

Левитов Л.С.  
Шитов А.В.

**Функции Грина.  
Задачи и  
решения**



МОСКВА  
ФИЗМАТЛИТ®

УДК 530.145

ББК 22.31

Л 36

Левитов Л. С., Шитов А. В. **Функции Грина. Задачи и решения.** — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. — 392 с. — ISBN 978-5-9221-0098-4.

Тема учебника — квантовая физика систем, состоящих из большого числа частиц. Книга в форме сборника задач позволяет рассмотреть основные теоретические методы этого раздела физики и одновременно охватить большой круг конкретных физических явлений.

Задачи первой части книги подобраны так, чтобы на примере известного читателю материала по нерелятивистской квантовой механике проиллюстрировать метод функций Грина. Задачи сопровождаются подробными решениями и комментариями, поясняющими мотивировку и связь с разнообразными вопросами современной теории конденсированного состояния. В начале каждой главы кратко излагается необходимый материал по фейнмановской диаграммной технике. Вторая часть книги построена по той же схеме, что и первая. В нее включены задачи по нескольким актуальным разделам физики конденсированного состояния. Это — теория ферми-жидкости, неупорядоченные системы, сверхпроводимость и одномерные сильно коррелированные системы. Помимо этого, во второй части рассматриваются вопросы, связанные с измерением функций отклика и гриновских функций.

Книга предназначена для студентов старших курсов, специализирующихся в области теоретической физики, физики твердого тела и низких температур, а также для аспирантов-физиков и научных работников.

# ОГЛАВЛЕНИЕ

|                                                                               |            |
|-------------------------------------------------------------------------------|------------|
| Список обозначений . . . . .                                                  | 8          |
| <b>I. Теория возмущений</b>                                                   |            |
| <b>Глава 1. Квазичастицы . . . . .</b>                                        | <b>9</b>   |
| 1.1. Вторичное квантование. Канонические преобразования . . . . .             | 9          |
| 1.2. Задачи 1–4 . . . . .                                                     | 13         |
| 1.3. Решения задач 1–4 . . . . .                                              | 14         |
| 1.4. От спиновых операторов — к фермиевским . . . . .                         | 22         |
| <b>Глава 2. Функция Грина . . . . .</b>                                       | <b>25</b>  |
| 2.1. Представление взаимодействия. Хронологическое упорядочение . . . . .     | 25         |
| 2.2. Задачи 5–10 . . . . .                                                    | 28         |
| 2.3. Решения задач 5–10 . . . . .                                             | 30         |
| <b>Глава 3. Квантовая механика одной частицы . . . . .</b>                    | <b>42</b>  |
| 3.1. Теория возмущений и функция Грина . . . . .                              | 42         |
| 3.2. Задачи 11–15 . . . . .                                                   | 44         |
| 3.3. Решения задач 11–15 . . . . .                                            | 47         |
| <b>Глава 4. Взаимодействующие частицы . . . . .</b>                           | <b>57</b>  |
| 4.1. Правила построения диаграмм . . . . .                                    | 57         |
| 4.1.1. Блочное суммирование (60). . . . .                                     |            |
| 4.2. Полюсы функции Грина — спектр квазичастиц . . . . .                      | 61         |
| 4.2.1. Двухчастичная функция Грина (63). . . . .                              |            |
| 4.3. Задачи 16–21 . . . . .                                                   | 65         |
| 4.4. Решения задач 16–21 . . . . .                                            | 69         |
| <b>Глава 5. Идеальный ферми-газ . . . . .</b>                                 | <b>86</b>  |
| 5.1. Электроны на ферми-поверхности . . . . .                                 | 86         |
| 5.1.1. Формула Кубо (87). . . . .                                             |            |
| 5.2. Задачи 22–27 . . . . .                                                   | 89         |
| 5.3. Решения задач 22–27 . . . . .                                            | 92         |
| <b>Глава 6. Электроны и фононы . . . . .</b>                                  | <b>107</b> |
| 6.1. Гамильтониан фононов. Диаграммная техника . . . . .                      | 107        |
| 6.2. Задачи 28–33 . . . . .                                                   | 111        |
| 6.3. Решения задач 28–33 . . . . .                                            | 113        |
| 6.4. Эффект Пайерлса. Теория среднего поля . . . . .                          | 126        |
| <b>Глава 7. Диаграммная техника при конечных температу-<br/>рах . . . . .</b> | <b>134</b> |
| 7.1. Мацубаровское время . . . . .                                            | 134        |
| 7.2. Дискретные частоты . . . . .                                             | 137        |
| 7.2.1. Метод аналитического продолжения (138). . . . .                        |            |
| 7.3. Задачи 34–42 . . . . .                                                   | 141        |
| 7.4. Решения задач 34–42 . . . . .                                            | 146        |

## II. Методы теории многих тел

|                                                                                              |     |
|----------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| <b>Глава 8. Теория ферми-жидкости</b> . . . . .                                              | 174 |
| 8.1. Квазичастицы . . . . .                                                                  | 175 |
| 8.2. Кинетическое уравнение. Коллективные моды . . . . .                                     | 177 |
| 8.3. Приближение случайных фаз . . . . .                                                     | 180 |
| 8.4. Задачи 43–49 . . . . .                                                                  | 185 |
| 8.5. Решения задач 43–49 . . . . .                                                           | 190 |
| 8.6. Энергия взаимодействия в металле. Вигнеровский кристалл . . . . .                       | 208 |
| 8.7. Микроскопическое обоснование теории ферми-жидкости . . . . .                            | 211 |
| <b>Глава 9. Электроны в случайном потенциале</b> . . . . .                                   | 216 |
| 9.1. Усреднение функций Грина по беспорядку . . . . .                                        | 216 |
| 9.2. Усреднение функций отклика . . . . .                                                    | 221 |
| 9.3. Задачи 50–54 . . . . .                                                                  | 224 |
| 9.4. Трудные задачи 55–57 (слабая локализация и мезоскопика) . . . . .                       | 228 |
| 9.5. Решения задач 50–57 . . . . .                                                           | 233 |
| 9.6. Диаграммы без самопересечений . . . . .                                                 | 260 |
| 9.7. Электронный спектр неупорядоченной системы . . . . .                                    | 264 |
| 9.7.1. Хвост локализованных состояний (266).                                                 |     |
| <b>Глава 10. Сверхпроводимость</b> . . . . .                                                 | 268 |
| 10.1. Микроскопическая теория сверхпроводимости . . . . .                                    | 268 |
| 10.1.1. Образование куперовских пар (268). 10.1.2. Квазичастицы в сверхпроводнике (272).     |     |
| 10.2. Диаграммная техника для теории Бардина–Купера–Шриффера . . . . .                       | 275 |
| 10.2.1. Рассеяние в куперовском канале (275). 10.2.2. Функции Грина в сверхпроводнике (278). |     |
| 10.3. Задачи 58–64 . . . . .                                                                 | 283 |
| 10.4. Трудные задачи 65–67 . . . . .                                                         | 287 |
| 10.5. Решения задач 58–67 . . . . .                                                          | 289 |
| <b>Глава 11. Измерение функций Грина</b> . . . . .                                           | 317 |
| 11.1. Туннелирование . . . . .                                                               | 317 |
| 11.2. Неупругое рассеяние . . . . .                                                          | 324 |
| 11.3. Задачи 68–74 . . . . .                                                                 | 327 |
| 11.4. Решения задач 68–74 . . . . .                                                          | 331 |
| <b>Глава 12. Бозонизация и латтинжеровская жидкость</b> . . . . .                            | 355 |
| 12.1. Гидродинамика одномерного ферми-газа . . . . .                                         | 356 |
| 12.2. Коммутаторы операторов плотности . . . . .                                             | 357 |
| 12.3. Модель Томонаги . . . . .                                                              | 359 |
| 12.4. От бозонов к фермионам . . . . .                                                       | 362 |
| 12.5. Задачи 75–82 . . . . .                                                                 | 366 |
| 12.6. Решения задач 75–82 . . . . .                                                          | 369 |
| Список литературы . . . . .                                                                  | 386 |
| Предметный указатель . . . . .                                                               | 387 |

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Метод функций Грина, предложенный Р. Фейнманом в квантовой электродинамике, уже давно стал универсальным языком всей теоретической физики. Знание диаграммной техники и умение использовать функции Грина является неотъемлемой частью образования физика-теоретика, независимо от конкретной области его интересов. При этом студенту, желающему изучить эти методы, обычно приходится вначале знакомиться с ними в рамках курса квантовой теории поля, поскольку по историческим причинам в учебной литературе основное внимание уделялось именно этой области.

В теорию конденсированного состояния, изучающую квантовые свойства твердых тел и других многочастичных систем, диаграммная техника прочно вошла еще в середине 50-х годов. Как нетрудно проследить, практически все основные достижения в этой области теоретической физики были так или иначе связаны с развитием диаграммной техники. Применение функций Грина в теории твердого тела освещено в обширной литературе, центральное место в которой занимает хорошо известная монография А. А. Абрикосова, Л. П. Горькова и И. Е. Дзялошинского «Методы квантовой теории поля в статистической физике» [1]. Эта замечательная книга, к сожалению, не может считаться учебником в полном смысле слова, поскольку в ней отсутствуют задачи, а кроме того предполагается, что читатель отчасти знаком с методами квантовой теории поля.

В настоящее время, однако, студенты часто изучают методы функций Грина, используя книгу [1] или другие аналогичные пособия, не после квантовой теории поля, а одновременно или даже несколько раньше. Это связано с тем, что современная физика твердого тела достаточно богата идеями и содержательными результатами, а теория конденсированного состояния имеет много связей с квантовой теорией поля. Поэтому нам казалось весьма полезным изложить необходимый для освоения диаграммной техники материал таким образом, чтобы он был доступен студенту, знакомому лишь с основами квантовой механики.

Предлагаемая читателю книга возникла как попытка устранить указанный пробел в учебной литературе. Основу книги составили материалы занятий по теории твердого тела со студентами МФТИ в 1992–94 гг., в которых в качестве учебника использовалась книга [1]. По собственному опыту авторов известно, что читателю «вечнозеленой» книги о функциях Грина приходится, как всегда при изучении трудного материала, самому придумывать себе примеры и простые задачи. Исходной идеей было — систематизировать этот опыт и снабдить читателя [1] достаточно интересными, но не слишком трудными задачами.

В процессе написания книги мы постарались сделать ее по возможности независимой от других учебных пособий. Для этого в начале всех глав помещены вступительные разделы, в которых напомним необходимый теоретический материал, сравниваются различные подходы, кратко суммируются основные теоретические положения, и т. п. После этого идут разделы с задачами <sup>1)</sup> и их подробными решениями. Иногда, если в этом имеется необходимость, приведено несколько различных решений одной и той же задачи. Помимо этого, воспользовавшись преимуществами избранной формы задачника, более свободной, чем учебник или монография, мы включили в книгу разнообразные отступления и «вставные новеллы», объясняющие мотивировку тех или иных задач, или поясняющие связь с вопросами теории, представляющими интерес в настоящее время и недостаточно освещенными в учебниках. Эти отступления помещены в конце некоторых глав.

Книга состоит из двух частей, что соответствует разделению материала по двум различным уровням трудности. Часть I имеет вводный характер. Ее основная идея — на примере фактов, известных читателю из курса квантовой механики, проиллюстрировать основные положения метода функций Грина и, так сказать, пересказать квантовую механику одной частицы на графическом языке диаграммной техники. Кроме того, в первой части вводится аппарат функций Грина, отдельно при нулевой и конечной температуре. При этом от читателя не требуется предварительного знакомства с физикой твердого тела, поскольку практически все используемые примеры имеют общезначимый характер, а необходимый фактический материал изложен по ходу дела.

В часть II входят основные разделы современной теории твердого тела, такие как теория ферми-жидкости, теория неупорядоченных систем, включая возникшую за последние 20 лет теорию слабой локализации и квантовых эффектов в проводимости, а также теория сверхпроводимости, и теория одномерных сильно-коррелированных систем. Кроме того, в часть II включена глава «Измерение функций Грина», цель которой — установить связь между развиваемой теорией, опирающейся на функции Грина, и экспериментальными методами физики твердого тела. Кроме того, в этой главе сообщаются некоторые сведения из физики твердого тела, не всегда знакомые студентам-теоретикам.

Следует сказать, что отбор материала, легшего в основу части II, в сильной степени определяется вкусами и научными интересами авторов. При составлении задач мы стремились рассмотреть вопросы теории, представляющие интерес в настоящее время. При этом, однако, мы постарались избежать превращения книги в обзор современного состояния науки. Затронутые вопросы были отобраны в основном

---

<sup>1)</sup> Трудные задачи помечены знаком \*. При первом чтении их можно пропустить.

с точки зрения их общефизического интереса, а также исходя из того, насколько хорошо они иллюстрируют общий метод функций Грина.

В заключение нам хотелось бы поблагодарить наших коллег, без участия которых эта книга не появилась бы: Д.А. Иванова, М.А. Скворцова, Д.Е. Фельдмана и В.П. Рубана, любезно предоставивших свои решения задач, которые впоследствии были переработаны и включены в книгу. Мы признательны также М.Ю. Рейзеру за ценные советы и указание на некоторые дефекты в ротاپринтном издании части I (МФТИ, 1997). Разумеется, вся ответственность за (неизбежные) ошибки, имеющиеся в настоящей книге, лежит на авторах. Мы будем крайне благодарны всем, кто пожелает указать на ошибки, опечатки, или просто обсудить какой-либо связанный с книгой вопрос. Связаться с авторами проще всего по электронной почте: [levitov@mit.edu](mailto:levitov@mit.edu), [shytov@itp.ac.ru](mailto:shytov@itp.ac.ru) (см. также <http://www.mit.edu/~levitov>).

## СПИСОК ОБОЗНАЧЕНИЙ

$E_F$  — энергия Ферми;

$p_0$  — фермиевский импульс;

$v_F$  — скорость Ферми;

$\xi_{\mathbf{p}} = v_F(|\mathbf{p}| - p_0)$  — спектр электронов, линеаризованный вблизи уровня Ферми;

$\nu_0 = \frac{mp_0}{2\pi^2\hbar^3}$  — плотность состояний трехмерного бесспинового ферми-газа;

$\nu_{2D} = \frac{m}{2\pi\hbar^2}$  — плотность состояний двухмерного бесспинового ферми-газа;

$\nu_{1D} = \frac{m}{\pi\hbar p_0}$  — плотность состояний одномерного бесспинового ферми-газа;

$\mu_B = \frac{e\hbar}{2mc}$  — магнетон Бора;

$c$  — скорость звука;

$\omega_D$  — дебаевская частота;

$k_D$  — дебаевский волновой вектор;

$g$  — константа электрон–фононного взаимодействия;

$\xi = g^2\nu_0$  — безразмерная константа электрон-фононного взаимодействия.

Постоянная Планка  $\hbar$  полагается равной 1.

# Часть I

## ТЕОРИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ

---

### Глава 1

#### КВАЗИЧАСТИЦЫ

##### 1.1. Вторичное квантование. Канонические преобразования

Системы, состоящие из большого числа тождественных частиц, удобно изучать, пользуясь *методом вторичного квантования*. Напомним основную идею этого метода, не уточняя пока вид частиц. (В задачах физики твердого тела это могут быть, скажем, электроны, фононы, фотоны, экситоны и т. д.)

Рассмотрим вначале систему бозе-частиц, каждая из которых может находиться в одном из состояний  $\psi_i(x)$ ,  $i = 1, 2, \dots$ . Многочастичная волновая функция задается в *представлении чисел заполнения*, указывающем сколько частиц занимают каждое из состояний  $\psi_i(x)$ . В обозначениях Дирака такие состояния могут быть записаны как  $|\dots, N_{i-1}, N_i, N_{i+1}, \dots\rangle$ , где числа заполнения  $N_i$  принимают произвольные целые неотрицательные значения,  $N_i = 0, 1, \dots$ . Канонические операторы рождения и уничтожения  $a_i^+$  и  $a_i$  вводятся следующим образом:

$$\begin{aligned} a_i |\dots, N_i, N_{i+1}, \dots\rangle &= \sqrt{N_i} |\dots, N_{i-1}, N_{i+1}, \dots\rangle; \\ a_i^+ |\dots, N_i, N_{i+1}, \dots\rangle &= \sqrt{N_i + 1} |\dots, N_{i+1}, N_{i+1}, \dots\rangle. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Нетрудно проверить, что выполняются коммутационные соотношения:

$$\begin{aligned} [a_i, a_j^+] &= a_i a_j^+ - a_j^+ a_i = \delta_{ij}; \\ [a_i, a_j] &= [a_i^+, a_j^+] = 0. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Далее, вводятся  *$\psi$ -операторы*:

$$\hat{\psi}(x) = \sum_i \hat{a}_i \psi_i(x); \quad \hat{\psi}^+(x) = \sum_i \hat{a}_i^+ \psi_i^*(x). \quad (1.3)$$

Функции  $\psi_i(x)$  выбирают таким образом, чтобы они образовывали полную ортонормированную систему. При этом коммутационные

соотношения  $\psi$ -операторов оказываются следующими:

$$\begin{aligned} [\hat{\psi}(x), \hat{\psi}^+(x')] &= \delta(x - x'), \\ [\hat{\psi}(x), \hat{\psi}(x')] &= [\hat{\psi}^+(x), \hat{\psi}^+(x')] = 0. \end{aligned} \quad (1.4)$$

В случае ферми-статистики представление чисел заполнения, а также операторы рождения и уничтожения, их коммутационные соотношения и  $\psi$ -операторы вводятся сходным образом. Остановимся на отличиях бозевского и фермиевского вторичного квантования. Во-первых, в силу принципа Паули, числа заполнения  $N_i$  принимают всего два значения:  $N_i = 0, 1$ . Поэтому канонические операторы  $a_i$  и  $a_i^+$  действуют так:

$$\begin{aligned} a_i |\dots, N_i, N_{i+1}, \dots\rangle &= \begin{cases} |\dots, 0, N_{i+1}, \dots\rangle & \text{при } N_i = 1, \\ 0 & \text{при } N_i = 0; \end{cases} \\ a_i^+ |\dots, N_i, N_{i+1}, \dots\rangle &= \begin{cases} 0 & \text{при } N_i = 1, \\ |\dots, 1, N_{i+1}, \dots\rangle & \text{при } N_i = 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (1.5)$$

Во-вторых, антисимметрия многочастичного состояния по отношению к перестановке частиц приводит к антикоммутативности  $a_i$  и  $a_j^+$ :

$$\begin{aligned} [a_i^+, a_j]_+ &= a_i^+ a_j + a_j a_i^+ = \delta_{ij}, \\ [a_i, a_j]_+ &= [a_i^+, a_j^+]_+ = 0. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Для  $\psi$ -операторов (1.3) соотношения антикоммутативности выглядят так:

$$\begin{aligned} [\hat{\psi}(x), \hat{\psi}^+(x')]_+ &= \delta(x - x'), \\ [\hat{\psi}(x), \hat{\psi}(x')]_+ &= [\hat{\psi}^+(x), \hat{\psi}^+(x')]_+ = 0. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Удобство представления вторичного квантования заключается в том, что связь между одно- и многочастичной задачами на языке  $\psi$ -операторов оказывается весьма простой. Например, нетрудно проверить, что гамильтониан системы невзаимодействующих бозе- или ферми-частиц, имеющих массу  $m$  и движущихся в потенциале  $U(\mathbf{r})$ , записывается так:

$$\hat{\mathcal{H}} = \int \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \hat{\psi}^+(\mathbf{r}) \nabla^2 \hat{\psi}(\mathbf{r}) + \hat{\psi}^+(\mathbf{r}) \hat{\psi}(\mathbf{r}) U(\mathbf{r}) \right) d^3 r. \quad (1.8)$$

А если частицы взаимодействуют по закону  $V(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$ , то гамильтониан нужно просто дополнить членом

$$\hat{\mathcal{H}}_{\text{int}} = \frac{1}{2} \iint \hat{\psi}^+(\mathbf{r}_1) \hat{\psi}^+(\mathbf{r}_2) V(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \hat{\psi}(\mathbf{r}_2) \hat{\psi}(\mathbf{r}_1) d^3 r_1 d^3 r_2. \quad (1.9)$$

Вторично квантованный оператор плотности  $\hat{\rho}(\mathbf{r}) = \hat{\psi}^+(\mathbf{r}) \hat{\psi}(\mathbf{r})$  является многочастичным эквивалентом одночастичного выражения

$|\psi(\mathbf{r})|^2$  для плотности вероятности. Интеграл от  $\hat{\rho}(\mathbf{r})$ , взятый по всему пространству, есть оператор полного числа частиц в системе

$$\hat{N} = \int \hat{\psi}^+(\mathbf{r}) \hat{\psi}(\mathbf{r}) d^3r. \quad (1.10)$$

Подчеркнем, что все операторы (1.8)–(1.10) в представлении вторичного квантования имеют один и тот же вид и для фермионов, и для бозонов.

Остановимся теперь на важном понятии канонического преобразования и на том, как эти преобразования выглядят в представлении вторичного квантования. Напомним, что в классической механике канонические преобразования фазового пространства  $(p, q) \rightarrow (p', q')$  вводятся с помощью скобок Пуассона  $\{\dots\}$ , причем роль этих преобразований заключается в том, что они сохраняют гамильтонову форму уравнений движения:  $\dot{p} = \{p, H\}$ ,  $\dot{q} = \{q, H\}$ .

В квантовой механике роль скобок Пуассона переходит к коммутаторам. (Например, в представлении Гейзенберга уравнения движения имеют вид  $i\hbar \partial_t \hat{A} = [\hat{A}, \hat{\mathcal{H}}]$ .) Поэтому каноническими называют преобразования физических величин, сохраняющие коммутационные соотношения операторов. Как и в классической механике, канонические преобразования важны, поскольку они сохраняют форму уравнений движения.

Подобрав каноническое преобразование, часто возможно перейти от взаимодействующих частиц к не взаимодействующим *квазичастицам*. Наиболее часто рассматривают линейные преобразования канонических операторов (бозонов или фермионов)

$$\tilde{a}_i = \sum_j (U_{ij} a_j + V_{ij} a_j^+), \quad \tilde{a}_i^+ = \sum_j (V_{ij}^* a_j + U_{ij}^* a_j^+), \quad (1.11)$$

называемые *преобразованиями Боголюбова*. Одной из часто встречающихся задач является отыскание спектра и собственных состояний гамильтониана, квадратичного по операторам рождения и уничтожения. Нетрудно проверить, что произвольный гамильтониан такого вида может быть приведен к диагональной форме с помощью соответствующим образом подобранного преобразования (1.11):

$$\hat{\mathcal{H}} = \sum_{ij} h_{ij}^{(1)} a_i^+ a_j + h_{ij}^{(2)} a_i a_j + \text{h.c.} = \sum_i \varepsilon_i \tilde{a}_i^+ \tilde{a}_i + \langle 0 | \hat{\mathcal{H}} | 0 \rangle. \quad (1.12)$$

Энергии  $\varepsilon_i$  дают спектр квазичастиц, а константа  $\langle 0 | \hat{\mathcal{H}} | 0 \rangle$  в правой части представляет собой так называемую энергию нулевых колебаний.

Преобразования (1.11) являются каноническими, если они сохраняют коммутационные соотношения:

$$[a_i, a_j]_{\pm} = 0, \quad [a_i, a_j^+]_{\pm} = \delta_{ij}. \quad (1.13)$$

Соответствующие условия на матрицы  $U$  и  $V$  в (1.11) в общем случае выглядят так:

$$U_{ki}V_{kj} \pm V_{ki}U_{kj} = 0, \quad U_{ki}^*U_{kj} \pm V_{ki}^*V_{kj} = \delta_{ij}, \quad (1.14)$$

где знак «+» соответствует случаю ферми-статистики, а знак «-» — случаю бозе-статистики.

Структура преобразований (1.11) для бозе-операторов видна уже в простейшем случае одной бозонной степени свободы (примером является квантовомеханический осциллятор). При этом  $U$  и  $V$  — не матрицы, а числа, и имеется всего два простейших однородных канонических преобразования:

$$\begin{aligned} \tilde{a} &= \operatorname{ch} \lambda a + \operatorname{sh} \lambda a^+, & \tilde{a} &= e^{i\varphi} \tilde{a}, \\ \tilde{a}^+ &= \operatorname{sh} \lambda a + \operatorname{ch} \lambda a^+, & \tilde{a}^+ &= e^{-i\varphi} \tilde{a}^+, \end{aligned} \quad (1.15)$$

где  $\lambda$  и  $\varphi$  — вещественные параметры. Более общие преобразования представляют собой произведение (композицию) преобразований (1.15).

В случае же ферми-статистики линейные канонические преобразования задаются сходным образом. Для одной фермионной степени свободы все линейные канонические преобразования исчерпываются сопряжением,  $\tilde{a} = a^+$ ,  $\tilde{a}^+ = a$ , и умножением на фазовый множитель,  $\tilde{a} = e^{i\varphi} a^+$ ,  $\tilde{a}^+ = e^{-i\varphi} a$ , а преобразования более общего вида в этом случае оказываются нелинейными — см. задачу 3. Более общие линейные преобразования возникают в системе из двух фермионов, например,

$$\begin{aligned} \tilde{a} &= \cos \theta a - \sin \theta b^+, & \tilde{a}^+ &= \cos \theta a^+ - \sin \theta b, \\ \tilde{b}^+ &= \sin \theta a + \cos \theta b^+, & \tilde{b} &= \sin \theta a^+ + \cos \theta b, \end{aligned} \quad (1.16)$$

где  $\theta$  — параметр. Интересно, что первое из бозонных преобразований (1.15) есть псевдоевклидово вращение, т. е. не что иное, как преобразование Лоренца с быстротой  $\lambda$  в двумерном пространстве-времени, в то время как для фермионов возникают преобразования вида (1.16), соответствующие вращению евклидова пространства.

Возможные канонические преобразования не исчерпываются однородными линейными преобразованиями. Иногда бывают полезны неоднородные линейные преобразования (как в задаче 6) или даже нелинейные преобразования (см. задачу 3, а также разд. 1.4).

Часто встречающаяся разновидность линейных канонических преобразований — фурье-преобразование  $\psi$ -операторов:

$$\hat{\psi}(\mathbf{r}) = \int e^{i\mathbf{p}\mathbf{r}} \hat{a}_{\mathbf{p}} \frac{d^3 p}{(2\pi)^3}, \quad \hat{\psi}^+(\mathbf{r}) = \int e^{-i\mathbf{p}\mathbf{r}} \hat{a}_{\mathbf{p}}^+ \frac{d^3 p}{(2\pi)^3}. \quad (1.17)$$

Принято выбирать нормировку операторов  $\hat{a}_{\mathbf{p}}$  и  $\hat{a}_{\mathbf{p}}^+$  так, чтобы

$$[\hat{a}_{\mathbf{p}_1}, \hat{a}_{\mathbf{p}_2}^+]_{\pm} = (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2). \quad (1.18)$$

Такой выбор согласуется с определениями (1.4) и (1.7).

Имеется важный для теории твердого тела круг задач, когда  $\psi$ -операторы или другие величины заданы на решетке. Фурье-преобразование (1.17) нетрудно распространить на этот случай, заметив, что если  $\mathbf{r}$  пробегает узлы некоторой решетки, то  $\mathbf{r}$  изменяется внутри периода обратной решетки (или, иначе говоря, внутри зоны Бриллюэна). Скажем, в одном измерении решетка есть  $r_n = an$ , а зона Бриллюэна — это отрезок  $-\pi/a < p < \pi/a$ . Такое преобразование используется в задачах 1, 2 и 4.

*Литература:* Подробное изложение метода вторичного квантования можно найти в [3], гл. VI, а также в [2], § 64, 65 и [1], § 3. Понятие квазичастиц обсуждается в [1], гл. 1 и [6], гл. 1. Канонические преобразования Боголюбова для бозе-частиц рассматриваются в [1], § 4 и [6], § 25, а для ферми-частиц — в [6], § 39.

## 1.2. Задачи 1–4

**Задача 1.** (*Классическая цепочка осцилляторов*<sup>1)</sup>.) Рассмотрим цепочку атомов массы  $m_i$ , соединенных одинаковыми пружинками жесткости  $K$ :

$$\mathcal{H} = \sum_{i=-\infty}^{\infty} [p_i^2/(2m_i) + (K/2)(x_i - x_{i+1})^2], \quad (1.19)$$

где  $m_i = m$ , если  $i$  — четно, и  $m_i = M$ , если  $i$  — нечетно. Определите нормальные моды для этой системы. Покажите, что их две: акустическая и оптическая.

Чему равна скорость звука  $c$ ? Получится ли такой же ответ, если вычислять  $c$  по формуле Лапласа  $c = \sqrt{\partial P / \partial \rho}$ , где  $P$  — давление, а  $\rho$  — плотность?

Чему равна ширина щели между оптической и акустической ветвями? Покажите, что при  $M \gg m$  дисперсия оптической моды практически отсутствует. Как можно объяснить это качественно?

**Задача 2.** (*Фермионная цепочка.*) Найдите преобразование Боголюбова, диагонализующее фермионный гамильтониан ( $J_{1,2}$  и  $B$  — некоторые константы)

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{H}} = \sum_{i=-\infty}^{\infty} & \left( J_1 a_i^+ a_{i+1} + \right. \\ & \left. + J_1 a_{i+1}^+ a_i + J_2 a_i a_{i+1} + J_2 a_{i+1}^+ a_i^+ - 2B a_i^+ a_i \right). \end{aligned} \quad (1.20)$$

Такой гамильтониан возникает при рассмотрении одномерной модели квантового магнетика, так называемой «XY-модели» (см. разд. 1.4).

Определите спектр квазичастиц  $\varepsilon(k)$  гамильтониана (1.20). Обратите внимание, что при  $B = 0$  и  $J_1 = J_2$  дисперсия пропадает. Можно ли понять это без вычислений?

<sup>1)</sup> С рассмотрения этой простейшей модели колебаний решетки начинаются почти все курсы физики твердого тела.

**Задача 3.** (*Нелинейные канонические преобразования.*) Рассмотрим фермиевские операторы  $a$  и  $a^+$ , действующие в пространстве состояний фермиона, который может заполнять или не заполнять ровно одно состояние. В этом случае пространство многочастичных состояний двумерно и каноническим базисом в нем служат состояния  $|0\rangle$  и  $|1\rangle$ .

Найдите все канонические преобразования операторов  $a$  и  $a^+$ , сохраняющие соотношения  $a^2 = (a^+)^2 = 0$  и  $a^+a + aa^+ = 1$ . Убедитесь в том, что канонические преобразования наиболее общего вида не описываются линейными соотношениями вида (1.11).

Рассмотрите представление фермиевских операторов спинными матрицами Паули:

$$\sigma_x = a + a^+, \quad \sigma_y = i(a - a^+), \quad \sigma_z = 2a^+a - 1. \quad (1.21)$$

Покажите, что канонические преобразования  $a$  и  $a^+$  соответствуют вращениям в спиновом пространстве.

Связь между фермиевскими операторами и операторами спина  $1/2$  более подробно рассмотрена в разделе 1.4.

**Задача 4.** (*Квантовая цепочка осцилляторов.*) Пусть теперь гамильтониан (1.19) определяет квантовую задачу, т. е.  $p_i = -i\hbar\partial/\partial x_i$ . Перейдите к бозонным операторам рождения и уничтожения:

$$\hat{x}_i = \sqrt{\frac{\hbar}{m_i\omega_i}} \frac{a_i + a_i^+}{\sqrt{2}}, \quad \hat{p}_i = \sqrt{\hbar m_i\omega_i} \frac{a_i - a_i^+}{i\sqrt{2}}. \quad (1.22)$$

Для случая  $M = m$  найдите каноническое преобразование, приводящее гамильтониан к диагональному виду. Определите спектр фононов и вычислите энергию нулевых колебаний.

### 1.3. Решения задач 1–4

1. Гамильтониан (1.19) приводит к уравнениям движения:

$$m\ddot{x}_i = K(y_i + y_{i-1} - 2x_i), \quad M\ddot{y}_i = K(x_i + x_{i+1} - 2y_i) \quad (1.23)$$

( $x_i$  — смещение атома массы  $m$  в  $i$ -й элементарной ячейке,  $y_i$  — смещение атома массы  $M$ ). Будем искать решение в виде плоских волн:

$$x_n = e^{i(qn - \omega t)} x_q, \quad y_n = e^{i[q(n+1/2) - \omega t]} y_q. \quad (1.24)$$

Отсюда

$$\begin{aligned} m\omega^2 x_q &= 2Kx_q - 2K \cos \frac{q}{2} y_q, \\ M\omega^2 y_q &= 2Ky_q - 2K \cos \frac{q}{2} x_q. \end{aligned} \quad (1.25)$$

Здесь  $q$  — волновой вектор в первой зоне Бриллюэна:  $-\pi < q < \pi$ .

Нормальные моды имеют закон дисперсии, определяемый из условия

$$\det \begin{pmatrix} 2K - m\omega^2 & -2K \cos(q/2) \\ -2K \cos(q/2) & 2K - M\omega^2 \end{pmatrix} = 0, \quad (1.26)$$

что дает  $\omega^4 - (2K/\mu)\omega^2 + (4K^2/mM) \sin^2 \frac{q}{2} = 0$ , где  $\mu = \frac{Mm}{M+m}$ . Получаем

$$\omega_{\pm}^2(q) = \frac{K}{\mu} \left( 1 \pm \sqrt{1 - \frac{4\mu^2}{mM} \sin^2 \frac{q}{2}} \right). \quad (1.27)$$

Здесь «+» соответствует оптической, а «−» — акустической моде. Дисперсия нормальных мод (1.27) показана на рис. 1.1. При малых  $q$  разлагаем закон дисперсии акустической моды:

$$\omega_{-}^2(q) = \frac{2K\mu}{mM} \left( \frac{q}{2} \right)^2, \quad (1.28)$$

и получаем скорость звука:

$$c = \left. \frac{\omega_{-}}{q} \right|_{q \rightarrow 0} = \frac{1}{2} \left( \frac{2K}{M+m} \right)^{1/2}. \quad (1.29)$$

При выводе предполагалось, что период решетки  $2a$  равен единице. Чтобы получить выражение, имеющее размерность скорости, надо умножить результат на  $2a$ , где  $a$  — расстояние между атомами  $M$  и  $m$ . При этом получается скорость

$$c = a \sqrt{2K/(M+m)}.$$

Проверим, что найденная скорость звука согласуется с формулой Лапласа  $c^2 = \partial P / \partial \rho$ , связывающей скорость звука и сжимаемость системы. Для цепочки длины  $x$ , содержащей  $N$  атомов каждого типа, сила пропорциональна удлинению,  $dP = -(K/2N)dx$  (в одном измерении сила и давление — это одно и то же), а изменение плотности есть

$$d\rho = \frac{d}{dx} \left( \frac{(M+m)N}{x} \right) dx = -\frac{(M+m)N}{x_0^2} dx, \quad (1.30)$$

где  $x_0 = 2Na$ . Отсюда получаем  $c^2 = 2Ka^2/(M+m)$ , как и следовало.

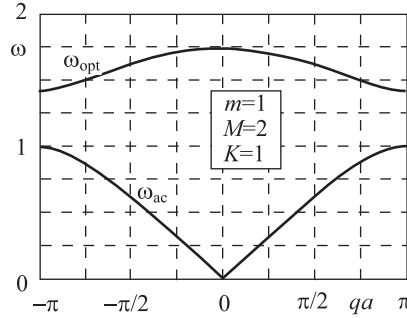


Рис. 1.1

Верхний край акустической ветви спектра:

$$\max[\omega_-^2(q)] = \omega_-^2(\pi) = \frac{2K}{M}. \quad (1.31)$$

Аналогично, нижний край оптической ветви есть

$$\min[\omega_+^2(q)] = \omega_+^2(\pi) = \frac{2K}{m}, \quad (1.32)$$

и поэтому ширина щели  $\Delta\omega = \sqrt{2K/m} - \sqrt{2K/M}$ .

При  $M \gg m$  частота оптической ветви

$$\omega_+(q) = \sqrt{\frac{2K}{m}} \left( 1 + \frac{m}{2M} \cos^2 \frac{q}{2} + O\left(\frac{m^2}{M^2}\right) \right) \quad (1.33)$$

практически не зависит от  $q$ , что соответствует колебаниям легких атомов между почти неподвижными тяжелыми. Физическая причина отсутствия дисперсии — взаимная независимость колебаний соседних атомов массы  $m$ .

При  $M \gg m$  неважно, колеблются ли соседние легкие атомы в фазе или же в противофазе, поскольку через тяжелые стенки (т.е. атомы массы  $M$ ) влияние не передается.

**2. (Первое решение.)** Сделаем преобразование Фурье

$$a_m = \int_{-\pi}^{\pi} e^{ikm} a_k \frac{dk}{2\pi}.$$

При этом члены гамильтониана преобразуются к такому виду:

$$\sum_m a_m^+ a_{m+1} = \sum_k a_k^+ a_k e^{ik}, \quad (1.34)$$

$$\sum_m a_m a_{m+1} = \sum_k a_k a_{-k} e^{-ik}, \quad (1.35)$$

$$\sum_m a_m^+ a_{m+1} + a_{m+1}^+ a_m = \sum_k 2 \cos k \cdot a_k^+ a_k, \quad (1.36)$$

где сумма по  $k$  есть сокращенное обозначение для  $\int_{-\pi}^{\pi} \dots dk/2\pi$ . Пользуясь антикоммутативностью  $a_k$  и  $a_{-k}$ , перепишем вторую сумму так:

$$\sum_m a_m a_{m+1} = -i \sum_k \sin k \cdot a_k a_{-k}, \quad (1.37)$$

после чего гамильтониан принимает вид

$$\hat{\mathcal{H}} = \sum_k \left( 2(J_1 \cos k - B) a_k^+ a_k - iJ_2 \sin k \cdot a_k a_{-k} + iJ_2 \sin k \cdot a_{-k}^+ a_k^+ \right). \quad (1.38)$$

После «поворота»  $a_k = e^{i\pi/4}b_k$ ,  $a_k^+ = e^{-i\pi/4}b_k^+$  гамильтониан становится вещественным:

$$\hat{\mathcal{H}} = \sum_k \left( (J_1 \cos k - B) b_k^+ b_k + J_2 \sin k \cdot b_k b_{-k} + \text{h.c.} \right). \quad (1.39)$$

Будем искать фермионное преобразование Боголюбова в виде

$$\begin{aligned} b_k &= u_k c_k + v_k c_{-k}^+, & b_k^+ &= u_k c_k^+ + v_k c_{-k}, \\ b_{-k}^+ &= -v_k c_k + u_k c_{-k}^+, & b_{-k} &= -v_k c_k^+ + u_k c_{-k} \end{aligned} \quad (1.40)$$

с вещественными  $u_k$  и  $v_k$ , причем  $u_k^2 + v_k^2 = 1$ . Получаем

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{H}} &= \sum_k (J_1 \cos k - B) \left( u_k^2 c_k^+ c_k + u_k v_k (c_k^+ c_{-k}^+ + c_{-k} c_k) + v_k^2 c_{-k} c_{-k}^+ \right) + \\ &+ J_2 \sin k \left( u_k^2 c_k c_{-k} + u_k v_k (c_{-k}^+ c_{-k} - c_k c_k^+) - v_k^2 c_{-k}^+ c_k^+ \right) + \text{h.c.} \end{aligned} \quad (1.41)$$

Приравняем коэффициент при  $c_{-k} c_k$  нулю, потребовав чтобы

$$2u_k v_k (J_1 \cos k - B) + (-u_k^2 + v_k^2) J_2 \sin k = 0. \quad (1.42)$$

Тогда будем иметь следующее:

$$\frac{v_k}{u_k} = \frac{B - J_1 \cos k \pm \sqrt{(J_1 \cos k - B)^2 + J_2^2 \sin^2 k}}{J_2 \sin k}. \quad (1.43)$$

Решив это уравнение при условии  $u_k^2 + v_k^2 = 1$ , найдем значения  $u_k$ ,  $v_k$  и подставим их в гамильтониан:

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{H}} &= \text{const} + \sum_k [2(J_1 \cos k - B)(u_k^2 - v_k^2) + 4J_2 u_k v_k \sin k] c_k^+ c_k = \\ &= \text{const} + \sum_k \varepsilon_k c_k^+ c_k. \end{aligned} \quad (1.44)$$

Спектр возбуждений, таким образом, есть

$$\varepsilon_k = 2\sqrt{(J_1 \cos k - B)^2 + J_2^2 \sin^2 k}. \quad (1.45)$$

Отсутствие дисперсии при  $J_1 = J_2$  и  $B = 0$  означает, что возбуждения локализованы на одном или нескольких соседних узлах. Это можно понять с точки зрения преобразования Йордана–Вигнера (см. разд. 1.4), которое в данном случае приводит к изинговской спиновой цепочке:

$$\hat{\mathcal{H}} = \sum_{i=-\infty}^{\infty} J_y \sigma_i^y \sigma_{i+1}^y. \quad (1.46)$$

В такой цепочке каждый спин характеризуется определенной проекцией на ось  $y$ . Поэтому элементарное возбуждение в этой системе — просто переворот спина на любом из узлов, никак не затрагивающий остальные узлы.

Таким образом, полная локализация возбуждения на одном узле эквивалентна отсутствию дисперсии. Обратим внимание на аналогию с задачей 1 в случае  $M \gg t$ , когда оптическая мода колебаний становится почти бездисперсионной из-за того, что колебания соседних легких атомов почти полностью развязаны.

**2. (Второе решение.)** Приведенное выше решение иллюстрирует стандартный подход к преобразованию Боголюбова. Дадим другое решение, в котором физический смысл вычислений яснее, и сами они — элегантнее. Вернемся к гамильтониану (1.38) и рассмотрим его коммутатор с фермиевскими операторами:  $[\hat{\mathcal{H}}, a_k]$ . Пользуясь соотношениями

$$[a^+ a, a] = a^+ a a - a a^+ a = -a, \quad [a a^+, a^+] = -a^+, \quad (1.47)$$

вычислим коммутатор

$$[\hat{\mathcal{H}}, a_k] = -2(J_1 \cos k - B)a_k + 2J_2 i a_{-k}^+ \sin k. \quad (1.48)$$

(Напомним, что физический смысл коммутатора некоторой величины с гамильтонианом — скорость изменения этой величины:  $i\hbar \dot{A} = [A, \mathcal{H}]$ .) Теперь рассмотрим каноническое преобразование:

$$a_k = u_k b_k + v_k b_{-k}^+, \quad a_{-k}^+ = u_k^* b_{-k}^+ - v_k^* b_k, \quad (1.49)$$

и предположим, что параметры  $u_k$  и  $v_k$  выбраны так, что гамильтониан принял диагональную форму

$$\hat{\mathcal{H}} = E_0 + \sum_k \varepsilon_k b_k^+ b_k. \quad (1.50)$$

Возьмем коммутаторы

$$[\hat{\mathcal{H}}, b_k] = -\varepsilon_k b_k, \quad [\hat{\mathcal{H}}, b_k^+] = \varepsilon_k b_k^+, \quad (1.51)$$

и с их помощью перепишем коммутатор (1.48):

$$\begin{aligned} -u_k \varepsilon_k b_k + v_k \varepsilon_k b_{-k}^+ &= -2(J_1 \cos k - B)(u_k b_k + v_k b_{-k}^+) + \\ &\quad + 2J_2 i \sin k (u_k^* b_{-k}^+ - v_k^* b_k), \end{aligned} \quad (1.52)$$

откуда получаем два уравнения для  $\varepsilon_k$ ,  $u_k$  и  $v_k$ :

$$u_k \varepsilon_k = 2(J_1 \cos k - B) u_k + 2J_2 i \sin k \cdot v_k^*, \quad (1.53)$$

$$v_k \varepsilon_k = -2(J_1 \cos k - B) v_k + 2J_2 i \sin k \cdot u_k^*. \quad (1.54)$$

Так как уравнения однородны по  $u_k$  и  $v_k$ , выразим  $v_k$  через  $u_k$  из (1.54):

$$v_k = \frac{2J_2 i \sin k \cdot u_k^*}{\varepsilon_k + 2(J_1 \cos k - B)}, \quad (1.55)$$

и затем исключим  $v_k$  из (1.53):

$$\varepsilon_k^2 - 4(J_1 \cos k)^2 = 4J_2^2 \sin^2 k, \quad (1.56)$$

откуда находим закон дисперсии

$$\varepsilon_k = 2\sqrt{(J_1 \cos k - B)^2 + J_2^2 \sin^2 k}. \quad (1.57)$$

(Знак перед корнем выбираем, согласно тому, что энергия возбуждений над основным состоянием всегда положительна.) Параметры преобразования нетрудно найти из (1.55) и условия нормировки  $|u_k|^2 + |v_k|^2 = 1$ .

3. Будем искать каноническое преобразование в таком виде:

$$a' = u a + v a^+ + w a^+ a + q, \quad (1.58)$$

$$a'^+ = u^* a^+ + v^* a + w^* a^+ a + q^*. \quad (1.59)$$

Это наиболее общая форма, к которой может быть приведено любое полиномиальное по  $a$  и  $a^+$  выражение. Убедиться в этом можно следующим образом. Во-первых, с помощью коммутационных соотношений любое выражение может быть приведено к нормальной форме, в которой в каждом слагаемом оператор  $a^+$  (если он есть) стоит слева от  $a$ . Во-вторых, поскольку  $a^2 = (a^+)^2 = 0$ , выражение (1.58) представляет собой нормальную форму наиболее общего вида.

Рассмотрим выражение  $a'^2$ . Приведем квадрат правой части выражения (1.58) для  $a'$  к нормальной форме и потребуем, чтобы все коэффициенты обратились в нуль. Это дает два условия:

$$w + 2q = 0, \quad uv + q^2 = 0. \quad (1.60)$$

Аналогично, условие  $a' a'^+ + a'^+ a' = 1$  приводит к соотношению

$$|u|^2 + |v|^2 + 2|q|^2 = 1. \quad (1.61)$$

Из полученных соотношений следует, что

$$|u| + |v| = 1. \quad (1.62)$$

Таким образом, наиболее общее каноническое преобразование задается двумя комплексными параметрами  $u$  и  $v$ , удовлетворяющими условию (1.62). Коэффициенты  $q$  и  $w$  определяются таким образом:  $q = \pm i\sqrt{uv}$ ,  $w = -2q$ .

Нетрудно видеть, что в общем случае каноническое преобразование нелинейное, поскольку коэффициент  $w$  не обращается в нуль. Более того, линейными оказываются лишь тривиальные преобразования (с  $u$  или  $v$  равным нулю).

Решим теперь задачу другим способом, воспользовавшись представлением (1.21) фермиевских операторов через матрицы Паули. Обратим соотношения (1.21):

$$a = (\sigma_x - i\sigma_y)/2, \quad a^+ = (\sigma_x + i\sigma_y)/2. \quad (1.63)$$

Нетрудно проверить, что условия  $a^2 = (a^+)^2 = 0$ ,  $a^+ a + a a^+ = 1$  эквивалентны соотношениям антикоммутативности для  $\sigma_i$ :

$$[\sigma_i, \sigma_j]_+ = 2\delta_{ij}. \quad (1.64)$$

Преобразования, сохраняющие соотношения (1.64), можно записать в виде

$$\sigma'_i = R_{ij} \sigma_j, \quad (1.65)$$

где  $R_{ij}$  — вещественная ортогональная матрица  $3 \times 3$ . Поэтому канонические преобразования в данном случае образуют группу  $SO(3)$ .

4. (*Первое решение.*) Выразим  $\hat{\mathcal{H}}$  через  $a_i$  и  $a_i^+$  по формулам (1.22), не определяя пока частоту  $\omega_0$ :

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{H}} &= \sum \left( \frac{p_i^2}{2m} + \frac{K}{2} (x_i - x_{i+1})^2 \right) = \\ &= - \sum \left[ \frac{\hbar\omega_0}{4} (a_i - a_i^+)^2 + \frac{K\hbar}{4m\omega_0} (a_i + a_i^+ - a_{i+1} - a_{i+1}^+)^2 \right] = \\ &= \sum \left[ \frac{\hbar\omega_0}{4} (a_i^+ a_i - a_i^2) + \frac{\hbar K}{4m\omega_0} ((a_i - a_{i+1})(a_i^+ - a_{i+1}^+) + \right. \\ &\quad \left. + (a_i - a_{i+1})^2) + \text{h.c.} \right] \quad (1.66) \end{aligned}$$

(с точностью до константы, возникающей из-за коммутационных соотношений бозе-операторов). Выполним преобразование Фурье:

$$a_m = \int_{-\pi}^{\pi} a_k e^{ikm} \frac{dk}{2\pi} = \sum_k a_k e^{ikm}, \quad a_k = \sum_m a_m e^{-ikm}. \quad (1.67)$$

При этом

$$a_i - a_{i+1} \rightarrow (1 - e^{ik})a_k, \quad a_i^+ - a_{i+1}^+ \rightarrow (1 - e^{-ik})a_k^+. \quad (1.68)$$

Подставляя эти выражения в (1.66), получаем

$$\hat{\mathcal{H}} = \sum_k \left( p(k) a_k^+ a_k + q(k) a_k a_{-k} + \text{h.c.} \right), \quad (1.69)$$

где

$$p(k) = \frac{\hbar\omega_0}{4} + \frac{\hbar K}{2m\omega_0} (1 - \cos k), \quad q(k) = \frac{\hbar K}{2m\omega_0} (1 - \cos k) - \frac{\hbar\omega_0}{4}. \quad (1.70)$$

Рассмотрим каноническое преобразование:

$$a_k = u_k b_k + v_k b_{-k}^+, \quad a_{-k}^+ = v_k b_k + u_k b_{-k}^+, \quad (1.71)$$

где  $u_k = \text{ch } \lambda_k$ ,  $v_k = \text{sh } \lambda_k$ . Нетрудно проверить, что при преобразовании (1.71) гамильтониан сохраняет свой вид, причем  $p(k)$  и  $q(k)$

меняются так:

$$\begin{aligned} p'(k) &= \operatorname{ch} 2\lambda_k \cdot p(k) + \operatorname{sh} 2\lambda_k \cdot q(k), \\ q'(k) &= \operatorname{sh} 2\lambda_k \cdot p(k) + \operatorname{ch} 2\lambda_k \cdot q(k). \end{aligned} \quad (1.72)$$

Подберем  $\lambda_k$  так, чтобы  $q'(k)$  обратилось в нуль:

$$\operatorname{th} 2\lambda_k = -q(k)/p(k). \quad (1.73)$$

При этом  $p'(k) = \sqrt{p^2(k) - q^2(k)} = \hbar \sqrt{K/m} \sin |k/2|$ . Обратим внимание на то, что частота  $\omega_0$ , значение которой может быть произвольным, выпадает из выражения для  $p'(k)$  (но не из выражения для  $\lambda_k$ !).

Диагонализированный гамильтониан имеет вид

$$\hat{\mathcal{H}} = \sum_k (p'(k) b_k^+ b_k + \text{h.c.}) = \sum_k \omega(k) \left( b_k^+ b_k + \frac{1}{2} \right), \quad (1.74)$$

где  $\omega(k) = 2p'(k) = 2\hbar \sqrt{K/m} \sin |k/2|$ .

Выражение (1.74) позволяет найти энергию нулевых колебаний, приходящуюся на одну частицу:

$$E_0 = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\hbar \omega(k)}{2} \frac{dk}{2\pi} = \frac{2}{\pi} \hbar \sqrt{K/m}. \quad (1.75)$$

**4. (Второе решение.)** Чтобы получить каноническое преобразование, достаточно проверить сохранение коммутационных соотношений для любой полной системы операторов. В этой задаче наиболее естественный выбор — координаты и импульсы частиц.

Сделаем преобразование Фурье

$$\hat{x}_m = \int_{-\pi}^{\pi} \hat{x}_q e^{imq} \frac{dq}{2\pi}, \quad \hat{p}_m = \int_{-\pi}^{\pi} \hat{p}_q e^{imq} \frac{dq}{2\pi}, \quad (1.76)$$

и проверим, что коммутационные соотношения не нарушаются:

$$[\hat{x}_q, \hat{p}_{q'}] = 2\pi i \hbar \delta(q + q'). \quad (1.77)$$

Переписывая гамильтониан, имеем

$$\hat{\mathcal{H}} = \int_{-\pi}^{\pi} \left[ \frac{1}{2m} \hat{p}_q \hat{p}_{-q} + \frac{K}{2} (2 - 2 \cos q) \hat{x}_q \hat{x}_{-q} \right] \frac{dq}{2\pi}, \quad (1.78)$$

т. е. каждой фурье-гармонике соответствует осциллятор с частотой

$$\omega(q) = \sqrt{(K/m)(2 - 2 \cos q)} = 2\sqrt{K/m} \sin |q/2|. \quad (1.79)$$

Положив

$$\hat{x}_q = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega(q)}} \frac{b_q + b_{-q}^+}{\sqrt{2}}, \quad \hat{p}_q = \sqrt{\hbar m \omega(q)} \frac{b_q - b_{-q}^+}{i\sqrt{2}}, \quad (1.80)$$

снова приходим к гамильтониану (1.74):

$$\hat{\mathcal{H}} = \int_{-\pi}^{\pi} \hbar \omega(q) \left( b_q^+ b_q + \frac{1}{2} \right) \frac{dq}{2\pi}. \quad (1.81)$$

и к выражению (1.75) для энергии нулевых колебаний, приходящейся на одну частицу.

Из хода решения очевидно, что и для неравных масс  $m \neq M$  спектр квантовой цепочки будет связан с частотами колебаний классической цепочки точно так же: каждой классической нормальной моде соответствует квантовый осциллятор.

## 1.4. От спиновых операторов — к фермиевским

Здесь мы рассмотрим одно интересное применение канонических преобразований из теории одномерных магнитных систем. Одномерный магнетик в простейшем случае представляет собой цепочку спинов  $1/2$ , в которой взаимодействуют только соседние спины. Как мы увидим, с помощью специального обобщения полученных в задаче 3 соотношений между фермионными операторами и матрицами Паули оказывается возможным перейти от одномерной спиновой цепочки к эквивалентной фермионной цепочке. Соответствующие правила перехода называются *преобразованиями Йордана–Вигнера*. Гамильтониан одномерного магнетика со спином  $1/2$  имеет вид

$$\hat{\mathcal{H}} = \sum_{i=-\infty}^{\infty} (J_x \sigma_i^x \sigma_{i+1}^x + J_y \sigma_i^y \sigma_{i+1}^y + J_z \sigma_i^z \sigma_{i+1}^z - B \sigma_i^z). \quad (1.82)$$

Здесь  $\sigma_i^\alpha$  — матрицы Паули;  $J_x, J_y, J_z$  — обменные константы;  $B$  — внешнее магнитное поле, приложенное вдоль оси  $z$ . В обычной изотропной модели Гейзенберга константы  $J_x, J_y$  и  $J_z$  одинаковы, но нам будет полезно рассмотреть более общий анизотропный случай.

Преобразование Йордана–Вигнера выражает спиновые операторы  $\sigma_i^\pm = (1/2)(\sigma_i^x \pm i\sigma_i^y)$  через операторы фермионов  $a_i^+, a_i$  по следующему правилу:

$$\sigma_i^z = 2a_i^+ a_i - 1, \quad \sigma_i^- = a_i \prod_{j<i} \sigma_j^z, \quad \sigma_i^+ = a_i^+ \prod_{j<i} \sigma_j^z, \quad (1.83)$$

т. е. каждый спин заменяется на фермион и «струну», идущую влево до бесконечности (струной принято называть фигурирующее в (1.83) бесконечное произведение). Цель введения струны состоит в том, чтобы перейти к операторам с фермиевским правилом коммутации. Для этого необходимо «подправить» коммутационные соотношения спиновых операторов на разных узлах. На одном узле, согласно задаче 3, коммутационные соотношения и так фермиевские ( $\sigma^+ \rightarrow a^+, \sigma^- \rightarrow a$ ). На разных же узлах спиновые операторы коммутируют, но после умножения на оператор струны  $\prod_{j<i} \sigma_j^z$  они становятся антикоммутирующими.

Нетрудно написать обратное преобразование, выражающее фермиевские операторы через спины:

$$a_i = \sigma_i^- \prod_{j<i} \sigma_j^z, \quad a_i^+ = \sigma_i^+ \prod_{j<i} \sigma_j^z. \quad (1.84)$$

Найдем как спиновый гамильтониан (1.82) выражается через йордан-вигнеровские фермионы. С помощью преобразования (1.83) гамильтониан (1.82) превращается в эквивалентный фермионный гамильтониан:

$$\hat{\mathcal{H}} = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \left[ (J_1 a_i^+ a_{i+1} + J_2 a_i a_{i+1} + \text{h.c.}) + J_z (2n_i - 1)(2n_{i+1} - 1) - B(2n_i - 1) \right], \quad (1.85)$$

где  $n_i = a_i^+ a_i$ ,  $J_1 = -J_x - J_y$ ,  $J_2 = J_x - J_y$ . Нетрудно видеть, что при  $J_z = 0$  гамильтониан (1.85) с точностью до константы совпадает с рассмотренным в задаче 2 гамильтонианом (1.20). Метод задачи 2 позволяет диагонализировать гамильтониан (1.82) при  $J_z = 0$ . С помощью канонического преобразования ферми-операторов гамильтониан (1.85) можно привести к виду

$$\hat{\mathcal{H}} = \int_{-\pi}^{\pi} \varepsilon(k) \tilde{a}_k^+ \tilde{a}_k \frac{dk}{2\pi}, \quad \varepsilon(k) = \pm 2\sqrt{(J_1 \cos k - B)^2 + J_2^2 \sin^2 k}. \quad (1.86)$$

Можно сделать вывод, что и в присутствии магнитного поля элементарные возбуждения в спиновой цепочке с  $J_z = 0$  подчиняются *ферми-статистике*. Оказывается, это верно и при произвольном  $J_z$ , хотя решить задачу в этом случае уже не так просто.

Появление ферми-статистики может показаться парадоксальным, поскольку магны (спиновые возбуждения в магнетиках) обычно являются бозонами. Однако здесь следует иметь в виду, что речь в данном случае идет о сильно взаимодействующей системе. В магнетике со спином на узле  $1/2$  между магнонами возникает большое эффективное отталкивание, поскольку никакие два магнона не могут одновременно оказаться на одном и том же узле. Именно это отталкивание и «моделирует» ферми-статистика. Таким образом, рассматриваемая система представляет пример того, как отталкивание между бозонами приводит к появлению квазичастиц, являющихся невзаимодействующими фермионами<sup>2)</sup>.

С помощью фермионного представления одномерного магнетика можно решить разнообразные задачи. Например, найдем как намагниченность системы и магнитная восприимчивость зависят от приложенного поля. Для простоты ограничимся симметричным случаем:

<sup>2)</sup> Оказывается, что низкая размерность системы усиливает эффекты взаимодействия и, как правило, способствует превращению различных типов статистики друг в друга. Как мы увидим в гл. 12, в одномерной системе взаимодействующих фермионов квазичастицы подчиняются бозе-статистике.

$J_x = J_y = -(1/2)J < 0$ ,  $J_z = 0$ . Эквивалентный фермионный гамильтониан в этом случае принимает вид

$$\widehat{\mathcal{H}} = \int_{-\pi}^{\pi} 2(J \cos k - B) a_k^+ a_k \frac{dk}{2\pi}, \quad (1.87)$$

причем  $J > 0$ . Магнитный момент направлен вдоль оси  $z$ . Намагниченность, приходящаяся на узел, есть

$$\mu = \langle \sigma_i^z \rangle \int_{-\pi}^{\pi} (2\langle a_k^+ a_k \rangle - 1) \frac{dk}{2\pi}. \quad (1.88)$$

С учетом (1.87) находим

$$\mu = \begin{cases} (2/\pi) \arcsin B/J & \text{при } |B| < J, \\ \text{sgn } B/J & \text{при } |B| > J. \end{cases} \quad (1.89)$$

При  $|B| = J$  происходит полное намагничивание системы. Нетрудно найти восприимчивость:

$$\chi = \frac{\partial \mu}{\partial B} = \begin{cases} (2/\pi)(J^2 - B^2)^{-1/2} & \text{при } |B| < J, \\ 0 & \text{при } |B| > J. \end{cases} \quad (1.90)$$

Знак восприимчивости парамагнитный.

## Глава 2

### ФУНКЦИЯ ГРИНА

#### 2.1. Представление взаимодействия. Хронологическое упорядочение

В теории возмущений гамильтониан записывают в виде  $\hat{\mathcal{H}} = \hat{\mathcal{H}}_0 + \hat{\mathcal{H}}_{\text{int}}$ , где  $\hat{\mathcal{H}}_0$  — невозмущенная часть, а  $\hat{\mathcal{H}}_{\text{int}}$  — возмущенная. Наиболее удобно работать в представлении взаимодействия, т.е. в представлении Гейзенберга невозмущенной задачи. В качестве базиса этого представления используются зависящие от времени собственные состояния невозмущенного гамильтониана  $\hat{\mathcal{H}}_0$ :

$$|\alpha\rangle(t) = e^{-(i/\hbar)E_\alpha t}|\alpha\rangle, \quad (2.1)$$

где  $E_\alpha$  — спектр  $\hat{\mathcal{H}}_0$ . Уравнение Шредингера, записанное в этом базисе, принимает вид

$$i\hbar \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial t} = \hat{\mathcal{H}}_{\text{int}}(t) \tilde{\psi}, \quad (2.2)$$

где  $\hat{\mathcal{H}}_{\text{int}}(t) = e^{(i/\hbar)\hat{\mathcal{H}}_0 t} \hat{\mathcal{H}}_{\text{int}} e^{-(i/\hbar)\hat{\mathcal{H}}_0 t}$ , а обозначение  $\tilde{\psi}$  указывает, что  $\psi$  берется в представлении взаимодействия. Формальное решение записывается через  $\mathcal{S}$ -матрицу,  $\tilde{\psi}(t) = \hat{S}(t)\tilde{\psi}(0)$ , которая дается так называемой хронологической экспонентой:

$$\begin{aligned} \hat{S}(t) &= \text{T exp} \left[ -\frac{i}{\hbar} \int_0^t \hat{\mathcal{H}}_{\text{int}}(t') dt' \right] = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left( -\frac{i}{\hbar} \right)^n \int_0^t \int_0^{t_1} \dots \int_0^{t_{n-1}} \hat{\mathcal{H}}_{\text{int}}(t_1) \dots \hat{\mathcal{H}}_{\text{int}}(t_n) dt_n \dots dt_1, \end{aligned} \quad (2.3)$$

где  $0 < t_n < \dots < t_1 < t$ . Преобразования (2.1)–(2.3) имеют общий квантовомеханический характер: они применимы и к одночастичной и к многочастичной задачам. В многочастичном случае, представляющем основной интерес, необходимо перейти к  $\psi$ -операторам, после чего члены ряда (2.3) становятся полиномами по операторам рождения и уничтожения. Анализ операторной структуры этих выражений приводит к простым правилам вычисления средних (теорема Вика) и

к *диаграммной технике*, дающей удобное графическое представление для разложения  $S$ -матрицы в ряд по взаимодействию.

Введем *хронологическое произведение* операторов, которое часто называют также Т-упорядоченным произведением операторов, или просто Т-произведением. Для бозе-операторов

$$T\hat{A}(x)\hat{B}(x') = \begin{cases} \hat{A}(x)\hat{B}(x') & \text{при } t > t', \\ \hat{B}(x')\hat{A}(x) & \text{при } t < t', \end{cases} \quad (2.4)$$

в то время как для ферми-операторов

$$T\hat{A}(x)\hat{B}(x') = \begin{cases} \hat{A}(x)\hat{B}(x') & \text{при } t > t', \\ -\hat{B}(x')\hat{A}(x) & \text{при } t < t'. \end{cases} \quad (2.5)$$

Иначе говоря, при Т-упорядочении операторов их переставляют так, чтобы моменты времени, в которые взяты операторы, возрастали справа налево. При этом знак перестановки соответствует их коммутационным соотношениям: «+» для бозонов, «-» для фермионов.

С помощью Т-произведения операторов можно записать выражение (2.3) для хронологической экспоненты в более привычном виде:

$$\hat{S}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^n \frac{1}{n!} T \left( \int_0^t \hat{\mathcal{H}}_{\text{int}}(t') dt' \right)^n. \quad (2.6)$$

Основным объектом диаграммной техники является функция Грина. Она определяется через  $\psi$ -операторы, взятые в представлении взаимодействия:

$$\tilde{\psi}_{\alpha}(x) = e^{i\hat{\mathcal{H}}_0 t} \hat{\psi}_{\alpha}(\mathbf{r}) e^{-i\hat{\mathcal{H}}_0 t}, \quad \tilde{\psi}_{\alpha}^{+}(x) = e^{i\hat{\mathcal{H}}_0 t} \hat{\psi}_{\alpha}^{+}(\mathbf{r}) e^{-i\hat{\mathcal{H}}_0 t}, \quad (2.7)$$

где под  $x$  понимается совокупность четырех переменных — координат  $\mathbf{r}$  и времени  $t$ ;  $\alpha$  — спиновый индекс (для фермионов).

Так называемая *причинная функция Грина* есть среднее от хронологического произведения  $\psi$ -операторов, взятых в представлении взаимодействия <sup>1)</sup>:

$$G_{\alpha\beta}^c(x, x') = -i \langle T \tilde{\psi}_{\alpha}(x) \tilde{\psi}_{\beta}^{+}(x') \rangle, \quad (2.8)$$

где скобки  $\langle \dots \rangle$  означают матричный элемент  $\langle \hat{S}_0 \rangle^{-1} \langle 0 | \dots | 0 \rangle$ , взятый по основному состоянию системы с гамильтонианом  $\hat{\mathcal{H}}_0$ . (Фазовый множитель  $\langle \hat{S}_0 \rangle = \langle 0 | e^{-i\hat{\mathcal{H}}_0 t} | 0 \rangle_{t \rightarrow \infty}$  принято вводить для нормировки.) Таким образом, функции Грина бозонов и фермионов определяются одинаково, но операция Т-упорядочения имеет разный смысл.

<sup>1)</sup> Верхний индекс у  $G_{\alpha\beta}^c$  (первая буква слова «causal») используют для того, чтобы отличать причинную функцию Грина от других полезных функций Грина, таких как запаздывающая и опережающая функции  $G_{\alpha\beta}^{R(A)}$  (см. (5.6)).

В выражении (2.7) и всюду далее там, где это не приводит к недоразумениям, мы используем систему единиц, в которой  $\hbar = 1$ ,  $[t] = [E]^{-1}$ . Кроме того, мы также часто будем писать  $\psi$  вместо  $\tilde{\psi}$ , ибо основную роль в диаграммной технике играют именно операторы  $\tilde{\psi}$  в представлении взаимодействия, а операторы  $\psi$  в шредингеровском представлении практически не встречаются.

В однородной системе (скажем, в газе или в жидкости) функция Грина (2.8), очевидно, зависит только от разности координат  $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$  и времен  $t - t'$ . В этом случае удобно сделать преобразование Фурье и перейти в импульсно-частотное представление:

$$G_{\alpha\beta}(x - x') = \iint G_{\alpha\beta}(\varepsilon, \mathbf{p}) e^{-i\varepsilon(t-t') + i\mathbf{p}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')} \frac{d\varepsilon d^3p}{(2\pi)^4}. \quad (2.9)$$

В этом представлении обычно и строится диаграммная техника. Функцию  $G_{\alpha\beta}(\varepsilon, \mathbf{p})$  для идеального газа нетрудно найти, пользуясь определением (2.8). Например, для идеального ферми-газа она имеет вид

$$G_{\alpha\beta}(\varepsilon, \mathbf{p}) = \frac{\delta_{\alpha\beta}}{\varepsilon - \xi(\mathbf{p}) + i0 \operatorname{sgn}(|\mathbf{p}| - p_0)}, \quad (2.10)$$

где  $\xi(\mathbf{p}) = \mathbf{p}^2/2m - E_F$  — закон дисперсии, а  $p_0 = \sqrt{2mE_F}$  — импульс Ферми, являющийся границей распределения ферми-частиц по импульсам.

Функцию Грина, если она известна, можно использовать для вычисления различных физических величин. Нетрудно проверить, что величина

$$\rho_{\alpha\beta}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t) = \pm i \lim_{t' \rightarrow t+0} G_{\alpha\beta}(x, x') \quad (2.11)$$

есть одночастичная матрица плотности. (Знак соответствует статистике: «+» для бозонов, «-» для фермионов.) Зная  $\rho_{\alpha\beta}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t)$ , нетрудно найти среднее любой величины. Например, плотность частиц выражается через функцию Грина как

$$n(x) = \pm i \lim_{\substack{t' \rightarrow t+0 \\ \mathbf{r}' \rightarrow \mathbf{r}}} \operatorname{Tr} G_{\alpha\beta}(x, x'), \quad (2.12)$$

а плотность тока как

$$\mathbf{j}(x) = \pm \frac{\hbar}{2m} \lim_{\substack{t' \rightarrow t+0 \\ \mathbf{r}' \rightarrow \mathbf{r}}} (\nabla_{\mathbf{r}} - \nabla_{\mathbf{r}'}) \operatorname{Tr} G_{\alpha\beta}(x, x'), \quad (2.13)$$

где  $\operatorname{Tr}$  обозначает взятие следа по спиновым индексам  $\alpha, \beta$ . Брать предел по  $t' > t$  в соотношениях (2.11) — (2.13) необходимо из-за неоднозначности определения функции Грина при  $t = t'$ .

Представление взаимодействия и функция Грина являются основой при построении и использовании диаграммной техники. В этой главе собраны задачи, иллюстрирующие эти важные понятия на простых примерах.

*Литература:* Представление взаимодействия рассматривается в [1], § 6; [6], § 12. Определение функции Грина можно найти в [1], § 7; [6], § 7.

## 2.2. Задачи 5–10

**Задача 5.** (*Спин во вращающемся поле.*) Частица со спином  $s = 1/2$  и магнитным моментом  $\mu$  находится в постоянном вертикальном и вращающемся горизонтальном магнитном полях <sup>2)</sup>

$$B = (B_1 \cos \omega t, B_1 \sin \omega t, B_0). \quad (2.14)$$

Запишите уравнение Шредингера в представлении взаимодействия, считая переменную часть поля «возмущением». Решите уравнение и найдите  $S$ -матрицу.

Пусть при  $t = 0$  частица находится в состоянии «спин вверх». Какова вероятность найти ее в состоянии «спин вниз» в момент  $t > 0$ ? Рассмотрите отдельно случай резонанса  $\omega = 2\mu B_0$ .

**Задача 6.** Заряженная частица массы  $m$  движется по прямой в параболическом потенциале  $U(x) = m\omega^2 x^2/2$ . На короткое время  $\tau$  включают слабое электрическое поле  $E$ , а затем выключают. Какова вероятность перевести частицу в состояние  $|n\rangle$ , если до включения поля она была в основном состоянии?

а. Решите задачу в представлении взаимодействия. Обратите внимание на то, что матричные элементы возмущения отличны от нуля только между соседними уровнями. Следовательно, при малом  $E$  вероятность перехода в  $n$ -е состояние дается  $n$ -м порядком теории возмущений. При каком соотношении между  $E$ ,  $\omega$  и  $\tau$  теория возмущений работает?

б.\* Для произвольных  $E$  и  $\tau$  найдите точную  $S$ -матрицу и вероятность перехода из основного в  $n$ -е состояние.

**Задача 7.** (*Обход полюса.*) Выразите плотность  $n$  ферми-газа через функцию Грина  $G(\varepsilon, p)$ , воспользовавшись соотношением (2.12). Вычислите интеграл и получите формулу  $p_0^3 = 3\pi^2 n$  для импульса Ферми  $p_0$ .

**Задача 8. а.** Для невзаимодействующих ферми-частиц на прямой найдите функцию Грина  $G_{\alpha\beta}(\varepsilon, x, x')$ .

б. То же для ферми-частиц на полупрямой  $x > 0$  с граничным условием  $\psi|_{x=0} = 0$  (непроницаемая твердая стенка).

в. (*Осцилляции Фриделя.*) В случае б) покажите, что плотность ферми-газа, как функция расстояния до стенки, осциллирует. Чему равен период осцилляций?

**Задача 9.** (*Возврат назад при случайном блуждании.*) Функции Грина оказываются полезными и при изучении вопросов, не имеющих отношения к квантовой механике. В этой и следующей задачах мы

---

<sup>2)</sup> Такая ситуация возникает, например, в эксперименте по ядерному магнитному резонансу (ЯМР).

приведем два таких примера. Первый из них — задача о случайном блуждании.

Рассмотрим частицу, совершающую случайное блуждание по  $n$ -мерной кубической решетке. Движение начинается при  $t = 0$  из начала координат. Попад на очередном шаге в какой-то из узлов решетки, частица на следующем шаге с одинаковой вероятностью переходит в любой из  $2n$  соседних узлов. Пусть  $p(t, \mathbf{x})$  — вероятность того, что частица через  $t$  шагов оказалась в узле  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$  решетки. (В этой задаче время  $t$  является дискретным.) В теории вероятностей рассматривают *производящую функцию*

$$G(z, \mathbf{q}) = \sum_{\mathbf{x}, t} z^t e^{i\mathbf{q}\mathbf{x}} p(t, \mathbf{x}) \quad (t \geq 0, |z| < 1). \quad (2.15)$$

Свойства этой величины во многом аналогичны свойствам функции Грина. Покажите, что

$$G(z, \mathbf{q}) = \frac{1}{1 - zW(\mathbf{q})}, \quad W(\mathbf{q}) = \frac{1}{n}(\cos q_1 + \dots + \cos q_n). \quad (2.16)$$

Рассмотрим производящую функцию  $\tilde{G}(z, \mathbf{q})$  для блужданий, начинающихся из начала координат, но ни разу не возвращающихся туда на последующих шагах. Величина  $\tilde{G}(z, \mathbf{q})$  по своим свойствам похожа на функцию Грина частицы в поле отталкивающего центра (см. задачи 11, 12 и 13). В частности, для нее можно написать такое же интегральное уравнение (напоминающее уравнение Дайсона). Выразите  $\tilde{G}(z, \mathbf{q})$  через  $G(z, \mathbf{q})$ . Найдите вероятность  $P$  того, что частица никогда не возвращается в начало координат. Покажите, что

$$P^{-1} = \int G(1, \mathbf{q}) \frac{d^n \mathbf{q}}{(2\pi)^n}. \quad (2.17)$$

Здесь интеграл берется по зоне Бриллюэна, т. е. по периоду обратной решетки.

Вероятность возврата (2.17) имеет нетривиальную зависимость от размерности решетки  $n$ . Покажите, что

- а)  $P = 0$  при  $n \leq 2$ ;
- б)  $0 < P < 1$  при  $n > 2$ ;
- в)  $P \rightarrow 1$  при  $n \gg 2$ .

Поскольку перечисленные свойства чувствительны только к поведению  $G(1, \mathbf{q})$  при малых  $\mathbf{q}$ , т. е. на больших масштабах, они имеют место для произвольного диффузионного движения, а не только для блуждания по решетке. Типичная диффузионная траектория имеет бесконечно много возвратов при  $n \leq 2$ , и конечное число при  $n > 2$ .

**Задача 10.** Второй пример использования функций Грина — из электродинамики. Рассмотрим модель проводящей среды, представляющую собой  $n$ -мерную сетку из одинаковых сопротивлений. Сетка образует  $n$ -мерную кубическую решетку, сопротивление каждого ребра

которой равно  $R$ . Обозначим через  $R_{\mathbf{x}}$  полное сопротивление решетки между узлами 0 и  $\mathbf{x}$ . Покажите, что

$$R_{\mathbf{x}} = \frac{R}{n} \int (1 - e^{i\mathbf{q}\mathbf{x}}) G(1, \mathbf{q}) \frac{d^n q}{(2\pi)^n}, \quad (2.18)$$

где  $G(z, \mathbf{q})$  — функция Грина, введенная в задаче 9. Исследуйте поведение  $R_{\mathbf{x}}$  при  $|\mathbf{x}| \gg 1$  в зависимости от размерности  $n$ .

### 2.3. Решения задач 5–10

5. Представим гамильтониан в виде  $\hat{\mathcal{H}} = \hat{\mathcal{H}}_0 + \hat{\mathcal{H}}_{\text{int}}$ , где

$$\hat{\mathcal{H}}_0 = \mu B_0 \sigma_z = \begin{pmatrix} \mu B_0 & 0 \\ 0 & -\mu B_0 \end{pmatrix}, \quad (2.19)$$

$$\hat{\mathcal{H}}_{\text{int}} = \mu B_1 (\sigma_x \cos \omega t + \sigma_y \sin \omega t) = \begin{pmatrix} 0 & \mu B_1 e^{-i\omega t} \\ \mu B_1 e^{i\omega t} & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.20)$$

В представлении взаимодействия  $i\dot{\psi} = \hat{\mathcal{H}}_{\text{int}}(t)\psi$ , где

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{H}}_{\text{int}}(t) &= e^{i\hat{\mathcal{H}}_0 t} \hat{\mathcal{H}}_{\text{int}} e^{-i\hat{\mathcal{H}}_0 t} = \begin{pmatrix} e^{i\mu B_0 t} & 0 \\ 0 & e^{-i\mu B_0 t} \end{pmatrix} \times \\ &\times \hat{\mathcal{H}}_{\text{int}} \begin{pmatrix} e^{-i\mu B_0 t} & 0 \\ 0 & e^{i\mu B_0 t} \end{pmatrix} = \mu B_1 \begin{pmatrix} 0 & e^{-2i\Omega t} \\ e^{2i\Omega t} & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (2.21)$$

где  $\Omega = \omega/2 - \mu B_0$ . Отсюда получаем уравнения

$$i\dot{\psi}_{\uparrow} = \mu B_1 e^{-2i\Omega t} \psi_{\downarrow}, \quad i\dot{\psi}_{\downarrow} = \mu B_1 e^{2i\Omega t} \psi_{\uparrow}. \quad (2.22)$$

Введем новые переменные:

$$\varphi_{\uparrow} = e^{i\Omega t} \psi_{\uparrow}, \quad \varphi_{\downarrow} = e^{-i\Omega t} \psi_{\downarrow}. \quad (2.23)$$

Уравнения для  $\varphi_{\alpha}(t)$  не содержат явной зависимости от времени:

$$i\dot{\varphi}_{\uparrow} + \Omega \varphi_{\uparrow} = \mu B_1 \varphi_{\downarrow}, \quad i\dot{\varphi}_{\downarrow} - \Omega \varphi_{\downarrow} = \mu B_1 \varphi_{\uparrow},$$

или

$$i\dot{\varphi} = \begin{pmatrix} -\Omega & \mu B_1 \\ \mu B_1 & \Omega \end{pmatrix} \varphi. \quad (2.24)$$

Общее решение этих уравнений имеет вид

$$\varphi(t) = c_+ \begin{pmatrix} (1+\lambda)^{1/2} \\ -(1-\lambda)^{1/2} \end{pmatrix} e^{i\tilde{\omega}t} + c_- \begin{pmatrix} (1-\lambda)^{1/2} \\ (1+\lambda)^{1/2} \end{pmatrix} e^{-i\tilde{\omega}t}, \quad (2.25)$$

где  $\tilde{\omega} = \sqrt{\Omega^2 + (\mu B_1)^2}$ ,  $\lambda = \Omega/\tilde{\omega}$ , а коэффициенты  $c_{\pm}$  зависят от начальных условий.

Полная  $S$ -матрица определяется из  $\psi_i(t) = \hat{S}(t)\psi_i(0)$ . Сравнивая с (2.25), получаем

$$\begin{aligned}\hat{S}(t) &= \begin{pmatrix} e^{-i\Omega t} & 0 \\ 0 & e^{i\Omega t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (1+\lambda)^{1/2} e^{i\tilde{\omega}t} & (1-\lambda)^{1/2} e^{-i\tilde{\omega}t} \\ -(1-\lambda)^{1/2} e^{i\tilde{\omega}t} & (1+\lambda)^{1/2} e^{-i\tilde{\omega}t} \end{pmatrix} \times \\ &\quad \times \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (1+\lambda)^{1/2} & -(1-\lambda)^{1/2} \\ (1-\lambda)^{1/2} & (1+\lambda)^{1/2} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} W(t)e^{-i\Omega t} & -i(1-\lambda^2)^{1/2} e^{-i\Omega t} \sin \tilde{\omega}t \\ -i(1-\lambda^2)^{1/2} e^{i\Omega t} \sin \tilde{\omega}t & W^*(t)e^{i\Omega t} \end{pmatrix}, \quad (2.26)\end{aligned}$$

где  $W(t) = \cos \tilde{\omega}t + i\lambda \sin \tilde{\omega}t$ .

Рассмотрим теперь вероятность переворота спина. Ее можно найти с помощью  $S$ -матрицы, а можно и прямо из (2.25). Воспользуемся вторым способом. Поскольку при  $t = 0$   $\varphi = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ , то коэффициенты  $c_{\pm}$  в выражении (2.25) есть  $c_+ = (1+\lambda)^{1/2}/2$ ,  $c_- = (1-\lambda)^{1/2}/2$ . Отсюда

$$\varphi_{\downarrow}(t) = \frac{1}{2} \sqrt{1-\lambda^2} (e^{-i\tilde{\omega}t} - e^{i\tilde{\omega}t}) = \frac{\mu B_1}{i\tilde{\omega}} \sin \tilde{\omega}t. \quad (2.27)$$

Вероятность обнаружения состояния  $|\downarrow\rangle$  при  $t > 0$  равна

$$p_{\downarrow}(t) = |\varphi_{\downarrow}(t)|^2 = \frac{(\mu B_1)^2}{\Omega^2 + (\mu B_1)^2} \sin^2 \tilde{\omega}t. \quad (2.28)$$

Если выполнено условие резонанса  $\omega = 2\mu B_0$ , то  $\Omega = 0$ ,  $\tilde{\omega} = \mu B_1$  и выражение для  $S$ -матрицы упрощается:

$$\hat{S}(t) = \begin{pmatrix} \cos(\mu B_1 t) & -i \sin(\mu B_1 t) \\ -i \sin(\mu B_1 t) & \cos(\mu B_1 t) \end{pmatrix}. \quad (2.29)$$

В этом случае вероятность переворота спина есть  $p_{\downarrow}(t) = \sin^2 \mu B_1 t$ .

**6 а.** В представлении взаимодействия  $\hat{\mathcal{H}}_{\text{int}} = -eE e^{i\hat{\mathcal{H}}_0 t} \hat{x} e^{-i\hat{\mathcal{H}}_0 t}$ , откуда

$$\langle m | \hat{\mathcal{H}}_{\text{int}}(t) | n \rangle = -eE e^{i(m-n)\omega t} \langle m | \hat{x} | n \rangle. \quad (2.30)$$

Воспользуемся матричными элементами оператора координаты:

$$\langle m | \hat{x} | n \rangle = l_0 \langle m | a + a^+ | n \rangle = l_0 \left( \delta_{m,n+1} \sqrt{m} + \delta_{m+1,n} \sqrt{n} \right), \quad (2.31)$$

где  $l_0 = \sqrt{\hbar/2m\omega}$  — размер основного состояния осциллятора. Получаем

$$\langle m | \hat{\mathcal{H}}_{\text{int}}(t) | n \rangle = -eE l_0 \left( \delta_{m,n+1} \sqrt{m} e^{i\omega t} + \delta_{m+1,n} \sqrt{n} e^{-i\omega t} \right). \quad (2.32)$$

Теперь рассмотрим зависимость вектора состояния от времени. Из уравнения Шредингера в представлении взаимодействия,  $i\hbar\dot{\psi} = \hat{\mathcal{H}}_{\text{int}}\psi$ , получаем

$$\psi(t) = \psi(0) - \frac{i}{\hbar} \int_0^t \hat{\mathcal{H}}_{\text{int}}(t')\psi(t')dt'. \quad (2.33)$$

Из такой записи видно, что проекция  $\langle n|\psi(t)\rangle$  отлична от нуля только начиная с  $n$ -го порядка теории возмущений. Поэтому

$$\begin{aligned} \langle n|\psi^{(n)}(t)\rangle &= -i \int_0^t \langle n|\hat{\mathcal{H}}_{\text{int}}(t')|\psi^{(n-1)}(t')\rangle dt' = \\ &= \frac{ieEl_0}{\hbar} \sqrt{n} \int_0^t e^{i\omega t'} \langle n-1|\psi^{(n-1)}(t')\rangle dt', \end{aligned} \quad (2.34)$$

где индекс  $(n)$  состояния  $\psi^{(n)}(t)$  означает порядок теории возмущений. Вводя функции  $u_n(t) = \langle n|\psi^{(n)}(t)\rangle$ , получаем рекуррентные уравнения:

$$u_n(t) = \frac{ieEl_0}{\hbar} \sqrt{n} \int_0^t e^{i\omega t'} u_{n-1}(t') dt', \quad (2.35)$$

причем  $u_0(t) = 1$ . Решив их, находим

$$u_n(t) = \left(\frac{eEl_0}{\hbar\omega}\right)^n \frac{1}{\sqrt{n!}} \left(e^{i\omega t} - 1\right)^n. \quad (2.36)$$

Искомая вероятность  $W_{0 \rightarrow n}$  в приближении теории возмущений равна

$$|u_n(\tau)|^2 = \left(\frac{e^2 E^2}{2m\omega^3 \hbar}\right)^n \frac{1}{n!} \left(2 \sin \frac{\omega\tau}{2}\right)^{2n} = \frac{1}{n!} \left[\frac{e^2 E^2 (1 - \cos \omega\tau)}{m\omega^3 \hbar}\right]^n. \quad (2.37)$$

Теория возмущений работает, если выражение в квадратных скобках много меньше единицы.

**6 б. (Первое решение.)** Запишем гамильтониан  $\hat{\mathcal{H}} = \hat{\mathcal{H}}_0 + \hat{\mathcal{H}}_{\text{int}}$  через бозе-операторы:

$$\hat{\mathcal{H}}_0 = \hbar\omega (a^+ a + 1/2), \quad \hat{\mathcal{H}}_{\text{int}} = -eE\hat{x} = -eEl_0(a + a^+) \quad (2.38)$$

( $l_0 = \sqrt{\hbar/2m\omega}$ ). Найдем  $a(t)$  и  $a^+(t)$  в случае, когда  $\hat{\mathcal{H}}_{\text{int}} = 0$ :

$$\dot{a} = (i/\hbar)[\hat{\mathcal{H}}_0, a] = i\omega[a^+ a, a] = -i\omega a, \quad \dot{a}^+ = i\omega a^+. \quad (2.39)$$

Отсюда имеем

$$a(t) = a e^{-i\omega t}, \quad a^+(t) = a^+ e^{i\omega t}. \quad (2.40)$$

Теперь пусть  $\hat{\mathcal{H}}_{\text{int}} \neq 0$ . Запишем уравнения движения для  $a$  в представлении взаимодействия:

$$\dot{a} = (i/\hbar)[\hat{\mathcal{H}}_{\text{int}}, a] = ieEl_0 e^{-i\omega t}. \quad (2.41)$$

Находим решение:

$$a(\tau) = a(0) - iEl_0 \int_0^\tau e^{-i\omega t} dt = a(0) + \mu, \quad (2.42)$$

где  $a(0)$  — канонический бозевский оператор уничтожения, а

$$\mu = \frac{eEl_0}{\hbar\omega} (e^{-i\omega\tau} - 1). \quad (2.43)$$

Отсюда получаем зависимость  $n$ -го состояния от времени:

$$|n, t = \tau\rangle = \frac{(a^+(\tau))^n}{\sqrt{n!}} |0, t = \tau\rangle = \frac{(a^+(0) + \mu^*)^n}{\sqrt{n!}} |0, t = \tau\rangle. \quad (2.44)$$

Теперь разлагаем состояние  $|0, t = 0\rangle$  по состояниям  $|n, t = \tau\rangle$ :

$$\begin{aligned} \langle n, t = \tau | 0, t = 0 \rangle &= \langle 0, t = \tau | \frac{(a(0) + \mu)^n}{\sqrt{n!}} | 0, t = 0 \rangle = \\ &= \frac{(\mu)^n}{\sqrt{n!}} \langle 0, t = \tau | 0, t = 0 \rangle. \end{aligned} \quad (2.45)$$

Здесь мы воспользовались тем, что  $a(0)|0\rangle = 0$ .

Из (2.45) находим связь между вероятностями переходов:

$$W_{0 \rightarrow n} = \frac{|\mu|^{2n}}{n!} W_{0 \rightarrow 0}, \quad (2.46)$$

причем условие нормировки  $\sum_n W_{0 \rightarrow n} = 1$  дает  $W_{0 \rightarrow 0} = e^{-|\mu|^2}$ . Получается распределение Пуассона

$$W_{0 \rightarrow n} = \frac{|\mu|^{2n}}{n!} e^{-|\mu|^2} \quad (2.47)$$

с параметром  $|\mu|^2 = e^2 E^2 / m \hbar \omega^3 (1 - \cos \omega \tau)$ . При малых  $\mu$  ответ совпадает с результатом, полученным по теории возмущений, как и должно быть.

**6.6. (Второе решение.)** Приведем решение, показывающее связь задачи с когерентными состояниями осциллятора, определяемыми как собственные состояния оператора уничтожения  $a$ .

Исторически когерентные состояния впервые появились в задаче о минимизации  $\delta x \delta p$  для состояний осциллятора, рассмотренной Шредингером (1926). Позже оказалось, что они полезны и во многих других случаях. Специфическая координатно-временная структура когерентных состояний исследована в задаче 3 к § 23 [2].

Представим гамильтониан в виде

$$\hat{\mathcal{H}} = \hbar\omega [a^+ a + 1/2 + \lambda(a^+ + a)], \quad (2.48)$$

где  $\lambda = -eEl_0/\hbar\omega$ . Введем новые операторы

$$b = a + \lambda, \quad b^+ = a^+ + \lambda. \quad (2.49)$$

Поскольку  $[b, b^+] = 1$ , переход от  $a$  и  $a^+$  к  $b$  и  $b^+$  определяет каноническое преобразование. При этом гамильтониан становится чисто осцилляторным:

$$\hat{\mathcal{H}} = \hbar\omega (b^+ b + 1/2 - \lambda^2). \quad (2.50)$$

Введем собственные состояния оператора уничтожения  $b$ :

$$b|\eta\rangle = \eta|\eta\rangle. \quad (2.51)$$

Здесь  $\eta$  может быть любым комплексным числом. Нетрудно проверить, что

$$|\eta\rangle = e^{-|\eta|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\eta^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle, \quad (2.52)$$

где  $|n\rangle$  — состояния гамильтониана (2.50), отвечающие энергии  $E_n = \hbar\omega(n + 1/2 - \lambda^2)$ . Возьмем состояние осциллятора до включения поля:  $a|0_a\rangle = 0$ . Используя связь  $a$  и  $b$ , находим

$$b|0_a\rangle = \lambda|0_a\rangle, \quad (2.53)$$

а значит,

$$|0_a\rangle = e^{-\lambda^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{\sqrt{n!}} |n_b\rangle. \quad (2.54)$$

Разложение по состояниям  $|n_b\rangle$  позволяет сразу написать зависимость от времени:

$$|0_a\rangle(t) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\hat{\mathcal{H}}t\right)|0_a\rangle = e^{i(\lambda^2-1/2)\omega t} e^{-\lambda^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda e^{-i\omega t})^n}{\sqrt{n!}} |n_b\rangle, \quad (2.55)$$

т. е.

$$b|0_a\rangle(t) = \lambda e^{-i\omega t}|0_a\rangle(t), \quad (2.56)$$

откуда

$$a|0_a\rangle(t) = \lambda(e^{-i\omega t} - 1)|0_a\rangle(t). \quad (2.57)$$

Обозначив  $\mu = \lambda(e^{-i\omega t} - 1)$ , получаем

$$|0_a\rangle(t) = S(t)|0_a\rangle = e^{-|\mu|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mu^n}{\sqrt{n!}} |n_a\rangle. \quad (2.58)$$

Отсюда находим столбец  $S$ -матрицы:  $\langle n|\hat{S}(t)|0\rangle e^{-|\mu|^2/2} \mu^n/\sqrt{n!}$ . Искомые вероятности переходов есть

$$W_{0 \rightarrow n} = e^{-|\mu|^2} \frac{|\mu|^{2n}}{n!} = \frac{1}{n!} \left[ \frac{e^2 E^2 (1 - \cos \omega t)}{m\omega^3 \hbar} \right]^n \exp \left[ -\frac{e^2 E^2 (1 - \cos \omega t)}{m\omega^3 \hbar} \right]. \quad (2.59)$$

Остальные матричные элементы можно получить из соотношений для зависящих от времени операторов:  $\hat{S}b^+ = b^+\hat{S}e^{-i\omega t}$ ,  $\hat{S}a^+ = a^+\hat{S}e^{-i\omega t} + \mu\hat{S}$ . Отсюда

$$\langle n|\hat{S}|k\rangle = \frac{1}{\sqrt{k}}\langle n|\hat{S}a^+|k-1\rangle\frac{1}{\sqrt{k}}\langle n|a^+\hat{S}e^{-i\omega t} + \mu\hat{S}|k-1\rangle \quad (2.60)$$

и получается рекуррентная формула:

$$\langle n|\hat{S}|k\rangle = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{k}}e^{-i\omega t}\langle n-1|\hat{S}|k-1\rangle - \frac{\mu}{k}\langle n|\hat{S}|k-1\rangle. \quad (2.61)$$

Применяя (2.61) достаточно много раз, выражаем  $\langle n|\hat{S}|k\rangle$  через  $\langle 0|\hat{S}|0\rangle = e^{-|\mu|^2/2}$  и получаем общую формулу:

$$\langle n|\hat{S}|m\rangle = \frac{e^{-|\mu|^2/2}}{\sqrt{m!n!}} \sum_{k=0}^{\min(m,n)} \frac{n!m!}{k!(n-k)!(m-k)!} \mu^{n+m-2k} e^{-i\omega kt}. \quad (2.62)$$

## 7. Используем причинную функцию Грина

$$G_{\alpha\beta} = -i\langle T\psi_{\alpha}(\mathbf{r}, t)\psi_{\beta}^+(\mathbf{r}', t')\rangle\delta_{\alpha\beta}G, \quad (2.63)$$

введенную в (2.8). Плотность частиц с проекцией спина  $\alpha$  есть

$$n_{\alpha}(\mathbf{r}, t) = \lim_{t' \rightarrow t+0} \langle \psi_{\alpha}^+(\mathbf{r}, t')\psi_{\alpha}(\mathbf{r}, t)\rangle = -iG_{\alpha\alpha}(\mathbf{r}' = \mathbf{r}, t' = t+0) \quad (2.64)$$

(при  $t' = t-0$  из-за перестановки  $\psi$  и  $\psi^+$  получилось бы  $n_{\alpha} - 1$ , по определению функции Грина). В нашем случае система однородна, и  $G$  зависит только от разности  $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$  и  $t - t'$ . Поэтому переходим в фурье-представление:

$$\begin{aligned} n_{\alpha} &= -i \lim_{\tau \rightarrow -0} \int G(\varepsilon, \mathbf{p}) e^{-i\varepsilon\tau} \frac{d^3\mathbf{p} d\varepsilon}{(2\pi)^4} = \\ &= -i \lim_{\tau \rightarrow -0} \int \frac{4\pi p^2 dp}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\varepsilon\tau}}{\varepsilon - \xi(p) + i\delta \operatorname{sgn}(p - p_0)} \frac{d\varepsilon}{2\pi}, \end{aligned} \quad (2.65)$$

где  $\tau = t - t'$ ,  $\xi(p) = \mathbf{p}^2/2m - E_F$ .

Контур интегрирования по  $\varepsilon$  замыкаем в верхней полуплоскости, поскольку  $\tau < 0$ . При этом при  $p > p_0$  полюс не захвачен:

$$\int \frac{e^{-i\varepsilon\tau}}{\varepsilon - \xi(p) + i\delta} \frac{d\varepsilon}{2\pi} = 0, \quad (2.66)$$

а при  $p < p_0$  захвачен:

$$\int \frac{e^{-i\varepsilon\tau}}{\varepsilon - \xi(p) - i\delta} \frac{d\varepsilon}{2\pi} = i e^{-i\xi(p)\tau}. \quad (2.67)$$

Знак мнимой части  $i\delta$  определяет, заполнено ли состояние с данным  $p$ . С учетом спиновой двойки

$$n = 2 \int_0^{p_0} \frac{4\pi p^2 dp}{(2\pi)^3} = \frac{p_0^3}{3\pi^2}, \quad (2.68)$$

откуда находим  $p_0^3 = 3\pi^2 n$ .

**8 а.** Найдем

$$G_{\alpha\beta}(\varepsilon, x, x') = -i \int e^{i\varepsilon\tau} \langle T \psi_\alpha(x) \psi_\beta^+(x') \rangle d\tau, \quad (2.69)$$

где  $\tau = t - t'$ . В импульсном представлении

$$G_{\alpha\beta}(\varepsilon, p) = \frac{\delta_{\alpha\beta}}{\varepsilon - \xi(p) + i\delta \operatorname{sgn} \varepsilon}, \quad \xi(p) = \frac{p^2}{2m} - E_F. \quad (2.70)$$

Поэтому

$$G_{\alpha\beta}(\varepsilon, x, x') = \int e^{ip(x-x')} G_{\alpha\beta}(\varepsilon, p) \frac{dp}{2\pi} = -2m\delta_{\alpha\beta} \int \frac{e^{ip(x-x')}}{(p-p_1)(p-p_2)} \frac{dp}{2\pi}. \quad (2.71)$$

Полюсы подынтегрального выражения

$$p_{1,2} = \pm \varkappa, \quad (2.72)$$

где  $\varkappa = \sqrt{2m(\varepsilon + E_F + i\delta \operatorname{sgn} \varepsilon)}$ . Если  $\varepsilon > 0$ , то  $p_1$  лежит в верхней полуплоскости, а  $p_2$  — в нижней, а если  $\varepsilon < 0$ , то наоборот.

При  $x > x'$  замыкаем контур интегрирования сверху:

$$G_{\alpha\beta}(\varepsilon, x, x') = -2\pi i \delta_{\alpha\beta} \frac{2m}{2\pi} \frac{e^{i(x-x')p_+}}{2p_+} = -\delta_{\alpha\beta} \frac{im}{p_+} e^{ip_+(x-x')}, \quad (2.73)$$

где  $p_+ = \varkappa \operatorname{sgn} \varepsilon$  — тот из полюсов  $p_1, p_2$ , который находится в верхней полуплоскости. Повторять вычисление при  $x < x'$  не нужно, поскольку  $G_{\alpha\beta}(\varepsilon, x, x') = G_{\alpha\beta}(\varepsilon, x', x)$ . (Это следует из четности  $G_{\alpha\beta}(\varepsilon, p)$  по  $p$ .) Окончательно имеем

$$G_{\alpha\beta}(\varepsilon, x, x') = -\frac{im}{p_+} e^{ip_+|x-x'|} \delta_{\alpha\beta}. \quad (2.74)$$

**8 б.** В присутствии стенки функцию Грина  $G^{(1)}$  находим с помощью метода изображений:

$$G_{\alpha\beta}^{(1)}(\varepsilon, x, x') = G_{\alpha\beta}(\varepsilon, x, x') - G_{\alpha\beta}(\varepsilon, x, -x'), \quad (2.75)$$

где  $G$  дается (2.74). Обосновать такой ответ можно так же, как и при использовании метода изображений в электростатике. В самом деле,  $G_{\alpha\beta}^{(1)}$  удовлетворяет уравнению

$$(\varepsilon - \widehat{\mathcal{H}}) G_{\alpha\beta}^{(1)}(\varepsilon, x, x') = \delta(x - x') \delta_{\alpha\beta} \quad (2.76)$$

и граничному условию  $G_{\alpha\beta}^{(1)}(\varepsilon, 0, x') = 0$ , а переход к изображениям обычным образом заменяет граничное условие условием антисимметрии.

**8 в.** Выразим плотность через функцию Грина, найденную в части б):

$$n(x) = -i \lim_{\tau \rightarrow -0} \text{Tr} \int G_{\alpha\beta}^{(1)}(\varepsilon, x, x) e^{-i\varepsilon\tau} \frac{d\varepsilon}{2\pi}, \quad (2.77)$$

где  $\text{Tr}$  означает взятие следа. Суммируя по спинам, получаем

$$n(x) = -2i \lim_{\tau \rightarrow -0} \int \frac{e^{-i\varepsilon\tau}(1 - e^{-2ipx})}{\varepsilon - \xi(p) + i\delta \text{sgn} \xi(p)} \frac{dp d\varepsilon}{(2\pi)^2}. \quad (2.78)$$

При интегрировании по  $\varepsilon$ , поскольку  $\tau < 0$ , замыкаем контур в верхней полуплоскости. Полюс захватывается при  $\xi(p) < 0$ , т. е. при  $p^2/2m < E_F$ . Находим

$$n(x) = -2i \int_{p^2 < 2m E_F} (1 - e^{-2ipx}) \frac{2\pi i}{(2\pi)^2} dp. \quad (2.79)$$

Интегрируем по  $p$ :

$$\begin{aligned} n(x) &= 2 \int_{-p_0}^{p_0} (1 - e^{-2ipx}) \frac{dp}{2\pi} = \frac{1}{\pi} \left( 2p_0 - \int_{-p_0}^{p_0} e^{-2ipx} dp \right) = \\ &= \frac{1}{\pi} \left( 2p_0 - \frac{\sin(2p_0 x)}{x} \right) = n_0 \left( 1 - \frac{\sin(2p_0 x)}{2p_0 x} \right), \end{aligned} \quad (2.80)$$

где  $n_0$  — плотность вдали от стенки. (Коэффициент в (2.80) можно проверить, подсчитав плотность частиц квазиклассически:  $n_0 L = 2(2p_0 L)/2\pi\hbar$ .) Плотность  $n(x)$  обращается в нуль на стенке, а вдали осциллирует с периодом  $\lambda_0 = \pi\hbar/p_0$  (рис. 2.1).

Сравним среднее расстояние между электронами  $d = n_0^{-1} = \pi\hbar/2p_0$  с периодом осцилляций  $\lambda_0$  — они отличаются в два раза. Это отличие связано со спином электронов. Фермиевские корреляции, приводящие к осцилляциям, имеются только для электронов с одинаковой проекцией спина. Плотность таких электронов есть  $n_0/2 = \lambda_0^{-1}$ , что как раз соответствует периоду осцилляций.

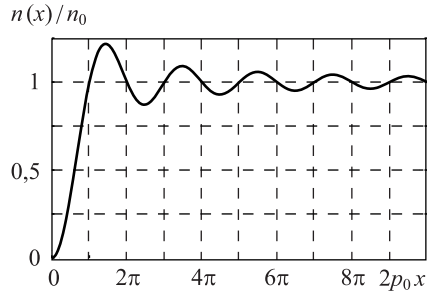


Рис. 2.1

**9.** Рассмотрим вероятность  $p(t, \mathbf{x})$  блуждающей частицы оказаться в узле  $\mathbf{x}$  на шаге  $t$ . Вероятности на шаге  $t$  и  $t+1$  связаны простым соотношением:

$$p(t+1, \mathbf{x}) = \frac{1}{2n} \sum_{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|=1} p(t, \mathbf{x}') \quad (2.81)$$

(сумма берется по  $2n$  соседям узла  $\mathbf{x}$ ). Перейдем к фурье-образу  $p(t, \mathbf{q}) = \sum_{\mathbf{x}} e^{i\mathbf{q}\mathbf{x}} p(t, \mathbf{x})$ . Соотношение (2.81) дает

$$p(t+1, \mathbf{q}) = W(\mathbf{q}) p(t, \mathbf{q}), \quad W(\mathbf{q}) = \frac{1}{n} (\cos q_1 + \dots + \cos q_n). \quad (2.82)$$

Находим производящую функцию

$$G(z, \mathbf{q}) = \sum_{t \geq 0} z^t p(t, \mathbf{q}) \frac{1}{1 - zW(\mathbf{q})}. \quad (2.83)$$

Вероятности  $p(t, \mathbf{x})$  выражаются через  $G(z, \mathbf{q})$  так:

$$p(t, \mathbf{x}) = \frac{-i}{(2\pi)^{n+1}} \oint \frac{dz}{z^{t+1}} \int \frac{d^n q e^{i\mathbf{q}\mathbf{x}}}{1 - zW(\mathbf{q})}, \quad (2.84)$$

где интеграл по  $d^n q$  берется по области  $-\pi < q_i < \pi$  ( $i = 1, \dots, n$ ), а интеграл по  $z$  — по любому контуру, охватывающему точку  $z = 0$ .

Теперь, чтобы найти вероятность блужданий без возврата в начало координат, немного модифицируем правила игры. Предположим, что частица блуждает случайно, как и раньше, но, как только она попадает в начало координат, ее «удаляют с поля». В этом случае связь между  $p(t+1, \mathbf{x})$  и  $p(t, \mathbf{x})$  будет такая:

$$p(t+1, \mathbf{x}) = \begin{cases} \frac{1}{2n} \sum_{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|=1} p(t, \mathbf{x}') & \text{при } \mathbf{x} \neq 0, \\ 0 & \text{при } \mathbf{x} = 0. \end{cases} \quad (2.85)$$

Переходя к фурье-образу  $p(t, \mathbf{q})$ , получаем

$$p(t+1, \mathbf{q}) = W(\mathbf{q}) p(t, \mathbf{q}) - \int W(\mathbf{k}) p(t, \mathbf{k}) \frac{d^n k}{(2\pi)^n}. \quad (2.86)$$

Производящая функция  $\tilde{G}(z, \mathbf{q}) = \sum_{t \geq 0} z^t p(t, \mathbf{q})$  получается умножением (2.85) на  $z^{t+1}$  и суммированием по  $t \geq 0$ . Находим

$$\tilde{G}(z, \mathbf{q}) (1 - zW(\mathbf{q})) = 1 - z \int W(\mathbf{k}) \tilde{G}(z, \mathbf{k}) \frac{d^n k}{(2\pi)^n}. \quad (2.87)$$

Это уравнение можно записать в таком виде:

$$\tilde{G}(z, \mathbf{q}) = G(z, \mathbf{q}) + G(z, \mathbf{q}) \int \Sigma(z, \mathbf{k}) \tilde{G}(z, \mathbf{k}) \frac{d^n k}{(2\pi)^n}, \quad (2.88)$$

где  $\Sigma(z, \mathbf{k}) = G^{-1}(z, \mathbf{k}) - 1$ . (Заметим, что по форме уравнение (2.88) напоминает уравнение Дайсона (см. 4.9)).

Ищем решение (2.88) в виде

$$\tilde{G}(z, \mathbf{q}) = \lambda(z) G(z, \mathbf{q}), \quad (2.89)$$