К.Н. Драбович
В.А. Макаров
С.С. Чесноков

ФИЗИКА

Практический курс для поступающих в университеты

Драбович К.Н.
Макаров В.А.
Чесноков С.С.

Физика.
Практический курс для поступающих в университеты

МОСКВА
ФИЗМАТЛИТ ®

УДК 53(075.3)
ББК 22.3
Д 72

Драбович К. Н., Макаров В. А., Чесноков С. С. **Физика. Практический курс для поступающих в университеты.** — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. — 544 с. — ISBN 5-9221-0652-X.

Пособие предназначено для учащихся выпускных классов средних школ с углубленным изучением физики и математики. Его основу составляют задачи по физике, предлагавшиеся в течение последних 20 лет абитуриентам факультета вычислительной математики и кибернетики МГУ им. М.В. Ломоносова. Материал разбит по темам в соответствии с программой вступительных испытаний по физике для поступающих в МГУ. Каждая тема предваряется краткой сводкой базовых теоретических сведений, которые необходимы для решения задач и окажутся полезными при подготовке к вступительным экзаменам. Всего в сборник включено около 600 задач, свыше половины из них снабжены подробными решениями и методическими указаниями.

Для школьников, готовящихся к поступлению на физико-математические факультеты университетов.

Рецензенты: Кафедра физики Специализированного учебно-научного центра МГУ (зав. кафедрой профессор В. И. Лобышев), профессор физического факультета МГУ П. Н. Николаев

ISBN 5-9221-0652-X

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие

Настоящее пособие предназначено для учащихся выпускных классов средних школ с углубленным изучением физики и математики. Оно имеет целью помочь будущим абитуриентам самостоятельно подготовиться к вступительным экзаменам на естественнонаучные факультеты классических университетов, в первую очередь МГУ им. М. В. Ломоносова.

Целенаправленная подготовка к поступлению в университет должна органично сочетать как изучение теории, так и решение задач. Исходя из этого, мы сочли целесообразным дать в начале каждого раздела краткое изложение базовых теоретических сведений, представляющее собой по существу конспекты ответов на вопросы программы по физике для поступающих в МГУ. Надеемся, что предлагаемые нами конспекты помогут абитуриентам разумно структурировать изучаемый материал, подскажут, как построить план обсуждения теории по темам, предлагаемым в экзаменационных заданиях. Вместе с тем, необходимо иметь в виду, что основная цель устного вступительного экзамена состоит в выявлении глубины понимания абитуриентом сущности физических явлений и законов, умения истолковывать физический смысл величин и понятий. Поэтому приводимое здесь краткое изложение теории ни в коей мере не может заменить стабильные учебные пособия, рекомендованные в программе для поступающих в МГУ. Список этих пособий помещен в конце книги.

Необходимым условием успешной сдачи вступительного экзамена является также умение решать задачи по всем разделам программы. В связи с этим в книгу включены избранные задачи по физике из числа предлагавшихся абитуриентам факультета вычислительной математики и кибернетики (ВМК) МГУ им. М.В. Ломоносова на протяжении последних 20 лет. Всего в сборник включено около 600 задач различной сложности, которые сгруппированы по темам в полном соответствии с программой по физике для поступающих в МГУ. Задачи, предлагавшиеся в 2003 – 2005 годах, помещены в отдельные разделы в конце книги. На примере этих задач читатель сможет составить представление о возросшем в последние годы уровне требований к поступающим в МГУ. Для облегчения самостоятельной работы по подготовке к вступительным экзаменам свыше половины задач из этого сборника снабжены подробными решениями.

Кафедру, которой поручено готовить экзаменационные билеты по физике для поступающих на ВМК МГУ, на протяжении многих лет возглавлял профессор С. П. Стрелков. По инициативе С. П. Стрелкова на кафедре был создан коллектив педагогов, ведущих занятия по физике для студентов мехмата и ВМК. Заложенный в те годы под руководством С. П. Стрелкова стиль преподавания физики студентам-математикам сыграл определяющую роль в формировании уровня требований по физике к поступающим на математические факультеты МГУ. В комиссии по составлению экзаменационных заданий для абитуриентов ВМК долгие годы работали Б. Б. Буховцев, Л. Н. Капцов, В. Л. Кузнецов, Г. Я. Мякишев, С. Ю. Никитин, И. П. Николаев, Н. Б. Подымова, М. С. Полякова, С. В. Попов, А. В. Приезжев, С. С. Чесноков, Л. А. Шенявский, В. И. Шмальгаузен. Большое влияние на работу этого коллектива в последующем оказали заведующие кафедрой профессор С. А. Ахманов и профессор В. А. Макаров, профессора кафедры В. П. Кандидов, А. В. Андреев, А. А. Карабутов, доценты А. И. Гомонова, Ю. В. Пономарев, К. Н. Драбович, а также ряд других преподавателей, читающих лекции и ведущих семинарские занятия по физике на математических факультетах МГУ.

Со дня основания ВМК МГУ руководство факультета постоянно уделяло и уделяет большое внимание преподаванию физики. Усилиями деканов факультета академика А. Н. Тихонова, член-корреспондента РАН Д.П. Костомарова, академика Е. И. Моисеева, а также профессоров М. М. Хапаева, Е. В. Шикина, доцентов В. Г. Сушко и Б. И. Березина, занимавших в разные годы должности заместителей декана по учебной работе, сформировался весьма высокий уровень требований к обучению физике студентов ВМК.

Появление на свет этой книги во многом обязано подготовительным курсам факультета ВМК, на которых авторы читают лекции и проводят семинарские занятия по физике в течение ряда лет. Книга по существу явилась обобщением ряда учебных пособий, разработанных для слушателей курсов. Активную поддержку в подготовке и издании пособий по физике постоянно оказывал руководитель курсов доцент ВМК М. В. Федотов. Большинство задач, включенных в книгу, использовалось в качестве основного учебного материала на курсах, где прошло солидную апробацию. Немало способствовали улучшению книги ценные критические замечания, которые высказывали преподаватели подготовительных курсов Н. Н. Брандт, Н. В. Нетребко. А. Н. Оленин, Л. И. Пентегова, В. М. Петникова, Е. Б. Черепецкая, С. А. Шленов.

Подбор задач, включенных в книгу, по нашему мнению окажется наиболее полезным для абитуриентов, готовящихся к поступлению на математические факультеты классических университетов. С одной стороны, это связано с тем, что редактируя формулировки условий, мы добивались исчерпывающей ясности в постановке задач, не допускающей произвольного толкования и позволяющей построить однозначную математическую модель явления. С другой стороны, работу над предлагаемыми здесь задачами следует рассматривать как «нулевой уровень» обучения физике в системе физического образования, сложившейся к настоящему времени на ВМК МГУ. Абитуриенты, освоившие этот нулевой уровень, будут в последующем иметь все шансы стать отлично успевающими студентами.

В заключение отметим, что наличие в книге различных по трудности задач, предлагавшихся на вступительных экзаменах прошлых лет, делает, по нашему мнению, настоящее издание полезным не только поступающим в классические университеты, но и более широкому кругу учащихся.

К. Н. Драбович, В. А. Макаров, С. С. Чесноков

Глава 1

МЕХАНИКА

1.1. Кинематика

Вопросы программы

1. *Механическое движение. Относительность механического движения. Материальная точка. Система отсчета. Траектория. Вектор перемещения и его проекции. Путь. Скорость, сложение скоростей. Ускорение. Сложение ускорений.*
2. *Прямолинейное равномерное и равнопеременное движения. Зависимости скорости, координат и пути от времени.*
3. *Криволинейное движение. Равномерное движение по окружности. Угловая скорость. Период и частота обращения. Ускорение тела при движении по окружности. Тангенциальное и нормальное ускорения.*
4. *Свободное падение тел. Ускорение свободно падающего тела. Движение тела, брошенного под углом к горизонту. Дальность и высота полета.*
5. *Поступательное и вращательное движение твердого тела.*

Определения, понятия и законы

Механическое движение. Относительность механического движения. В механике изучается наиболее простая форма движения — механическое движение. *Механическим движением* называется изменение положения данного тела (или его частей) относительно других тел, происходящее с течением времени. Любое механическое движение является *относительным*. В природе не существует абсолютного движения или абсолютного покоя. Поэтому для описания механического движения необходимо указать конкретное тело, относительно которого наблюдается движение других тел. Это тело называют *телом отсчета*. Таким образом, механическое движение — это изменение положения тел относительно выбранного тела отсчета.

Материальная точка Для математического описания движения в кинематике используются различные модели физических тел. *Материальная точка* — простейшая модель тела, используемая для описания движения в тех случаях, когда размерами и формой тела можно пренебречь. Эта модель применима, когда 1) размеры тела малы по сравнению с характерными размерами области движения тела, или когда 2) твердое тело совершает поступательное движение (см. ниже). Положение *материальной* точки в пространстве определяется положением изображающей ее *геометрической* точки.

Системой отсчета называют тело отсчета, связанную с ним систему координат и прибор для измерения времени (часы). Положение материальной точки в пространстве определяется *тремя координатами* x, y, z (рис. 1.1.1). Оно может быть задано также *радиус-вектором* $\vec{r}$, соединяющим начало координат с материальной точкой, причем

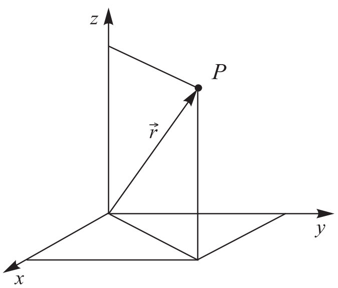


Рис. 1.1.1. Положение материальной точки P в пространстве

$$\vec{r} = \{x, y, z\}. \qquad (1.1.1)$$

Единица для измерения длины, установленная в Международной системе единиц (СИ), называется *метром*. Приближенно он равен 1/40 000 000 части земного меридиана. По современному определению один метр — это расстояние, которое свет проходит в вакууме за 1/299 792 458 долю секунды. Таким образом, определение единицы расстояния связано с определением единицы измерения времени — *секундой*. Одна секунда приближенно равна 1/86 400 доле земных суток. Для точных измерений времени используются атомные часы. Определенная в СИ секунда равна 9 192 631 770 периодам излучения атома цезия при переходе между двумя уровнями сверхтонкой структуры основного состояния.

Траектория. При движении материальной точки конец радиус-вектора описывает в пространстве некоторую непрерывную линию, называемую *траекторией* точки. Уравнение, описывающее зависимость радиус-вектора движущейся точки от времени

$$\vec{r} = \vec{r}(t) \qquad (1.1.2)$$

называется векторным кинематическим *уравнением движения точки*. Оно эквивалентно трем скалярным уравнениям движения:

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t) \tag{1.1.3}$$

Траектории одной и той же точки в разных системах отсчета имеют, вообще говоря, различную форму. Кинематические уравнения движения точки в разных системах отсчета также различны.

Перемещение материальной точки из положения 1 в положение 2 — это вектор

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1, \tag{1.1.4}$$

проведенный из начального положения точки в конечное (рис. 1.1.2). Проекции вектора перемещения на координатные оси могут быть выражены через разности координат его конца и начала:

$$\Delta x = x_2 - x_1, \ \ \Delta y = y_2 - y_1, \ \ \Delta z = z_2 - z_1. \tag{1.1.5}$$

Эти величины часто называют перемещениями точки вдоль соответствующих координатных осей.

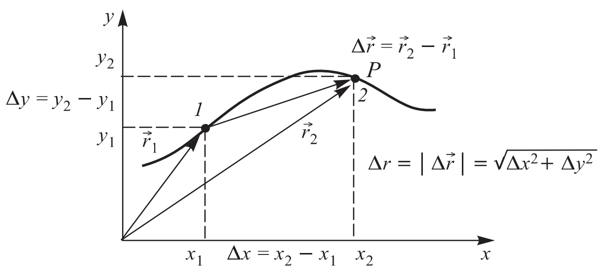


Рис. 1.1.2. Перемещение материальной точки P в пространстве

Путь точки равен сумме расстояний, пройденных ею вдоль траектории, и всегда является неотрицательной величиной. Пути, пройденные точкой за последовательные промежутки времени, складываются арифметически. Модуль $\Delta r = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$ перемещения точки в общем случае не равен пути, пройденному точкой за данный промежуток времени. Эти величины совпадают только при движении точки по прямой в одном направлении.

Скорость. *Средняя скорость* точки в данной системе отсчета на интервале времени $(t,\ t + \Delta t)$ есть вектор $\vec{V}_{\text{ср}}$, равный отношению вектора перемещения $\Delta\vec{r} = \vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)$ к величине интервала времени Δt (рис. 1.1.3):

$$\vec{V}_{\text{ср}} = \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}, \tag{1.1.6}$$

Направление средней скорости совпадает с направлением вектора перемещения $\Delta\vec{r}$. Средняя скорость характеризует движение точки в течение всего промежутка времени Δt, для которого она определена.

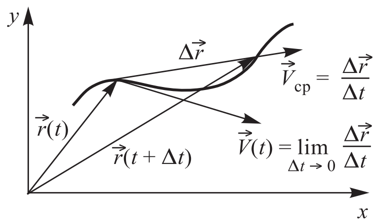


Рис. 1.1.3. Средняя и мгновенная скорость точки

На практике часто используют понятие средней **путевой**скорости, которое определяют как отношение пути, пройденного точкой, ко времени его прохождения. Важно иметь в виду, что величина (модуль) средней скорости в общем случае не совпадает со средней путевой скоростью. Они различны, например, при возвратно-поступательном движении по прямой, при криволинейном движении и т.п.

Мгновенной скоростью (или просто *скоростью*) $\vec{V}(t)$ точки в данной системе отсчета в момент времени t называется предел средней скорости при неограниченном уменьшении интервала времени Δt:

$$\vec{V}(t) = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}. \tag{1.1.7}$$

Компонентами вектора скорости являются производные по времени от компонент радиус-вектора точки:

$$\vec{V}(t) = \{\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t)\}. \tag{1.1.8}$$

Вектор скорости направлен *по касательной* к траектории точки.

Сложение скоростей. Важной задачей кинематики является установление связи между характеристиками движения точки *относительно разных систем отсчета*. Пусть одна система отсчета, которую мы будем называть подвижной, движется поступательно со скоростью$\vec{V}_0$относительно другой системы, которую будем называть неподвижной. Пусть скорость точки относительно подвижной системы отсчета равна $\vec{V}'$. Тогда скорость $\vec{V}$ этой же точки относительно неподвижной системы находится из соотношения, называемого законом *сложения скоростей*:

$$\vec{V} = \vec{V}' + \vec{V}_0 \tag{1.1.9}$$

Ускорение. *Среднее ускорение* точки в данной системе отсчета на интервале времени $(t,\ t+\Delta t)$ есть вектор $\vec{a}_{\text{ср}}$, равный отношению вектора приращения скорости $\Delta\vec{V} = \vec{V}(t+\Delta t) - \vec{V}(t)$ на этом интервале к величине интервала времени Δt (рис. 1.1.4):

$$\vec{a}_{\text{ср}} = \frac{\vec{V}(t+\Delta t) - \vec{V}(t)}{\Delta t} = \frac{\Delta\vec{V}}{\Delta t}. \qquad (1.1.10)$$

Мгновенным ускорением (или просто *ускорением*) точки $\vec{a}(t)$ в момент времени t в данной системе отсчета называется предел среднего ускорения при стремлении интервала времени Δt к нулю:

$$\vec{a}(t) = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{V}}{\Delta t} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \dot{\vec{V}} = \ddot{\vec{r}}. \qquad (1.1.11)$$

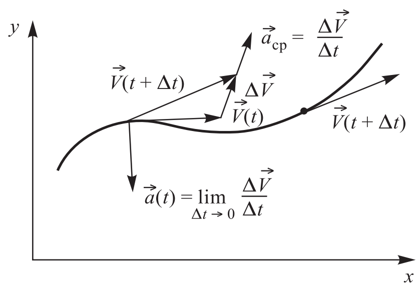


Рис. 1.1.4. Среднее и мгновенное ускорение материальной точки

Сложение ускорений. Рассмотрим две системы отсчета: неподвижную систему и систему, движущуюся поступательно относительно неподвижной с ускорением$\vec{a}_0$. Если ускорение точки относительно подвижной системы отсчета равно $\vec{a}'$, то ускорение $\vec{a}$ этой же точки относительно неподвижной системы находится из соотношения, называемого законом *сложения ускорений*:

$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_0 \qquad (1.1.12)$$

Прямолинейное равномерное и равнопеременное движения. По форме траектории движения делятся на прямолинейные и криволинейные. В первом случае траекторией движения точки в данной системе отсчета является прямая линия, во втором — некоторая кривая. Для описания *прямолинейного* движения удобно совместить координатную ось (например, ось OX) с направлением, вдоль которого происходит движение.

Равномерным называется движение с постоянной по модулю скоростью. При *равномерном прямолинейном движении* точки мгновенная скорость не зависит от времени и в каждой точке траектории направлена вдоль траектории. Средняя скорость за любой промежуток времени равна мгновенной скорости. Кинематическое уравнение движения принимает вид:

$$x(t) = x_0 + V_{x_0}t, \tag{1.1.13}$$

где x_0 — начальная координата точки, V_{x_0} — проекция скорости точки на координатную ось OX.

Равнопеременное прямолинейное движение — это движение точки по прямой с постоянным по величине и по направлению ускорением. При этом среднее ускорение равно мгновенному ускорению. Если направление ускорения $\vec{a}$ совпадает с направлением скорости точки, то движение называется *равноускоренным*, в противоположном случае — *равнозамедленным*.

При равнопеременном прямолинейном движении зависимость скорости и координат точки от времени выражается следущими кинематическими уравнениями:

$$V_x(t) = V_{x_0} + a_x t, \qquad x(t) = x_0 + V_{x_0}t + \frac{a_x t^2}{2}. \tag{1.1.14}$$

Важно помнить, что величины, входящие в уравнения (1.1.13), (1.1.14), являются *алгебраическими*, т.е. могут иметь разные знаки в зависимости от того, сонаправлен или противонаправлен соответствующий вектор выбранному направлению координатной оси.

Зависимости скорости, координат и пути от времени. При решении задач и анализе результатов удобно представлять зависимости координаты и скорости тела от времени графически. Примеры таких представлений для прямолинейного равномерного и равнопеременного движений приведены на рис. 1.1.5 и 1.1.6 соответственно.

При построении графиков необходимо учитывать, что тангенс угла наклона касательной к кривой $x = x(t)$ в какой-либо момент времени пропорционален скорости точки в этот момент времени, а тангенс угла наклона касательной к кривой $V = V(t)$ пропорционален ускорению точки в данный момент. По графику зависимости $a = a(t)$ можно найти изменение скорости за промежуток времени от t_1 до t_2: оно равно площади под кривой $a = a(t)$ в пределах от t_1 до t_2. Аналогично, по графику зависимости $V = V(t)$ можно найти изменение координаты точки за время $(t_2 - t_1)$.

Криволинейное движение. Равномерное движение по окружности. Простейшей моделью *криволинейного* движения является *равномерное движение по окружности*. В этом случае точка движется по окружности с постоянной по величине скоростью V. Положение точки удобно описывать угломφ, который составляет радиус-вектор точки с некоторой осью, например с осью OX (см. рис. 1.1.7).

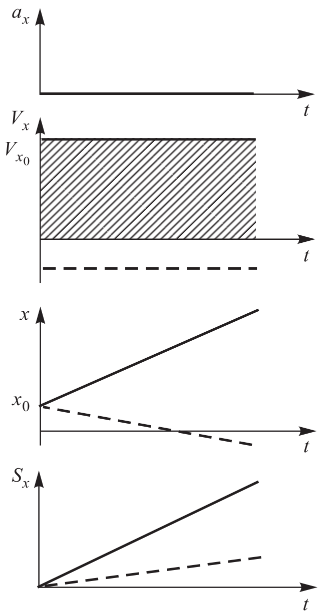


Рис. 1.1.5. Равномерное движение

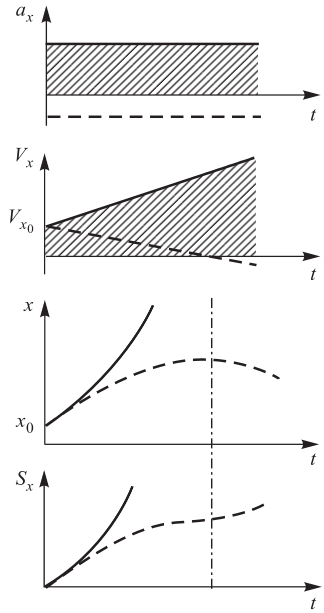


Рис. 1.1.6. Равнопеременное движение

Угловая скорость. Период и частота обращения. Величиной *угловой скорости* точки ω при движении по окружности называют отношение приращения угла поворота $\Delta\varphi$ ее радиуса-вектора ко времени Δt, за которое этот поворот произошел. *Периодом* T движения точки по окружности называют время, за которое точка совершает полный оборот. *Частота обращения* ν — это величина, обратная периоду. Угловая скорость, частота и период обращения при равномерном движении по окружности связаны между собойсоотношениями:

$$T = \frac{1}{\nu} = \frac{2\pi}{\omega}. \tag{1.1.15}$$

Линейная скорость V движения по окружности выражается через угловую скорость ω и радиус окружности R по формуле

$$V = \omega R. \tag{1.1.16}$$

Ускорение тела при движении по окружности. При движении тела по окружности вектор скорости изменяется, поэтому у тела существует *центростремительное* ускорение, направленное по радиусу окружности к ее центру и по модулю равное

$$a = \frac{V^2}{R} = \omega^2 R. \tag{1.1.17}$$

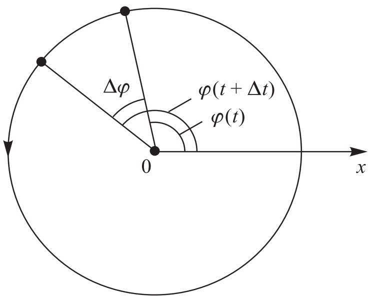


Рис. 1.1.7. Движение материальной точки по окружности

Тангенциальное и нормальное ускорения. При криволинейномдвижении точки часто бывает удобно разложить ее ускорение на две составляющие (рис. 1.1.8):

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n = \vec{\tau} a_\tau + \vec{n} a_n, \tag{1.1.18}$$

где $\vec{\tau}$ — единичный вектор, направленный по касательной к траектории в данной точке, $\vec{n}$ — единичный вектор по нормали к траектории, направленный к центру кривизны. Составляющая $\vec{a}_\tau$ вектора ускорения, направленная по касательной к траектории, называется *тангенциальным* (касательным) ускорением. Тангенциальное ускорение характеризует изменение вектора скорости по модулю. Вектор $\vec{a}_\tau$ направлен в сторону движения точки при возрастании ее скорости и в противоположную сторону — при убывании скорости. Составляющая $\vec{a}_n$ вектора ускорения, направленная по нормали к траектории в данной точке, называется *нормальным* ускорением. Нормальное ускорение характеризует изменение вектора скорости по направлению при криволинейном движении. Величины тангенциального и нормального ускорения вычисляются по формулам:

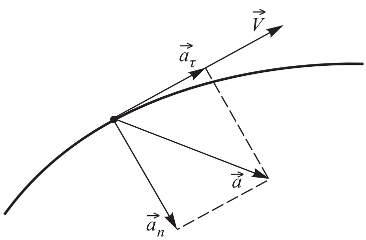


Рис. 1.1.8. Тангенциальная и нормальная составляющие вектора ускорения

$$a_\tau = \dot{V} = \frac{d|\vec{V}|}{dt}, \quad a_n = \frac{V^2}{R}, \tag{1.1.19}$$

где R — радиус кривизны траектории в данной точке. При движении точки по окружности нормальное ускорение совпадает с центростремительным ускорением.

Свободное падение тел. Ускорение свободно падающего тела. *Свободным падением* называется движение, которое совершает тело только под действием притяжения Земли, без учета сопротивления воздуха. Ускорение $\vec{g}$, с которым движется вблизи поверхности Земли материальная точка, на которую действует только сила тяжести, называется *ускорением свободного падения*. Ускорение свободного падения не зависит от массы тела.

Движение тела, брошенного под углом к горизонту. Дальность и высота полета. При описании движения тела у поверхности Земли удобно выбрать систему координат так, чтобы одна из координатных осей (обычно ось OX) была направлена горизонтально, а другая (обычно OY) — вертикально (рис. 1.1.9). Тогда движение по оси OX будет равномерным, а по оси OY — равнопеременным. В большинстве задач начало координат удобно совместить с точкой, откуда тело начинает движение.

Для тела, брошенного от поверхности Земли со скоростью V_0 под углом α к горизонту, в системе координат, изображенной на рис. 1.1.9,

$$x(t) = V_0 t \cos\alpha, \quad y(t) = V_0 t \sin\alpha - \frac{gt^2}{2}. \tag{1.1.20}$$

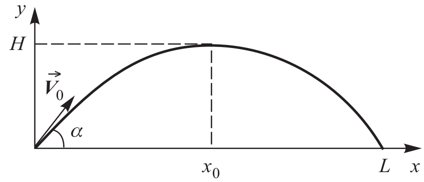


Рис. 1.1.9. Движение тела, брошенного под углом к горизонту

Исключая из этих соотношений время t, получаем *уравнение траектории тела*

$$y(x) = \operatorname{tg}\alpha \cdot x - \frac{g}{2V_0^2\cos^2\alpha} \cdot x^2, \tag{1.1.21}$$

которое является уравнением параболы. В точке с координатой

$$x_0 = \frac{V_0^2}{g}\sin\alpha\cos\alpha \tag{1.1.22}$$

тело достигает наибольшей высоты

$$y(x_0) \equiv H = \frac{V_0^2}{2g}\sin^2\alpha \tag{1.1.23}$$

Величины $L = 2x_0 = \dfrac{2V_0^2}{g}\sin\alpha\cos\alpha$ и $H = \dfrac{V_0^2}{2g}\sin^2\alpha$ называются, соответственно, *дальностью и высотой полета*.

Поступательное и вращательное движения твердого тела. *Твердое тело* — это модель, применяемая в случаях, когда изменением формы и размеров тела при его движении можно пренебречь. Модель рассматривается как система материальных точек, расстояния между которыми остаются неизменными.

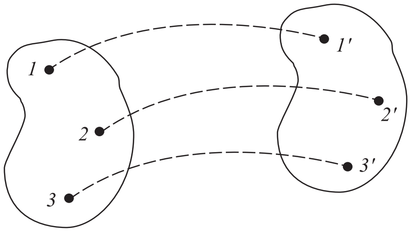


Рис. 1.1.10. Поступательное движение твердого тела

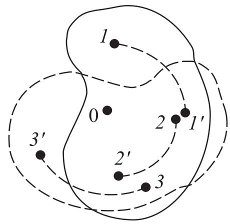


Рис. 1.1.11. Вращательное движение твердого тела

Простейшие модели движения твердого тела — это поступательное и вращательное движения. *Поступательным движением* твердого тела (рис. 1.1.10) называют такое движение, при котором траектории всех точек тела одинаковы.

При этом тело не поворачивается и каждая линия, соединяющая любые две точки тела, переносится параллельно самой себе. При поступательном движении все точки тела в данный момент времени имеют одинаковые скорости и ускорения. Поэтому, зная движение какой-то одной точки тела, мы можем однозначно определить движение всех его остальных точек.

Вращательным движением называется такое движение твердого тела, при котором все точки тела движутся по окружностям, центры которых лежат на одной прямой — оси вращения (рис. 1.1.11). Траектории всех точек лежат в плоскостях, параллельных друг другу и перпендикулярных оси вращения.

При таком движении различные точки тела за один и тот же промежуток времени проходят разные по длине пути. Линейная скорость v характеризует движение какой-либо одной точки тела, а не движение тела в целом. Поэтому для описания вращения тела используются такие величины, которые характеризуют движение всего тела, а не отдельных его точек. К этим величинам относятся: угол поворота φ, период вращения T, частота вращения $n = 1/T$, угловая скорость $\omega = 2\pi/T$.

Указания по решению задач

При решении задач кинематики нужно в первую очередь выбрать систему координат, задать ее начало и положительные направления координатных осей, а также выбрать начало отсчета времени.

В случае прямолинейного движения следует пользоваться системой координат, состоящей из одной координатной оси OX, вдоль которой происходит движение. В более сложных случаях нужно применять декартову прямоугольную систему координат с взаимно перпендикулярными осями OX и OY, пересекающимися в точке O, являющейся началом отсчета.

Описания движения в различных системах координат эквивалентны между собой, поскольку при известном расположении двух систем координат относительно друг друга по величинам, найденным в одной системе, можно определить соответствующие величины в другой. При решении задач следует выбирать такую систему координат, в которой уравнения, описывающие движение, являются наиболее простыми.

При составлении кинематических уравнений очень важен вопрос о знаках перед модулями проекций $\vec{r}$, $\vec{V}$ и $\vec{a}$. Если координата отсчитывается в положительную сторону от начала O, то ей приписывается знак плюс. Проекции скоростей и ускорений считаются положительными, если направление соответствующей составляющей совпадает с положительным направлением оси, в противном случае они пишутся со знаком минус.

При исследовании движения нескольких тел рекомендуется пользоваться одной системой координат. В некоторых случаях бывает удобно связать систему координат с одним из движущихся тел и рассматривать движение остальных тел относительно избранного.

Примеры решения задач

1.1.1. Пассажир метрополитена наблюдает отправление поезда. Находясь на платформе у головы поезда (у первого вагона), он замечает, что с момента отправления поезда этот вагон прошел мимо него за время $\tau_1 = 5$ с. Считая движение поезда равноускоренным, найти, за какое время τ_2 мимо пассажира пройдет второй вагон.

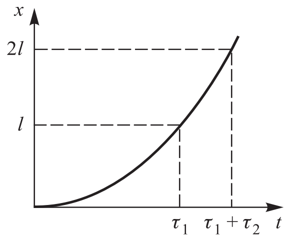
Решение: Поместим начало координат в ту точку платформы, в которой находится наблюдатель, координатную ось OX направим в сторону движения поезда, отсчет времени будем вести с момента отправления поезда. Тогда координата головы поезда будет описываться следующим кинематическим уравнением:

$$x = \frac{at^2}{2},$$

где a — ускорение поезда. Обозначив через l длину одного вагона, можно записать:

$$l = \frac{a\tau_1^2}{2}, \quad 2l = \frac{a(\tau_1 + \tau_2)^2}{2}.$$

Исключая из этих соотношений ускорение поезда, получаем квадратное уравнение относительно τ_2: $\tau_2^2 + 2\tau_1\tau_2 - \tau_1^2 = 0$, откуда $\tau_2 = \tau_1\left(-1 \pm \sqrt{2}\right)$. Отбрасывая не имеющий физического смысла отрицательный корень, получаем ответ:



$$\tau_2 = \tau_1\left(\sqrt{2} - 1\right) \cong 2,1 \text{ с}.$$

Проведенное решение иллюстрируется графиком зависимости координаты начала первого вагона от времени, изображенным на рисунке. Построение подобных графиков при решении задач, посвященных кинематике прямолинейного движения, существенно облегчает их понимание.

1.1.2. В момент, когда опоздавший пассажир вышел на перрон вокзала, с ним поравнялось начало предпоследнего вагона уходящего поезда. Желая определить, на сколько он опоздал, пассажир измерил время t_1, за которое мимо него прошел предпоследний вагон, и время t_2, за которое мимо него прошел последний вагон. Оказалось, что $t_1 = 9$ с, а $t_2 = 8$с. Считая, что поезд двигался равноускоренно и длина вагонов одинакова, найти, на какое время τ пассажир опоздал к отходу поезда.

Решение: Обозначим через l длину вагона, а через a — ускорение поезда. В момент, когда пассажир вышел на перрон, поезд уже двигался равноускоренно в течение времени τ и его перемещение составило величину $x_1 = a\tau^2/2$. За время $\tau + t_1$ поезд переместился на расстояние $x_2 = a(\tau + t_1)^2/2$. Поскольку перемещение поезда за время t_1 равно длине вагона, для предпоследнего вагона можно записать:

$$l = x_2 - x_1 = \frac{a(\tau + t_1)^2}{2} - \frac{a\tau^2}{2}.$$

Аналогично, для последнего вагона:

$$l = \frac{a(\tau + t_1 + t_2)^2}{2} - \frac{a(\tau + t_1)^2}{2} = \frac{at_2}{2}(2\tau + 2t_1 + t_2).$$

Из этих соотношений вытекает равенство:

$$(\tau + t_1)^2 - \tau^2 = t_2(2\tau + 2t_1 + t_2).$$

Выражая отсюда τ, получаем ответ:

$$\tau = \frac{t_2^2 + 2t_1t_2 - t_1^2}{2(t_1 - t_2)} = 63,5 \text{ с}.$$

1.1.3. В кабине лифта высотой H= 2,5 м, движущейся с ускорением $a = 0,8$ м/с^2 , направленным вниз, с высоты h= 0,5 м от пола вертикально вверх бросают маленький шарик. С какой начальной скоростью V_0 относительно лифта брошен шарик, если после броска он поднялся точно до потолка кабины?

Решение: При решении задачи будем использовать неподвижную систему координат, начало которой совместим с полом кабины лифта в момент броска шарика, а ось OY направим вертикально вверх. Обозначим через $y_{\text{ш}}$ и V координату шарика и его скорость, через $y_{\text{к}}$ и U координату потолка кабины и ее скорость. Пусть скорость кабины в момент броска равна U_0 и направлена вверх (ниже мы убедимся в том, что ни от величины, ни от направления скорости кабины в момент броска ответ не зависит, но для ясности рассуждений введем на данном этапе решения эту скорость). Для координат и скоростей шарика и потолка кабины справедливы кинематические уравнения:

$$y_{\text{ш}}(t) = h + (V_0 + U_0)\,t - \frac{gt^2}{2}, \quad V(t) = V_0 + U_0 - gt,$$

$$y_{\text{к}}(t) = H + U_0 t - \frac{at^2}{2}, \quad U(t) = U_0 - at,$$

первые два из которых записаны при стандартном предположении о том, что сопротивлением воздуха при движении шарика можно пренебречь. Начало отсчета времени совпадает с моментом броска шарика.

Согласно условию задачи, шарик после броска поднимается точно до потолка кабины. Обозначив этот момент времени через t_0, можно записать следующие соотношения:

$$y_{\text{ш}}(t_0) = y_{\text{к}}(t_0), \qquad V(t_0) = U(t_0).$$

Второе соотношение дает $t_0 = V_0/(g - a)$. Подставляя найденное t_0 в первое соотношение, после несложных преобразований находим ответ:

$$V_0 = \sqrt{2\,(H - h)\,(g - a)} = 6 \text{ м/с}.$$

1.1.4. Жонглер бросает вертикально вверх шарики с одинаковой скоростью через равные промежутки времени. При этом пятый шарик жонглер бросает в тот момент, когда первый шарик возвращается в точку бросания. Найти максимальное расстояниеS_{max} между первым и вторым шариками, если начальная скорость шариков $V_0 = 5$ м/с. Ускорение свободного падения принять равным $g = 10$ м/с^2. Сопротивлением воздуха пренебречь.

Решение: Для описания движения шариков выберем координатную систему с началом в точке бросания, направив ось OY вертикально вверх. Время будем отсчитывать с момента бросания первого шарика.

Тогда координаты первого и второго шариков будут описываться следующими кинематическими уравнениями:

$$y_1 = V_0 t - \frac{gt^2}{2}, \quad y_2 = V_0(t - T) - \frac{g(t-T)^2}{2},$$

где T — промежуток времени между бросаниями шариков. Поскольку полное время полета каждого из шариков $t_0 = \dfrac{2V_0}{g}$, а по условию задачи жонглер бросает пятый шарик в момент, когда первый шарик возвращается в исходную точку, $T = \dfrac{t_0}{4} = \dfrac{V_0}{2g}$, причем первый и второй шарик находятся в полете одновременно при $T \leqslant t \leqslant 4T$ (см. рисунок, на котором сплошными линиями изображены зависимости координат шариков от времени). Расстояние между первым и вторым шариками

$$S = |y_1 - y_2| = \left|V_0 T + \frac{gT^2}{2} - gTt\right| \quad \text{при} \quad T \leqslant t \leqslant 4T$$

.

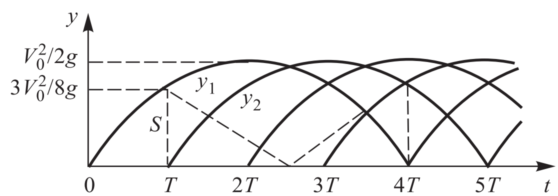
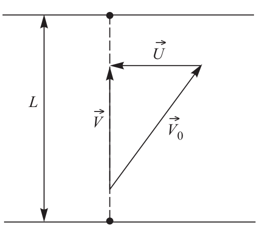


График зависимости этой величины от времени изображен на рисунке штриховой линией. Анализ последнего выражения показывает, что оно достигает максимума при $t = T$ и при $t = 4T$, т.е. в момент бросания второго шарика и в момент возвращения первого шарика в исходную точку. Подставляя в выражение для расстояния между шариками любое из этих значений времени, получаем ответ: $S_{\max} = \dfrac{3V_0^2}{8g} = 0,9375$ м.

1.1.5. Пловец переплывает реку шириной L по прямой, перпендикулярной берегу, и возвращается обратно, затратив на весь путь время $t_1 = 4$ мин. Проплывая такое же расстояние L вдоль берега реки и возвращаясь обратно, пловец затрачивает время $t_2 = 5$ мин. Во сколько раз α скорость пловца относительно воды превышает скорость течения реки?



Решение: Согласно закону сложения скоростей скорость пловца относительно неподвижной системы отсчета $\vec{V}$ равна векторной сумме его скорости относительно воды $\vec{V}_0$ и скорости течения $\vec{U}$: $\vec{V} = \vec{V}_0 + \vec{U}$. В первом случае, когда пловец пересекает реку по прямой, перпендикулярной берегу, $\vec{V} \perp \vec{U}$ и векторы $\vec{V}$, $\vec{V}_0$ и $\vec{U}$ образуют прямоугольный треугольник (см. рисунок). Следовательно, в этом случае $V = \sqrt{V_0^2 - U^2}$ и время, за которое пловец переплывает реку туда и обратно,

$$t_1 = \frac{2L}{\sqrt{V_0^2 - U^2}}.$$

Во втором случае, когда пловец плывет вдоль берега, его скорость в неподвижной системе отсчета равна $V_1 = V_0 + U$ при движении по течению и $V_2 = V_0 - U$ при движении против течения. Следовательно, время, которое пловец затрачивает для того, чтобы проплыть вдоль берега расстояние L и вернуться обратно,

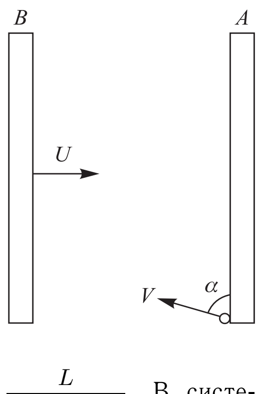
$$t_2 = \frac{L}{V_0 + U} + \frac{L}{V_0 - U} = \frac{2LV_0}{V_0^2 - U^2}.$$

Разрешая полученную систему уравнений относительно V_0 и U, находим:

$$V_0 = \frac{2Lt_2}{t_1^2}, \; U = \frac{2L}{t_1^2}\sqrt{t_2^2 - t_1^2}.$$

Ответ: $\alpha = \dfrac{V_0}{U} = \dfrac{t_2}{\sqrt{t_2^2 - t_1^2}} = \dfrac{5}{3}$.

1.1.6. Шарик пренебрежимо малой массы начинает скольжение в горизонтальной плоскости от неподвижной доски A со скоростью $V = 2$ м/с под углом $\alpha = 30°$ к ней. Доска B, параллельная доске A, движется перпендикулярно плоскости доски с некоторой скоростью U. Найти U, если время движения шарика от доски A до встречи с доской B в $k = 2$ раза превышает время его движения обратно. Удар шарика о доску B считать упругим. Трением пренебречь.

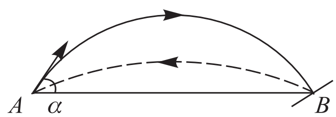


Решение: Пусть расстояние между досками в начальный момент равно L. По закону сложения скоростей величина нормальной к доске B составляющей относительной скорости шарика до удара равна $V_{\perp\text{отн}} = V\sin\alpha + U$. Следовательно, время движения шарика до удара о доску B $t_1 = \dfrac{L}{V\sin\alpha + U}$. В системе отсчета, связанной с доской B, скорость шарика после упругого удара остается той же самой по величине, а нормальная к доске составляющая скорости меняет направление на противоположное: $V'_{\perp\text{отн}} = -V\sin\alpha - U$. Переходя в неподвижную систему отсчета по формуле $V'_{\perp} = V'_{\perp\text{отн}} - U$, находим, что после удара величина составляющей скорости шарика, нормальной к доске B, станет равной $V\sin\alpha + 2U$. Поэтому время обратного движения шарика до доски A составит

$$t_2 = \frac{L - Ut_1}{V\sin\alpha + 2U}.$$

Учитывая, что $L - Ut_1 = Vt_1\sin\alpha$ и используя условие $t_1 = kt_2$, получаем ответ: $U = \dfrac{(k-1)V\sin\alpha}{2} = 0,5$ м/с.

1.1.7. Шарик, брошенный из точки A под углом α к горизонту, в точке B, лежащей на одной горизонтали с точкой A, ударяется огладкую площадку, наклоненную к горизонту. После упругого удара



шарик возвращается в исходную точку A, затратив на полет в $k = \sqrt{3}$ раз меньшее время. Найти угол α, под которым тело было брошено из точки A.

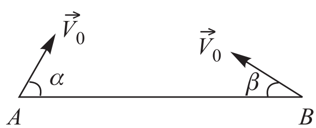
Решение: Дальность полета тела, брошенного под углом α к горизонту со скоростью V_0, равна $L = V_0^2\sin 2\alpha/g$, а время полета $t_{''\text{ß}} = 2V_0\sin\alpha/g$. Поскольку модуль скорости шарика при упругом ударе не изменяется, а дальность полета шарика в обе стороны одинакова, справедливо равенство:

$$\frac{V_0^2\sin 2\alpha}{g} = \frac{V_0^2\sin 2\beta}{g},$$

где β — угол, под которым направлена скорость шарика после удара. Отсюда следует, что

$$\sin 2\alpha = \sin 2\beta \quad \textbf{при} \quad \alpha < \frac{\pi}{2},\ \beta < \frac{\pi}{2}$$

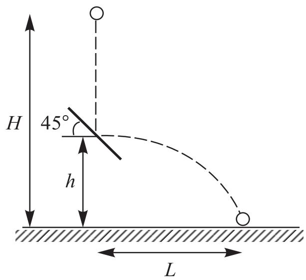
.



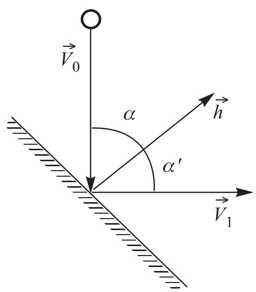
Этому уравнению удовлетворяют два корня: $\beta = \alpha$ и $\beta = \dfrac{\pi}{2} - \alpha$, причем условию задачи соответствует второй корень. Следовательно, $\sin\beta = \cos\alpha$. Поскольку отношение времен полета $k = \dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \operatorname{tg}\alpha = \sqrt{3}$, ответ имеет вид:

$$\alpha = \operatorname{arctg} k = \operatorname{arctg}\sqrt{3} = 60^\circ.$$

1.1.8. Маленький шарик падает с высоты $H = 2$ м без начальной скорости. На высоте $h = 0,5$ м над землей шарик испытывает абсолютно упругий удар о гладкую закрепленную площадку, наклоненную под углом 45° к горизонту. Найти дальность полета шарика L.

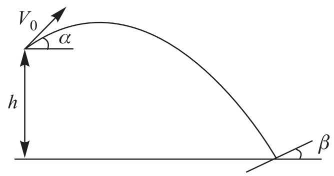


Решение: Рассмотрим соударение шарика с закрепленной подставкой. При абсолютно упругом ударе кинетическая энергия шарика сохраняется, откуда следует, что модуль скорости шарика после удара V_1 равен модулю его скорости перед ударом V_0. При этом нормальная площадке составляющая скорости шарика после удара меняет направление на противоположное, а касательная площадке составляющая скорости остается неизменной. Следовательно, при упругом соударении с неподвижной площадкой угол α' между нормалью к площадке $\vec{n}$ и скоростью после удара $\vec{V}_1$ равен углу α между нормалью и скоростью перед ударом $\vec{V}_0$. По условию задачи $\alpha = 45°$, поэтому $\vec{V}_1 \perp \vec{V}_0$ и скорость шарика непосредственно после удара направлена горизонтально.

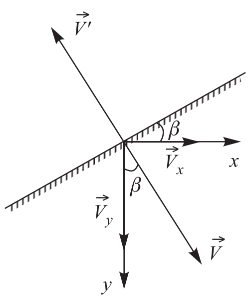


По закону сохранения энергии, при падении шарика с высоты $H - h$ величина его скорости $V_0 = \sqrt{2g(H-h)}$. Падение шарика после соударения с площадкой происходит с начальной горизонтальной скоростью $V_1 = V_0$. Дальность полета шарика равна $L = V_1\tau$, где $\tau = \sqrt{2h/g}$ — время падения с высоты h. Окончательно, $L = 2\sqrt{h(H-h)} \cong 1,7$ м.

1.1.9. Шарик бросают с башни высотой $h = 4,9$ м под углом $\alpha = 30°$ к горизонту со скоростью $V_0 = 7$ м/с. При падении на землю шарик упруго ударяется о наклонную плоскость и возвращается в точку бросания по той же траектории. Какой угол β составляет наклонная плоскость с горизонтом? Ускорение свободного падения принять $g = 10$ м/с^2.



Решение: Для того, чтобы после упругого удара о наклонную плоскость шарик вернулся в точку бросания по той же траектории, что и при падении, нужно, чтобы плоскость была расположена перпендикулярно его скорости $\vec{V}$ непосредственно перед ударом. Поэтому угол β между наклонной плоскостью и горизонталью равен углу между скоростью шарика в момент падения $\vec{V}$ и вертикалью (см. рисунок). Обозначив через V_x величину горизонтальной составляющей скорости

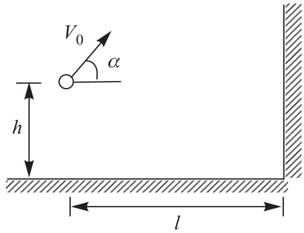


шарика, имеем: $\sin\beta = V_x/V$, причем $V_x = V_0 \cos\alpha$. Для определения величины скорости тела при падении на наклонную плоскость воспользуемся законом сохранения энергии, согласно которому

$$\frac{mV^2}{2} = mgh + \frac{mV_0^2}{2}.$$

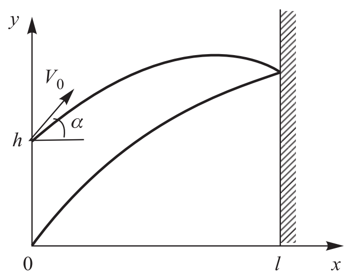
Отсюда $V = \sqrt{V_0^2 + 2gh}$. Объединяя записанные выражения, получаем ответ: $\beta = \arcsin \dfrac{\cos\alpha}{\sqrt{1 + 2gh/V_0}} = \arcsin 0,5 = 30°$.

1.1.10. Мальчик бросает мяч в направлении вертикальной стены так, чтобы мяч, отскочив от стены, упал точно к его ногам. Каковадолжна быть начальная скорость мяча V_0, если бросок производится с высоты $h = 1,5$ м под углом $\alpha = 45°$ к горизонту? Расстояние от



мальчика до стены $l = 6$ м. Удар мяча о стену считать абсолютно упругим, ускорение свободного падения принять $g = 10$ м/с^2.

Решение: При решении задачи используем стандартное предположение о том, что сопротивление воздуха при движении мяча можно не учитывать. Для того, чтобы мяч, отскочив от стены, упал точно к ногам мальчика, траектория мяча должна иметь вид, изображенный на рисунке. При упругом ударе о неподвижную стенку нормальная к стенке составляющая скорости мяча меняет направление на противоположное, оставаясь такой же по величине; касательная к стенке составляющая скорости мяча не меняется. В результате угол между нормалью к стенке и скоростью мяча перед ударом оказывается равным по величине углу между нормалью к стенке и скоростью мяча после удара.



Обозначим через t_0 время полета мяча. За это время он проходит по горизонтали путь $2l$. Учитывая, что горизонтальная составляющая скорости мяча равна $V_0 \cos\alpha$ и при полете не меняется по величине, можно записать равенство

$$2l = V_0 \cos\alpha \cdot t_0,$$

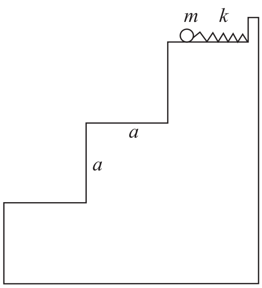
откуда время полета мяча $t_0 = 2l/(V_0 \cos\alpha)$. С другой стороны, по условию задачи в момент времени t_0вертикальная координата мяча должна обратиться в нуль, т.е.

$$y(t_0) = h + V_0 \sin\alpha \cdot t_0 - \frac{gt_0^2}{2} = 0.$$

Подставляя сюда найденное t_0, после несложных преобразований находим ответ:

$$V_0 = \frac{l}{\cos\alpha}\sqrt{\frac{2g}{h+2l\operatorname{tg}\alpha}} \approx 10 \text{ м/с}.$$

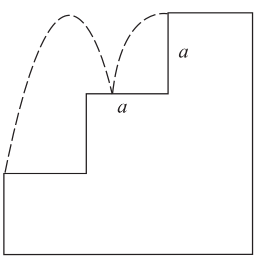
1.1.11. Лестница состоит из трех одинаковых гладких ступенек ширины $a = 30$ см и такой же высоты. На верхней ступеньке расположена в плоскости рисунка невесомая пружина жесткостью $k = 30$ Н/м, правым концом прикрепленная к неподвижной стенке, а левым — упирающаяся в лежащий на ступеньке маленький шарик массой $m = 100$ г. Шарик сдвигают вправо, сжимая пружину, после чего отпускают без начальной скорости. До какой максимальной величины $\Delta l_{\max}$ можно сжать пружину, чтобы выпущенный шарик по одному разу коснулся средней и нижней ступенек? Удар шарика о ступеньку считать абсолютно упругим, трение и сопротивление воздуха не учитывать. Ускорение свободного падения принять $g = 10$ м/с^2.



Решение: Сжатая пружина сообщает шарику начальную скорость V_0, величина которой может быть найдена из закона сохранения энергии:

$$\frac{k(\Delta l)^2}{2} = \frac{mV_0^2}{2}.$$

Отсюда $V_0 = \Delta l\sqrt{k/m}$, т.е. начальная скорость шарика пропорциональна сжатию пружины. Покинув с такой скоростью верхнюю ступеньку, шарик летит по параболической траектории до соударения с другими ступеньками. При упругом ударе о каждую из них горизонтальная составляющая скорости шарика не изменяется, а вертикальная составляющая скорости шарика меняет направление на противоположное, сохраняя свою величину. В результате угол между нормалью к ступеньке и скоростью шарика перед соударением оказывается равным по величине углу между нормалью к ступеньке и скоростью шарика после соударения; модуль скорости шарика после соударений не изменяется. По условию задачи максимальная начальная скорость шарика отвечает случаю, когда шарик отскакивает от средней ступеньки и попадает на самый край нижней ступеньки. Соответствующая траектория шарика изображена на рисунке штриховой линией. Заметим, что если



начальная скорость шарика превысит данное значение, он пролетит над нижней ступенькой, не коснувшись ее. Дальнейшее увеличение начальной скорости шарика может привести к тому, что он не попадет и на среднюю ступеньку.

Время падения шарика, не имеющего вертикальной скорости, с высоты a равно $t_1 = \sqrt{2a/g}$. Такое же время шарик будет подниматься до уровня верхней ступеньки после соударения со средней ступенькой. Наконец, падать с высоты верхней ступеньки до удара о нижнюю ступеньку шарик будет в течение времени $t_2 = \sqrt{4a/g}$. Таким образом, полное время движения шарика с момента, когда он покидает верхнюю ступеньку, до соударения с нижней ступенькой равно:

$$t_0 = 2t_1 + t_2 = 2\sqrt{\frac{a}{g}}\left(\sqrt{2}+1\right).$$

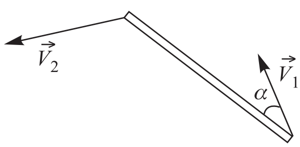
За это время шарик смещается по горизонтали на расстояние $2a$. Следовательно,

$$2a = 2V_0\sqrt{\frac{a}{g}}\left(\sqrt{2}+1\right).$$

Объединяя последнее равенство с выписанным соотношением между начальной скоростью шарика и сжатием пружины, получаем ответ:

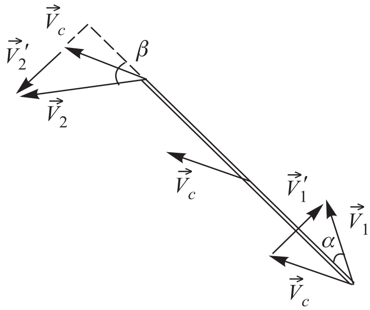
$$\Delta l_{\max} = \sqrt{\frac{mg\,a}{k}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}+1} \cong 4,14 \text{ см}.$$

1.1.12. Стержень длиной $l = 0,85$ м движется в горизонтальной плоскости. В некоторый момент времени скорости концов стержня равны $V_1 = 1$ м/с и $V_2 = 1,5$ м/с, причем скорость первого из них направлена под углом $\alpha = 30^\circ$ к стержню. Какова угловая скорость ω вращения стержня вокруг его центра?



Решение: Поскольку скорости концов стержня в неподвижной системе отсчета различны, он совершает относительно этой системы сложное движение, представляющее собой сумму поступательного и вращательного движений. При этом скорости разных точек стержня различны. Для определения угловой скорости вращения стержня удобно перейти в систему отсчета, поступательно движущуюся вместе с его центром. С этой целью нужно вначале определить скорость центра стержня относительно неподвижной системы отсчета.

Из геометрических соображений ясно, что в данной системе радиус-вектор центра стержня равен полусумме радиус-векторов его



концов: $\vec{r}_c = \frac{1}{2}(\vec{r}_1 + \vec{r}_2)$. Дифференцирование этого равенства по времени дает нам аналогичное соотношения для скорости центра стержня: $\vec{V}_c = \frac{1}{2}\left(\vec{V}_1 + \vec{V}_2\right)$. Согласно закону сложения скоростей скорости концов стержня в системе отсчета, связанной с его центром, выражаются следующим образом (см. рисунок):

$$\vec{V'}_1 = \vec{V}_1 - \vec{V}_c = \frac{1}{2}\left(\vec{V}_1 - \vec{V}_2\right), \quad \vec{V'}_2 = \vec{V}_2 - \vec{V}_c = \frac{1}{2}\left(\vec{V}_2 - \vec{V}_1\right).$$

Из постоянства длины стержня вытекает, что проекции скоростей его концов на направление стержня в каждый момент времени совпадают:

$$V_1 \cos\alpha = V_2 \cos\beta$$

Поэтому $\vec{V}_1'$ и $\vec{V}_2'$ перпендикулярны стержню, причем $V_1' = V_2' = \omega \cdot \frac{l}{2}$.

Следовательно,

$$\omega = \frac{|\vec{V}_2 - \vec{V}_1|}{l} = \frac{V_1 \sin\alpha + V_2 \sin\beta}{l}$$

Учитывая, что $\cos\beta = \frac{V_1}{V_2}\cos\alpha$, получаем ответ:

$$\omega = \frac{1}{l}\left(V_1 \sin\alpha + \sqrt{V_2^2 - V_1^2 \cos^2\alpha}\right) \cong 2 \text{ рад/с}.$$

Задание для самостоятельной работы

1.1.13. Пуля, летящая со скоростью $V = 400$ м/с, попадает в земляной вал и проникает в него на расстояние $l = 20$ см. Какова скорость V_1 пули на расстоянии от поверхности земли, равном $l_1 = 10$ см? Силу сопротивления, действующую на пулю в земле, считать постоянной.

1.1.14. Пассажир, стоящий на перроне, заметил, что первый вагон электропоезда, приближающегося к станции, прошел мимо него в течение $t_1 = 4$ с, а второй — в течение $t_2 = 5$ с. Определить ускорение поезда a, если передний конец поезда остановился на расстоянии $L = 75$ м от пассажира. Движение поезда считать равнозамедленным.

1.1.15. Нарушитель правил дорожного движения промчался на автомобиле мимо поста ГАИ со скоростью $V_1 = 108$ км/час. Спустя $t_1 = 20$ с вслед за нарушителем отправился на мотоцикле инспектор ГАИ и, разгоняясь равноускоренно в течение $t_2 = 40$ с, набрал скорость $V_2 = 144$ км/час. На каком расстоянии S от поста ГАИ инспектор догонит нарушителя, двигаясь после разгона со скоростью V_2?

1.1.16. Ракета запущена вертикально вверх с поверхности Земли и на участке разгона имела постоянное ускорение $a = 19,6$ м/с^2. Какое время t_0 падала ракета с ускорением $g = 9,8$ м/с^2 после достижения наибольшей в полете высоты, если на участке разгона движение продолжалось в течение времени $\tau = 1$ мин?

1.1.17. Подъемный кран опускает бетонную плиту с постоянной скоростью $V = 1$ м/с. Когда плита находилась на расстоянии $h = 4$ м от поверхности земли, с нее упал небольшой камень. Каков промежуток времени τ между моментами, в которые камень и плита достигли земли? Ускорение свободного падения принять $g = 10$ м/с^2, толщиной плиты по сравнению с h пренебречь.

1.1.18. Ракета запущена вертикально вверх и во время работы двигателя имела постоянное ускорение $a = 5g$. Спустя $t_0 = 1$ мин после старта двигатель ракеты отключился. Через какое время τ после отключения двигателя ракета упала на землю? Сопротивление воздуха не учитывать.

1.1.19. Шарик бросают вертикально вверх со скоростью $V_0 = 5$ м/с. Пролетев расстояние $h = 1,05$ м, он упруго ударяется о потолок и падает вниз. Через какое время τ после начала движения шарик упадет на пол, если расстояние от пола до потолка $\mathrm{H} = 2,25$ м? Ускорение свободного падения принять равным $g = 10$ м/с^2.

1.1.20. Два тела начали падать с одной и той же высоты с интервалом $t_0 = 5$ с. Через какое время τ после начала падения второго тела расстояние между телами будет $d = 200$ м? Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2, сопротивление воздуха не учитывать.

1.1.21. Два тела скользят навстречу друг другу по наклонной плоскости, составляющей с горизонтом угол $\alpha = 2 \cdot 10^{-4}$ рад. В момент, когда расстояние между ними $S = 130$ см, скорость тела, движущегося вверх, составляет $V_1 = 5$ см/с, а скорость тела, движущегося вниз — $V_2 =$ 1,5 см/с. Какие пути S_1 и S_2 пройдут тела до места встречи? Ускорение свободного падения принять $g = 10$ м/с^2, трением тел о плоскость пренебречь.

1.1.22. Мяч брошен с поверхности земли под углом $\alpha = 45^\circ$ к горизонту с начальной скоростью $V = 10$ м/с в направлении вертикальной стенки, расстояние до которой $l = 7$ м. На какой высоте h мяч ударится о стенку? Сопротивлением воздуха пренебречь.

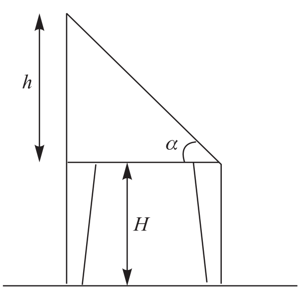
1.1.23. Человек бросает камень через забор высотой H= 2,5 м. На какое максимальное расстояние S он может отойти от забора, если бросок производится с высоты $h = 2$ м от поверхности земли со скоростью $V_0 =$ 5 м/с под углом $\alpha = 45^\circ$к горизонту? Ускорение свободного падения принять $g = 10$ м/с^2.

1.1.24. Под каким углом α к горизонту нужно бросить камень, чтобы отношение максимальной высоты подъема камня к дальности его полета составило $n = \sqrt{3}/4$?

1.1.25. Снаряд, вылетевший из пушки под углом $\alpha_1 = 15^\circ$ к горизонту, падает на расстоянии $L_1 = 5$ км. Какой будет дальность полета снаряда L_2 при угле вылета $\alpha_2 = 45^\circ$? Сопротивлением воздуха пренебречь.

1.1.26. Пушка делает два выстрела с интервалом $\tau = 10$ с. Каким будет расстояние l между снарядами спустя время $t = \tau$ после второго выстрела? Скорость снаряда при выстреле $V_0 = 300$ м/с, ствол пушки направлен под углом $\alpha = 60^\circ$ к горизонту. Ускорение свободного падения принять $g = 9,8$ м/с^2, силу сопротивления воздуха при движении снарядов не учитывать.

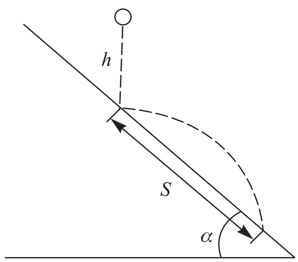
1.1.27. Брусок соскальзывает без трения с наклонной плоскости высотой $h =$1 м и с углом при основании $\alpha = 45^\circ$,а затем свободно



падает на пол с высоты $H = 1$ м. Найти угол β между направлением скорости и вертикалью в момент удара бруска о пол. Сопротивлением воздуха пренебречь.

1.1.28. С вершины холма бросили камень под углом к горизонту со скоростью $V_0 = 10$ м/с. В момент падения камня на склон холма величина угла между направлением скорости камня и горизонтом составила $\beta = 60^\circ$, а разность высот точек бросания и падения $\Delta h = 5$ м. Найти угол α между направлением начальной скорости камня V_0 и горизонтом. Ускорение свободного падения принять $g = 10$ м/с^2.

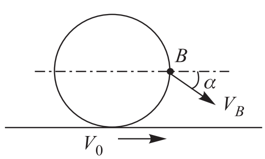
1.1.29. Маленький шарик падает с высоты $h = 50$ см на наклонную плоскость, составляющую угол $\alpha = 45^\circ$с горизонтом.Найти расстояние



S между точками первого и второго соударений шарика с наклонной плоскостью. Соударения считать абсолютно упругими, сопротивлением воздуха пренебречь.

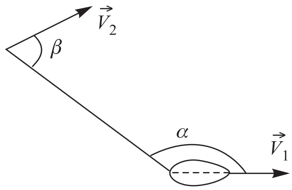
1.1.30. Самолет летит по дуге окружности радиуса R= 1 км, сохраняя одну и ту же высоту $h = l, 5$ км. С интервалом времени $\tau = 10,5$ с ($\cong$ $10\pi/3$ с) с него сбрасывают два мешка. На каком расстоянии S друг от друга упадут на землю эти мешки, если скорость самолета V= 100 м/с? Ускорение свободного падения принять $g = 10$ м/с^2, сопротивлением воздуха пренебречь.

1.1.31. Колесо катится без проскальзывания по ленте транспортера, движущейся горизонтально со скоростью $V_0 = 1$ м/с,в направлении



движения ленты. Известно, что относительно неподвижного наблюдателя скорость $\vec{V}_B$ точки B, находящейся на ободе колеса на его горизонтальном диаметре, составляет с горизонтом угол $\alpha = 30^\circ$. Найти скорость V центра колеса относительно неподвижного наблюдателя.

1.1.32. Катер, движущийся со скоростью $V_1 = 30$ км/час, буксирует спортсмена на водных лыжах. Трос, за которыйдержится спортсмен,



составляет с направлением движения катера угол $\alpha = 150°$. Направление движения спортсмена образует с тросом угол $\beta = 60°$. Чему равна величина скорости спортсмена V_2 в этот момент времени?

1.2. Динамика

Вопросы программы

1. *Взаимодействие тел. Первый закон Ньютона. Понятие об инерциальных и неинерциальных системах отсчета. Принцип относительности Галилея.*
2. *Сила. Силы в механике. Сложение сил, действующих на материальную точку.*
3. *Инертность тел. Масса. Плотность.*
4. *Второй закон Ньютона. Единицы измерения силы и массы.*
5. *Третий закон Ньютона.*
6. *Закон всемирного тяготения. Гравитационная постоянная. Сила тяжести. Зависимость силы тяжести от высоты.*
7. *Силы упругости. Понятие о деформациях. Закон Гука. Модуль Юнга.*
8. *Силы трения. Сухое трение: трение покоя и трение скольжения. Коэффициент трения. Вязкое трение.*
9. *Применение законов Ньютона к поступательному движению тел. Вес тела. Невесомость. Перегрузки.*
10. *Применение законов Ньютона к движению материальной точки по окружности. Движение искусственных спутников. Первая космическая скорость.*

Определения, понятия и законы

В динамике изучается влияние взаимодействия между телами на их механическое движение. *Основная задача динамики* состоит в определении положения тел и их скоростей в произвольный момент времени по известным начальным положениям тел, их начальным скоростям и силам, действующим на тела.

Взаимодействие тел. Механическое действие одного тела на другое возможно как при непосредственном соприкосновении тел, так и на расстоянии. Действие одного тела на другое в механике проявляется в деформации взаимодействующих тел и в возникновении у тел ускорений.

Свободным (изолированным) телом называется тело, на которое не действуют какие-либо другие тела или поля, или тело, внешние воздействия на которое уравновешены (скомпенсированы).

Первый закон Ньютона. Понятие об инерциальных и неинерциальных системах отсчета. *Первый закон Ньютона* постулирует существование особого класса систем отсчета. В этих системах отсчета свободное тело сохраняет состояние покоя или прямолинейного равномерного движения. Системы отсчета, в которых выполняется первый закон Ньютона, называются *инерциальными*. Особое значение инерциальных систем отсчета состоит в том, что в этих системах механические явления описываются наиболее просто.

Если существует хотя бы одна инерциальная система отсчета, то существует и бесконечное множество таких систем. Действительно, если в одной системе свободное тело движется с постоянной скоростью, то в любой другой системе отсчета, движущейся относительно первой с постоянной скоростью, это тело также будет иметь постоянную скорость.

Свободным можно считать тело, достаточно удаленное от других тел. Для того, чтобы выяснить, в какой степени данную систему можно считать инерциальной, нужно из этой системы наблюдать за свободным телом (например, за уединенной звездой). Чем ближе к нулю ускорение этого тела, тем больше оснований считать данную систему отсчета инерциальной.

Из известных в настоящее время систем отсчета наиболее близка к инерциальной гелиоцентрическая система, связанная с центром Солнца. Для описания многих механических движений в земных условиях инерциальной можно считать систему отсчета, связанную либо с поверхностью Земли, либо с ее центром (геоцентрическая система отсчета). При этом пренебрегают ускорением этой системы, связанным с вращательным движением Земли вокруг собственной оси и вокруг Солнца.

Системы отсчета, в которых свободное тело не сохраняет скорость движения постоянной, называются *неинерциальными*. Неинерциальной является любая система отсчета, движущаяся с ускорением относительно инерциальной.

Принцип относительности Галилея гласит: любое механическое явление во всех инерциальных системах отсчета протекает одинаково при одинаковых начальных условиях.

Следует подчеркнуть, что выполнение принципа относительности не означает полной тождественности движения одного и того же тела относительно разных инерциальных систем отсчета. Одинаковы лишь законы движения. Характер же движения тела определяется не только законами движения, но и начальными скоростями и начальными координатами.

Сила. В инерциальных системах отсчета ускорение тела, а также его деформация, могут быть вызваны только его взаимодействием с другими телами. Характеристикой действия одного тела на другое является сила. Силойназывается векторная физическая величина, являющаяся мерой механического воздействия на материальную точку или тело со стороны других тел или полей. Сила полностью определена, если заданы ее модуль, направление и точка приложения.

Силы в механике. Различные взаимодействия, известные в современной физике, сводятся к четырем типам: гравитационные, электромагнитные, сильные и слабые взаимодействия. Сила как количественная характеристика позволяет оценивать лишь гравитационные и электромагнитные взаимодействия. В тех чрезвычайно малых областях пространства и в тех процессах. в которых проявляются сильные и слабые взаимодействия, такие понятия, как точка приложения, линия действия, а вместе с ними и само понятие силы теряют смысл.

Таким образом, *в задачах механики* основную роль играют *гравитационные силы* (*силы тяготения*), *электромагнитные силы*, действующие на заряженное тело, а также три их разновидности: *силы упругости*, *силы трения* и *мускульные силы* человека и животных. В механике важно знать, при каких условиях возникают силы, каковы их модули и направления, т.е. знать, как силы зависят от расстояний между телами и от скоростей их движения. В свою очередь, узнать значения сил, определить, как и когда они действуют, можно, располагая лишь способами их измерения.

Сравнение сил производится на основании следующего утверждения, являющегося определением равенства сил в механике: Две силы, независимо от их природы, считаются равными по модулю и противоположно направленными, если их одновременное действие на тело не меняет его состояния покоя или равномерного прямолинейного движения. Величина силы может быть измерена по степени деформации специального пробного тела — *динамометра*. Моделью динамометра обычно служит пружина.

Сложение сил, действующих на материальную точку. Если на материальную точку действует несколько сил в разных направлениях, то ихдействие можно заменить действием одной силы, называемой

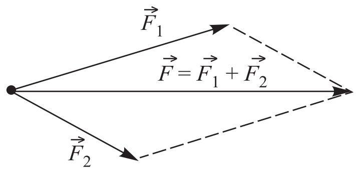


Рис. 1.2.1. Сложение сил, действующих на материальную точку

равнодействующей, величина и направление которой определяется по правилу сложения векторов (рис. 1.2.1).

Инертность тел. Свойство свободного тела сохранять состояние покоя или равномерного прямолинейного движения называется *инертностью*.

Масса. Скалярная физическая величина, являющаяся мерой инертности тела, называется **массой**тела. Она служит количественной характеристикой отклика тела на воздействие на него других тел. Чем больше масса тела, тем меньшее ускорение приобретает это тело под действием одной и той же силы.

Измерение массы тела, т.е. сравнение его массы с *эталоном массы* основывается на следующем утверждении, являющемся обобщением многочисленных опытных данных: в инерциальной системе отсчета отношение масс взаимодействующих тел равно обратному отношению модулей их ускорений.

В механике Ньютона постулируется, что

1. масса тела не зависит от скорости его движения;
2. масса тела равна сумме масс всех частиц (или материальных точек), из которых оно состоит;
3. при любых процессах, происходящих в замкнутой системе тел, ее полная масса остается неизменной.

Эти постулаты справедливы для макроскопических тел в случае, когда скорости их движения намного меньше, чем скорость света.

Плотность. *Средней плотностью* тела $\rho_{\text{ср}}$ называется величина, равная отношению массы тела m к его объему V:

$$\rho_{\text{ср}} = \frac{m}{V}. \tag{1.2.1}$$

Плотность тела в точке равна пределу отношения массы Δm элемента тела, выбранного в окрестности этой точки, к его объему ΔV при неограниченном уменьшении ΔV:

$$\rho = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta V}. \tag{1.2.2}$$

Второй закон Ньютона. Основой динамики является *второй закон* Ньютона, согласно которому в инерциальной системе отсчета произведение массы тела на его ускорение равно сумме действующих на тело сил:

$$m\vec{a} = \vec{F}. \tag{1.2.3}$$

Единицы измерения силы и массы. За единицу массы в системе СИ принят *килограмм* — 1 кг. Килограмм — это масса эталона, изготовленного из сплава платины и иридия. Международный эталон килограмма хранится в г. Севре во Франции. С достаточной для практики точностью можно считать, что массой 1 кг обладает 1 л химически чистой воды при температуре 15 °C.

За единицу силы в системе СИ принимается сила, которая телу массой 1 кг сообщает ускорение 1м/с^2. Эта единица называется ньютон (Н). Приближенно 1 Н равен силе, с которой притягивается к Земле тело массой 0,102 кг.

Третий закон Ньютона: При любом взаимодействии двух тел сила, действующая со стороны одного тела на другое, равна по величине и противоположна по направлению силе, действующей со стороны второго тела на первое. Эти силы направлены вдоль прямой, соединяющей точки их приложения, и всегда имеют одну и ту же физическую природу.

Этот закон утверждает, что силы взаимодействия всегда появляются попарно. Если в инерциальной системе отсчета на какое-то тело действует сила, то обязательно есть какое-то другое тело, на которое первое действует с такой же по модулю силой, но направленной в противоположную сторону. Всегда следует помнить, что силы, появляющиеся при взаимодействии тел, приложены к разным телам и поэтому не могут уравновешивать друг друга. Уравновешиваться могут только силы, приложенные к одному телу.

Закон всемирного тяготения. Гравитационная постоянная. Две материальные точки массами m_1 и m_2 притягиваются друг к другу с силой, прямо пропорциональной произведению их масс и обратно пропорциональной квадрату расстояния r между ними:

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}, \tag{1.2.4}$$

где $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$ Н$\cdot$ м^2/кг^2 — *гравитационная постоянная*. Гравитационная постоянная относится к числу фундаментальных констант природы. Ее численное значение может быть определено только опытным путем.

Для протяженных тел произвольной формы задача нахождения силы тяготения является весьма сложной. Она имеет простое решение,