два угла ABC и CBD , имея общую вершину B и общую сторону BC , расположены так, что они не покрывают друг друга; угол $ABC = 100^\circ 20'$, а угол $CBD = 79^\circ 40'$. Составляют ли стороны AB и BD прямую или ломаную?
 3. Построить какой-нибудь угол и при помощи транспортира и линейки провести его биссектрису.
Доказать, что:
 4. Биссектрисы двух смежных углов взаимно перпендикулярны.
 5. Биссектрисы двух вертикальных углов составляют продолжение одна другой.
 6. Если при точке O прямой AB (рис. 28) построим по разные стороны от AB равные углы AOD и BOC , то стороны их OD и OC составляют одну прямую.
 7. Если из точки O (рис. 28) проведем полупрямые OA , OD , OB , OC так, что $\angle AOC = \angle DOB$ и $\angle AOD = \angle COB$, то OB есть продолжение OA и OD есть продолжение OC .
- Указание. Надо применить § 27, 2 и 3.

2. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ПРЕДЛОЖЕНИЯ

28. Теоремы, аксиомы, определения. Из того, что было изложено, можно заключить, что некоторые геометрические истины мы считаем вполне очевидными (например, свойства плоскости и прямой в §§ 3 и 4), а другие устанавливаем путем рассуждений (например, свойства смежных углов в § 22 и вертикальных в § 26). Такие рассуждения являются в геометрии главным средством обнаружить свойства геометрических фигур. Поэтому для дальнейшего полезно заранее познакомиться с теми видами рассуждений, которые применяются в геометрии. Все истины, которые устанавливаются в геометрии, выражаются в виде предложений.

Эти предложения бывают следующих видов.

Определения. Определениями называют предложения, в которых разъясняется, какой смысл придают тому или другому названию или выражению. Например, мы уже встречали определения центрального угла, прямого угла, перпендикуляра и проч.

Аксиомы. Аксиомами называют истины, которые принимаются без доказательства. Таковы, например, предложения, встречавшиеся нам ранее (§ 4): через всякие две точки можно провести прямую и притом только одну; если две точки прямой лежат в данной плоскости, то и все точки этой прямой лежат в той же плоскости.

Укажем еще следующие аксиомы, относящиеся ко всякого рода величинам:

если две величины равны порознь одной и той же третьей величине, то они равны и между собой;

если к равным величинам прибавим поровну или от равных величин отнимем поровну, то равенство не нарушится;

если к неравным величинам прибавим поровну или от неравных величин отнимем поровну, то смысл неравенства не изменится, т. е. большая величина останется большей.

Теоремы. Теоремами называются предложения, истинность которых обнаруживается только после некоторого рассуждения (доказательства). Примером могут служить следующие предложения:

если в одном круге или в равных кругах центральные углы равны, то и соответствующие им дуги равны;

если при пересечении двух прямых между собой один из четырех углов окажется прямой, то и остальные три угла прямые.

Следствия. Следствиями называются предложения, которые составляют непосредственный вывод из аксиомы или из теоремы. Например, из аксиомы: «через две точки можно провести только одну прямую» следует, что «две прямые могут пересечься только в одной точке».

29. Состав теоремы. Во всякой теореме можно различить две части: условие и заключение. **Условие** выражает то, что предполагается данным; **заключение** — то, что требуется доказать. Например, в теореме: «если центральные углы равны, то и соответствующие им дуги равны» условием служит первая часть теоремы: «если центральные углы равны», а заключением — вторая часть: «то и соответствующие им дуги равны»; другими словами, нам дано (нам известно), что центральные углы равны, а требуется доказать, что при этом условии и соответствующие дуги также равны.

Условие и заключение теоремы могут иногда состоять из нескольких отдельных условий и заключений; например, в теореме: «если число делится на 2 и на 3, то оно разделится и на 6» условие состоит из двух частей: «если число делится на 2» и «если число делится на 3».

Полезно заметить, что всякую теорему можно подробно выразить словами так, что ее условие будет начинаться словом «если», а заключение — словом «то». Например, теорему: «вертикальные углы равны» можно подробнее высказать так: «если два угла вертикальные, то они равны».

30. Обратная теорема. Теоремой, обратной данной теореме, называется такая, в которой условием поставлено заключение (или часть заключения), а заключением — условие (или часть условия) данной теоремы. Например, следующие две теоремы обратны друг другу:

Если центральные углы равны, то и соответствующие им дуги равны.

Если дуги равны, то и соответствующие им центральные углы равны.

Если одну из этих теорем назовем **прямой**, то другую следует назвать обратной. В этом примере обе теоремы, и прямая, и обратная, оказываются верными. Но так бывает не всегда. Например, теорема: «если два угла вертикальные, то они равны» верна, но обратное предложение: «если два угла равны, то они вертикальные» неверно.

В самом деле, допустим, что в каком-либо углу проведена его биссектриса (рис. 13). Она разделит данный угол на два меньших угла. Эти углы будут равны между собой, но они не будут вертикальными.

31. Противоположная теорема. Теоремой, противоположной данной теореме, называется такая, условие и заключение которой представляют отрицание условия и заключения данной теоремы. Например, теореме: «если сумма цифр делится на 9, то число делится на 9» соответствует такая противоположная: «если сумма цифр не делится на 9, то число не делится на 9».

И здесь должно заметить, что верность прямой теоремы еще не служит доказательством верности противоположной: например, противоположное предложение: «если каждое слагаемое не делится на одно и то же число, то и сумма не разделится на это число» — неверно, тогда как прямое предложение верно.

32. Зависимость между теоремами: прямой, обратной и противоположной. Для лучшего уяснения этой зависимости выразим теоремы сокращенно так (буквой A мы обозначим условие теоремы, а буквой B — ее заключение):

- 1) **Прямая:** если есть A , то есть и B .
 - 2) **Обратная:** если есть B , то есть и A .
 - 3) **Противоположная прямой:** если нет A , то нет и B .
 - 4) **Противоположная обратной:** если нет B , то нет и A .
- Рассматривая эти предложения, легко заметить, что первое из них находится в таком же отношении к четвертому, как второе к третьему, а именно: предложения первое и четвертое обратимы одно в другое, равно как второе и третье. Действительно, из предложения: «если есть A , то есть и B » непосредственно следует: «если нет B , то нет и A » (так как если бы A было, то, согласно первому предложению, было бы и B); обратно, из предложения: «если нет B , то нет и A » выводим: «если есть A , то есть и B » (так как если бы B не было, то не было бы и A). Совершенно так же убедимся, что из второго предложения следует третье, и наоборот.

Таким образом, чтобы иметь уверенность в справедливости всех четырех теорем, нет надобности доказывать каждую из них отдельно, а достаточно ограничиться доказательством только двух: прямой и обратной, или прямой и противоположной.

3. ТРЕУГОЛЬНИКИ

Понятие о многоугольнике и треугольнике

33. Ломаная линия. Линия, образуемая отрезками прямых, не лежащих на одной прямой и расположенных так, что конец первого служит началом второго, конец второго — началом третьего и т. д., называется **ломаной линией** (рис. 31 и 32). Эти отрезки называются сторонами ломаной, а вершины углов, образуемых соседними отрезками, — **вершинами** ее. Ломаная линия обозначается рядом букв, поставленных у ее вершин и концов; например говорят: ломаная $ABCDE$. Ломаная линия называется **выпуклой**, если она вся расположена по одну сторону от каждого входящего в ее состав отрезка, продолженного неограниченно в обе стороны. Такова, например, линия, изображенная на рис. 31, тогда как ломаная на рис. 32 не будет выпуклой (она расположена не по одну сторону от прямой BC), рис. 31.

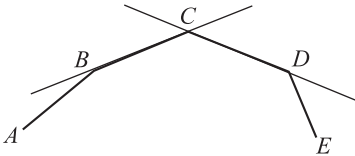


Рис. 31

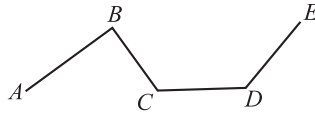


Рис. 32

Когда концы ломаной сходятся в одну точку, то она называется замкнутой (например, линия $ABCDE$ на рис. 33).

34. Многоугольник. Фигура, образованная замкнутой ломаной линией вместе с частью плоскости, ограниченной этой линией, называется многоугольником (рис. 33). Стороны этой ломаной называются

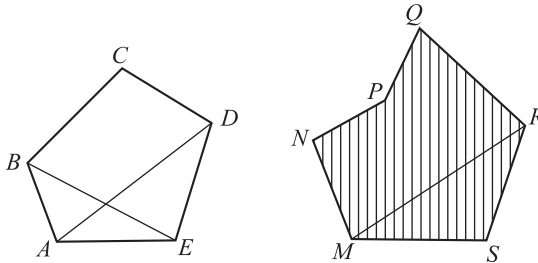


Рис. 33

ся **сторонами** многоугольника, углы, составленные каждым двумя соседними сторонами, — **углами** многоугольника, а их вершины — **вершинами** его.