

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. Ломоносова

Классический университетский учебник



А.Н. КОЛМОГОРОВ, С.В. ФОМИН

**ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ
И ФУНКЦИОНАЛЬНОГО АНАЛИЗА**

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие к седьмому изданию	11
Предисловие к шестому изданию	12
Предисловие к четвертому изданию	13
Предисловие к третьему изданию	14
Из предисловия ко второму изданию	14
Основные обозначения	16

ГЛАВА I

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

§ 1. Понятие множества. Операции над множествами	17
1. Основные определения (17). 2. Операции над множествами (17).	
§ 2. Отображения. Разбиения на классы	20
1. Отображение множеств. Общее понятие функции (20). 2. Разбиение на классы. Отношения эквивалентности (23).	
§ 3. Эквивалентность множеств. Понятие мощности множества	26
1. Конечные и бесконечные множества (26). 2. Счетные множества (27). 3. Эквивалентность множеств (29). 4. Несчетность множества действительных чисел (31). 5. Теорема Кантора–Бернштейна (32). 6. Понятие мощности множества (33).	
§ 4. Упорядоченные множества. Трансфинитные числа	36
1. Частично упорядоченные множества (36). 2. Отображения, сохраняющие порядок (37). 3. Порядковые типы. Упорядоченные множества (38). 4. Упорядоченная сумма упорядоченных множеств (39). 5. Вполне упорядоченные множества. Трансфинитные числа (40). 6. Сравнение порядковых чисел (42). 7. Аксиома выбора, теорема Цермело и другие эквивалентные им утверждения (44). 8. Трансфинитная индукция (46).	
§ 5. Системы множеств	47
1. Кольцо множеств (47). 2. Полукольцо множеств (49). 3. Кольцо, порожденное полукольцом (50). 4. σ -алгебры (51). 5. Системы множеств и отображения (53).	

ГЛАВА II

МЕТРИЧЕСКИЕ И ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ
ПРОСТРАНСТВА

§ 1.	Понятие метрического пространства.....	54
	1. Определение и основные примеры (54). 2. Непрерывные отображения метрических пространств. Изометрия (61).	
§ 2.	Сходимость. Открытые и замкнутые множества.....	63
	1. Предельные точки. Замыкание (63). 2. Сходимость (64). 3. Плотные подмножества (65). 4. Открытые и замкнутые множества (66). 5. Открытые и замкнутые множества на прямой (69).	
§ 3.	Полные метрические пространства.....	73
	1. Определение и примеры полных метрических пространств (73). 2. Теорема о вложенных шарах (76). 3. Теорема Бэра (77). 4. Пополнение пространства (78).	
§ 4.	Принцип сжимающих отображений и его применения.....	81
	1. Принцип сжимающих отображений (81). 2. Простейшие применения принципа сжимающих отображений (83). 3. Теоремы существования и единственности для дифференциальных уравнений (86). 4. Применение принципа сжимающих отображений к интегральным уравнениям (88).	
§ 5.	Топологические пространства.....	91
	1. Определение и примеры топологических пространств (91). 2. Сравнение топологий (93). 3. Определяющие системы окрестностей. База. Аксиомы счетности (94). 4. Сходящиеся последовательности в T (98). 5. Непрерывные отображения. Гомеоморфизм (99). 6. Аксиомы отделимости (102). 7. Различные способы задания топологии в пространстве. Метризуемость (105).	
§ 6.	Компактность.....	107
	1. Понятие компактности (107). 2. Непрерывные отображения компактных пространств (109). 3. Непрерывные и полунепрерывные функции на компактных пространствах (110). 4. Счетная компактность (112). 5. Предкомпактные множества (115).	
§ 7.	Компактность в метрических пространствах.....	115
	1. Полная ограниченность (115). 2. Компактность и полная ограниченность (117). 3. Предкомпактные подмножества в метрических пространствах (119). 4. Теорема Арцела (119). 5. Теорема Пеано (121). 6. Равномерная непрерывность. Непрерывные отображения метрических компактов (123). 7. Обобщенная теорема Арцела (124).	
§ 8.	Непрерывные кривые в метрических пространствах.....	125

ГЛАВА III

НОРМИРОВАННЫЕ И ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ
ЛИНЕЙНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

§ 1.	Линейные пространства.....	130
	1. Основные определения и примеры линейных пространств (130). 2. Линейная зависимость (132). 3. Подпространства (133). 4. Фактор-пространства (134). 5. Линейные функционалы (135). 6. Геометрический смысл линейного функционала (137).	
§ 2.	Выпуклые множества и выпуклые функционалы. Теорема Хана–Банаха.....	139
	1. Выпуклые множества и выпуклые тела (139). 2. Однородно-выпуклые функционалы (142). 3. Функционал Минковского (143). 4. Теорема Хана–Банаха (145). 5. Отделимость выпуклых множеств в линейном пространстве (148).	
§ 3.	Нормированные пространства.....	150
	1. Определение и примеры нормированных пространств (150). 2. Подпространства нормированного пространства (152). 3. Фактор-пространства нормированного пространства (153).	
§ 4.	Евклидовы пространства.....	155
	1. Определение евклидовых пространств (155). 2. Примеры (157). 3. Существование ортогональных базисов, ортогонализация (159). 4. Неравенство Бесселя. Замкнутые ортогональные системы (161). 5. Полные евклидовы пространства. Теорема Рисса–Фишера (165). 6. Гильбертово пространство. Теорема об изоморфизме (167). 7. Подпространства, ортогональные дополнения, прямая сумма (170). 8. Характеристическое свойство евклидовых пространств (174). 9. Комплексные евклидовы пространства (177).	
§ 5.	Топологические линейные пространства.....	179
	1. Определение и примеры (179). 2. Локальная выпуклость (182). 3. Счетно-нормированные пространства (183).	

ГЛАВА IV

ЛИНЕЙНЫЕ ФУНКЦИОНАЛЫ И ЛИНЕЙНЫЕ
ОПЕРАТОРЫ

§ 1.	Непрерывные линейные функционалы.....	188
	1. Непрерывные линейные функционалы в топологических линейных пространствах (188). 2. Линейные функционалы на нормированных пространствах (189). 3. Теорема Хана–Банаха в нормированном пространстве (192). 4. Линейные функционалы в счетно-нормированном пространстве (195).	
§ 2.	Сопряженное пространство.....	196
	1. Определение сопряженного пространства (196). 2. Сильная топология в сопряженном пространстве (197). 3. Примеры со-	

	пряженных пространств (199). 4. Второе сопряженное пространство (205).	
§ 3.	Слабая топология и слабая сходимость 207	
	1. Слабая топология и слабая сходимость в линейном топологическом пространстве (207). 2. Слабая сходимость в нормированных пространствах (208). 3. Слабая топология и слабая сходимость в сопряженном пространстве (212). 4. Ограниченные множества в сопряженном пространстве (214).	
§ 4.	Обобщенные функции 218	
	1. Расширение понятия функции (218). 2. Пространство основных функций (219). 3. Обобщенные функции (221). 4. Действия над обобщенными функциями (222). 5. Достаточность запаса основных функций (225). 6. Восстановление функции по производной. Дифференциальные уравнения в классе обобщенных функций (226). 7. Некоторые обобщения (229).	
§ 5.	Линейные операторы 233	
	1. Определение и примеры линейных операторов (233). 2. Непрерывность и ограниченность (237). 3. Сумма и произведение операторов (239). 4. Обратный оператор, обратимость (240). 5. Сопряженные операторы (246). 6. Сопряженный оператор в евклидовом пространстве. Самосопряженные операторы (248). 7. Спектр оператора. Резольвента (250).	
§ 6.	Компактные операторы 253	
	1. Определение и примеры компактных операторов (253). 2. Основные свойства компактных операторов (258). 3. Собственные значения компактного оператора (260). 4. Компактные операторы в гильбертовом пространстве (262). 5. Самосопряженные компактные операторы в H (262).	

ГЛАВА V

МЕРА, ИЗМЕРИМЫЕ ФУНКЦИИ, ИНТЕГРАЛ

§ 1.	Мера плоских множеств 267
	1. Мера элементарных множеств (267). 2. Лебегова мера плоских множеств (271). 3. Некоторые дополнения и обобщения (278).
§ 2.	Общее понятие меры. Продолжение меры с полукольца на кольцо. Аддитивность и σ -аддитивность 281
	1. Определение меры (281). 2. Продолжение меры с полукольца на порожденное им кольцо (282). 3. σ -аддитивность (284).
§ 3.	Лебегово продолжение меры 287
	1. Лебегово продолжение меры, определенной на полукольце с единицей (288). 2. Продолжение меры, заданной на полукольце без единицы (291). 3. Расширение понятия измеримости в случае σ -конечной меры (293). 4. Продолжение меры по Жордану (296). 5. Однозначность продолжения меры (298).

§ 4.	Измеримые функции 299
	1. Определение и основные свойства измеримых функций (300). 2. Действия над измеримыми функциями (301). 3. Эквивалентность (303). 4. Сходимость почти всюду (304). 5. Теорема Егорова (305). 6. Сходимость по мере (307). 7. Теорема Лузина. C -свойство (309).
§ 5.	Интеграл Лебега 310
	1. Простые функции (311). 2. Интеграл Лебега для простых функций (311). 3. Общее определение интеграла Лебега на множестве конечной меры (314). 4. σ -аддитивность и абсолютная непрерывность интеграла Лебега (316). 5. Предельный переход под знаком интеграла Лебега (321). 6. Интеграл Лебега по множеству бесконечной меры (324). 7. Сравнение интеграла Лебега с интегралом Римана (326).
§ 6.	Прямые произведения систем множеств и мер. Теорема Фубини 328
	1. Произведение систем множеств (328). 2. Произведения мер (330). 3. Выражение плоской меры через интеграл линейной меры сечений и геометрическое определение интеграла Лебега (332). 4. Теорема Фубини (335).

ГЛАВА VI

НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ ЛЕБЕГА. ТЕОРИЯ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

§ 1.	Монотонные функции. Дифференцируемость интеграла по верхнему пределу 340
	1. Основные свойства монотонных функций (340). 2. Дифференцируемость монотонной функции (343). 3. Производная интеграла по верхнему пределу (350).
§ 2.	Функции с ограниченным изменением 351
§ 3.	Производная неопределенного интеграла Лебега 356
§ 4.	Восстановление функции по ее производной. Абсолютно непрерывные функции 358
§ 5.	Интеграл Лебега как функция множества. Теорема Радона-Никодима 368
	1. Заряды. Разложение Хана и разложение Жордана (368). 2. Основные типы зарядов (371). 3. Абсолютно непрерывные заряды. Теорема Радона-Никодима (372).
§ 6.	Интеграл Стильтеса 375
	1. Меры Стильтеса (375). 2. Интеграл Лебега-Стильтеса (377). 3. Некоторые применения интеграла Лебега-Стильтеса в теории вероятностей (379). 4. Интеграл Римана-Стильтеса (381). 5. Предельный переход под знаком интеграла Стильтеса (384). 6. Общий вид линейных непрерывных функционалов в пространстве непрерывных функций (388).

ГЛАВА VII

ПРОСТРАНСТВА СУММИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ

- § 1. Пространство L_1 393
 1. Определение и основные свойства пространства L_1 (393).
 2. Всюду плотные множества в L_1 (395).
- § 2. Пространство L_2 398
 1. Определение и основные свойства (399). 2. Случай бесконечной меры (402). 3. Всюду плотные множества в L_2 . Теорема об изоморфизме (404). 4. Комплексное пространство L_2 (405). 5. Сходимость в среднем квадратичном и ее связь с другими типами сходимости функциональных последовательностей (406).
- § 3. Ортогональные системы функций в L_2 . Ряды по ортогональным системам 408
 1. Тригонометрическая система. Тригонометрический ряд Фурье (408). 2. Тригонометрические системы на отрезке $[0, \pi]$ (411). 3. Ряд Фурье в комплексной форме (412). 4. Многочлены Лежандра (413). 5. Ортогональные системы в произведениях. Кратные ряды Фурье (415). 6. Многочлены, ортогональные относительно данного веса (417). 7. Ортогональный базис в пространствах $L_2(-\infty, \infty)$ и $L_2(0, \infty)$ (418). 8. Ортогональные многочлены с дискретным весом (420). 9. Системы Хаара и Радемахера–Уолша (422).

ГЛАВА VIII

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ РЯДЫ.
ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ

- § 1. Условия сходимости ряда Фурье 425
 1. Достаточные условия сходимости ряда Фурье в точке (425).
 2. Условия равномерной сходимости ряда Фурье (431).
- § 2. Теорема Фейера 433
 1. Теорема Фейера (433). 2. Полнота тригонометрической системы. Теорема Вейерштрасса (436). 3. Теорема Фейера для пространства L_1 (437).
- § 3. Интеграл Фурье 437
 1. Основная теорема (437). 2. Интеграл Фурье в комплексной форме (440).
- § 4. Преобразование Фурье, свойства и применения 440
 1. Преобразования Фурье и формула обращения (440). 2. Основные свойства преобразования Фурье (444). 3. Полнота функций Эрмита и Лагерра (447). 4. Преобразование Фурье быстро убывающих бесконечно дифференцируемых функций (448). 5. Преобразование Фурье и свертка функций (449). 6. Применение преобразования Фурье к решению уравнения теплопроводности (450). 7. Преобразование Фурье функций нескольких переменных (452).

- § 5. Преобразование Фурье в пространстве $L_2(-\infty, \infty)$ 454
 1. Теорема Планшереля (455). 2. Функции Эрмита (458).
- § 6. Преобразование Лапласа 461
 1. Определение и основные свойства преобразования Лапласа (461). 2. Применение преобразования Лапласа к решению дифференциальных уравнений (операторный метод) (463).
- § 7. Преобразование Фурье–Стилтьеса 464
 1. Определение преобразования Фурье–Стилтьеса (465).
 2. Применения преобразования Фурье–Стилтьеса в теории вероятностей (466).
- § 8. Преобразование Фурье обобщенных функций 468

ГЛАВА IX

ЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

- § 1. Основные определения. Некоторые задачи, приводящие к интегральным уравнениям 472
 1. Типы интегральных уравнений (472). 2. Примеры задач, приводящих к интегральным уравнениям (473).
- § 2. Интегральные уравнения Фредгольма 476
 1. Интегральный оператор Фредгольма (476). 2. Уравнения с симметрическим ядром (480). 3. Теоремы Фредгольма. Случай вырожденных ядер (481). 4. Теоремы Фредгольма для уравнений с произвольными ядрами (483). 5. Уравнения Вольтерра (488). 6. Интегральные уравнения первого рода (489).
- § 3. Интегральные уравнения, содержащие параметр. Метод Фредгольма 490
 1. Спектр компактного оператора в H (490). 2. Отыскание решения в виде ряда по степеням λ . Детерминанты Фредгольма (491).

ГЛАВА X

ЭЛЕМЕНТЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО
ИСЧИСЛЕНИЯ В ЛИНЕЙНЫХ
ПРОСТРАНСТВАХ

- § 1. Дифференцирование в линейных пространствах 496
 1. Сильный дифференциал (дифференциал Фреше) (496).
 2. Слабый дифференциал (дифференциал Гато) (498). 3. Формула конечных приращений (498). 4. Связь между слабой и сильной дифференцируемостью (499). 5. Дифференцируемые функционалы (501). 6. Абстрактные функции (501). 7. Интеграл (501). 8. Производные высших порядков (504). 9. Дифференциалы высших порядков (507). 10. Формула Тейлора (507).

§ 2.	Теорема о неявной функции и некоторые ее применения.....	508
	1. Теорема о неявной функции (508). 2. Теорема о зависимости решения дифференциального уравнения от начальных данных (511). 3. Касательные многообразия. Теорема Люстерника (513).	
§ 3.	Экстремальные задачи.....	516
	1. Необходимые условия экстремума (516). 2. Второй дифференциал. Достаточные условия экстремума функционала (520). 3. Экстремальные задачи с ограничениями (522).	
§ 4.	Метод Ньютона.....	524

ДОПОЛНЕНИЕ БАНАХОВЫ АЛГЕБРЫ (В. М. ТИХОМИРОВ)

§ 1.	Определение и примеры банаховых алгебр.....	529
	1. Банаховы алгебры, изоморфизмы банаховых алгебр (529). 2. Примеры банаховых алгебр (530). 3. Максимальные идеалы (532).	
§ 2.	Спектр и резольвента.....	533
	1. Определения и примеры (533). 2. Свойства спектра (534). 3. Теорема о спектральном радиусе (536).	
§ 3.	Некоторые вспомогательные результаты.....	537
	1. Теорема о фактор-алгебре (537). 2. Три леммы (538).	
§ 4.	Основные теоремы.....	539
	1. Линейные непрерывные мультипликативные функционалы и максимальные идеалы (539). 2. Топология в множестве $\mathcal{M}$. Основные теоремы (541). 3. Теорема Винера; упражнения (544).	
	Предметный указатель.....	548
	Список литературы.....	548

ПРЕДИСЛОВИЕ К СЕДЬМОМУ ИЗДАНИЮ

Читатель держит сейчас в руках седьмое издание книги, которая в течение почти полувека служит делу математического образования не только у нас, но и во многих других странах.

Хочется еще раз сказать о замечательном творческом союзе двух авторов этой книги. Общий замысел синтетического курса, материал которого был рассеян по многим курсам, читавшимся на механико-математическом ф-те МГУ им. М.В. Ломоносова, принадлежал Андрею Николаевичу Колмогорову. Он разработал программу новой дисциплины (названной «Анализом III»), включив в нее элементы теории множеств, метрических и нормированных пространств, теории меры и интеграла Лебега и линейных операторов в банаховых и гильбертовых пространствах. А.Н. Колмогоров несколько раз читал лекции по этой программе и задумал написать по нему учебник. Первый вариант книги, вышедшей в двух выпусках 1954 и 1960 годов в издательстве МГУ, был написан в тесном творческом сотрудничестве А.Н. Колмогорова и С.В. Фомина, читавшего в те годы курс функционального анализа на физическом факультете.

С.В. Фомин считал А.Н. Колмогорова одним из своих учителей; Андрей Николаевич высоко ценил Сергея Васильевича как ученого, педагога и человека. Их сотрудничество оказалось исключительно плодотворным.

В предисловии к первому выпуску книги, написанном в 1954 г., авторы писали, что «в следующих выпусках должны найти место теория меры и интеграл Лебега, гильбертово пространство, теория интегральных уравнений с симметрическим ядром и ортогональных систем функций (эта часть программы была выполнена уже во втором выпуске), элементы нелинейного функционального анализа и некоторые применения методов функционального анализа к вопросам вычислительной математики».

После выхода первого издания Сергей Васильевич Фомин в течение пятнадцати лет работал над усовершенствованием учебника: значительно расширил материал, включенный в первое издание; дополнил теорию метрических пространств элементами общей топологии, теорию нормированных пространств — элементами теории линейных топологических пространств, теорию интегрирования — теорией дифференцирования, теорию ортогональных систем функций — теорией тригонометрических рядов и преобразованием Фурье. По его просьбе мною было написано «Дополнение. Банаховы алгебры». Сергей Васильевич написал главу, посвященную нелинейному анализу, и продолжал работать над ней, желая ее значительно расширить, но смерть не дала ему возможности завершить задуманное до конца. К большому сожалению, остался неосуществленным и замысел включить в книгу «некоторые применения методов функционального анализа к вопросам вычислительной математики».

В этом издании исправлены некоторые опечатки, и ссылки на страницы заменены ссылками на соответствующие главу, параграф, пункт (это позволит при последующих переизданиях избежать многих неточностей).

В этом году исполняется 50 лет со дня выхода первого выпуска книги Андрея Николаевича Колмогорова и Сергея Васильевича Фомина «Элементы теории функций и функционального анализа». Несомненно, что книга, седьмое издание которой предлагается читателю, — один из лучших учебников, написанных профессорами Московского университета за всю двухсотпятидесятилетнюю историю нашего университета.

Москва, 2004 г.

В. М. Тихомиров

ПРЕДИСЛОВИЕ К ШЕСТОМУ ИЗДАНИЮ

Это издание выходит после смерти Андрея Николаевича Колмогорова. Он был инициатором создания в рамках университетского образования курса теории функций и функционального анализа, получившего более короткое название «Анализ III». Андрей Николаевич разработал программу, был первым лектором этого курса на механико-математическом факультете МГУ (1946/47 гг.), а при повторном чтении (1952/53 гг.) задумал написать учебник. Для этой цели А. Н. Колмогоров привлек Сергея Васильевича Фомина (читавшего аналогичный курс на физическом факультете), научные, педагогические и человеческие качества которого он очень высоко ценил. Так образовался авторский коллектив, создавший замечательную книгу, по которой на протяжении почти тридцати пяти лет ведется преподавание курса «Анализ III» в большинстве наших университетов.

Первое издание учебника вышло отдельными выпусками — в 1954 и 1960 годах в издательстве МГУ. Считаю необходимым сказать здесь о большой роли, которую сыграли в судьбе того издания (1954 г.) Т. Д. Вентцель и О. С. Кулагина. Они вели подробный конспект лекций Андрея Николаевича, потом авторы доверили им (тогда еще студентам) роль редакторов издания, и они исполняли ее с высоким чувством ответственности.

В замысле курса «Анализ III» отразились разнообразные общие педагогические идеи А. Н. Колмогорова. Прежде всего — о единстве абстрактной и прикладной математики, о необходимости (как сказано в предисловии ко второму изданию) «приучить студентов к двойному зрению: с одной стороны, следить за внутренней логикой теории множеств, общей теории непрерывных отображений метрических и топологических пространств, линейных пространств и функционалов и операторов на них, чистой теории меры и интегрирования в общих «пространствах с мерой», с другой — не упускать из виду обслуживаемую этими более абстрактными областями математики проблематику классического и даже прикладного анализа».

Далее, А. Н. Колмогоров всегда пропагандировал мысль о необходимости «синтетических» курсов, идею образования, как бы напоминающего движение по спирали, где обучающийся со все более и более высокого уровня обозревает весь пройденный путь. В этом учебнике осуществляется синтез идей, с которыми уже на начальном этапе образования студенту приходилось сталкиваться в курсах классического анализа («Анализ I»), алгебры, геометрии и дифференциальных уравнений («Анализ II»). Сам же курс «Анализ III» объединил материал, ранее входивший на мехмате в курсы теории функций действительного переменного, функционального анализа, интегральных уравнений, вариационного исчисления и др. Андрей Николаевич считал, что университетские учебники должны быть написаны просто и доступно, с привлечением большого числа примеров, которые служили бы мотивировкой для развития абстрактной теории. Так и написана эта книга.

Сначала учебник был очень кратким (и это соответствовало первоначальному замыслу А. Н. Колмогорова), но затем авторы решили значительно расширить материал книги с тем, чтобы преподаватели различных университетов могли отбирать для себя то, что им более всего подходит. Это расширение было, в основном, осуществлено С. В. Фоминым при втором, третьем и четвертом изданиях. По просьбе авторов тогда мною было написано «Дополнение», посвященное банаховым алгебрам. И здесь снова хочется сказать о большой помощи авторам в тот период работы над книгой ее редакторов — Д. П. Желобенко (1960 г.), Ф. В. Широкова (1972 г. — третье издание) и В. М. Алексеева (1976 г. — четвертое издание). Смерть С. В. Фомина прервала его работу над книгой, многие замыслы (в основном связанные с переработкой десятой главы) остались нереализованными. С пятого издания существенных изменений не вносилось. В этом издании несколько модифицирован список литературы.

Учебник А. Н. Колмогорова и С. В. Фомина переиздавался в издательстве «Наука» в 1968, 1972, 1976 и 1981 годах. Он был переведен на многие иностранные языки: выдержал два издания на английском и японском языках, был издан в ГДР, ЧССР и ВНР, переведен на французский и испанский языки; в 1988 г. вышел в издательстве «Мир» на языке дари.

Уверен, что еще долгое время книга А. Н. Колмогорова и С. В. Фомина будет нужна новым поколениям математиков.

В. М. Тихомиров

ПРЕДИСЛОВИЕ К ЧЕТВЕРТОМУ ИЗДАНИЮ

Это издание выходит уже после смерти Сергея Васильевича Фомина. Он успел, однако, проделать всю основную работу по усовершенствованию книги. Существенно переработана десятая глава. В ней добавлен параграф, посвященный теореме о неявной функции, и изменен параграф «Экстремальные задачи». Эти изменения повлекли за собой необходи-

мость изменений в четвертой главе (следствия из теоремы Хана–Банаха и теоремы Банаха об обратном операторе).

Текст книги был просмотрен В. М. Алексеевым и В. М. Тихомировым, которым я выражаю искреннюю благодарность.

А. Колмогоров

ПРЕДИСЛОВИЕ К ТРЕТЬЕМУ ИЗДАНИЮ

При подготовке нового издания мы сохранили общий план книги и постарались не увеличивать ее объем. Вместе с тем весь текст книги был заново просмотрен и отредактирован. Большую помощь в этой работе нам оказал Ф. В. Широков. В главах I и IV сделаны некоторые перестановки и изменения, облегчающие, на наш взгляд, переход от более простых понятий к более сложным (например, от банаховых пространств к более общим в гл. IV). Довольно существенно переработано изложение теории меры (гл. V).

В последние годы в курс «Анализ III» часто включаются элементы теории банаховых алгебр и спектрального анализа. Поэтому мы сочли целесообразным включить в нашу книгу написанное В. М. Тихомировым дополнение, посвященное этим вопросам.

*А. Колмогоров
С. Фомин*

ИЗ ПРЕДИСЛОВИЯ КО ВТОРОМУ ИЗДАНИЮ

Первое издание «Элементов теории функций и функционального анализа» вышло двумя отдельными выпусками в 1954 и 1960 годах. Появление этих выпусков было связано с включением в конце 40-х годов в программу механико-математического факультета МГУ курса «Анализ III», объединявшего элементы теории меры и теории функций, интегральные уравнения, сведения из функционального анализа, а позже и вариационное исчисление. Этот курс, читавшийся в МГУ сперва А. Н. Колмогоровым, а потом и другими лекторами, в том числе С. В. Фоминым, вошел в дальнейшем в программы и других университетов.

В свое время замена в МГУ отдельных курсов теории функций действительного переменного, интегральных уравнений и вариационного исчисления единым курсом «Анализ III» вызвала большие споры. Перед курсом была поставлена задача приучить студентов к двойному зрению: с одной стороны, следить за внутренней логикой развития теории множеств, общей теории непрерывных отображений метрических и топологических пространств, линейных пространств и функционалов и операторов на них, чистой теории меры и интегрирования в общих «пространствах

с мерой», с другой — не упускать из виду обслуживаемую этими более абстрактными областями математики проблематику классического и даже прикладного анализа.

При решении этой задачи мы в планировке книги отдаем предпочтение абстрактной линии построения курса. От общей теории множеств (глава I) можно перейти к метрическим и топологическим пространствам и их непрерывным отображениям (глава II) либо непосредственно к пространствам с мерой (без топологии) и интегрированию в них (глава V). В главах III и IV изучаются линейные пространства и линейные функционалы и операторы в них. От этих глав возможен прямой переход к главе X (нелинейные дифференцируемые операторы и функционалы). В главе VII изучаются линейные пространства суммируемых функций. Лишь в главах VI и VIII внимание, по существу, сосредоточено на функциях действительного переменного.

Хотя в первую очередь в нашей книге излагаются общие понятия теории функций и функционального анализа, внимание к примыкающей сюда классической проблематике читатель может проследить почти во всех главах. Включение в книгу глав VI (теория дифференцирования), VIII (тригонометрические ряды и интеграл Фурье) и IX (линейные интегральные уравнения) приводит к тому, что сейчас наша книга охватывает всю программу принятого в МГУ курса «Анализ III», кроме вариационного исчисления. Мы не включили этот раздел в нашу книгу, ограничившись лишь изложением в главе X самых первых представлений о нелинейном функциональном анализе.

В новом издании, как и в первоначальном, значительное место занимает общая теория меры. В последнее время появилось довольно много изложений теории интегрирования, основанной на схеме Даниеля, не использующей аппарата теории меры. Мы полагаем, однако, что теория меры достаточно важна и сама по себе, независимо от введения понятия интеграла, и заслуживает включения в университетский курс.

Включение новых глав заметно увеличило объем книги. Старые главы тоже существенно переработаны и в них включены новые параграфы (например, о порядковых типах и трансфинитных числах, топологических пространствах, обобщенных функциях и др.).

Перерабатывая нашу книгу и включая в нее новые разделы, мы старались, однако, сохранить в ней тот сравнительно элементарный стиль изложения, который был выдержан, как нам кажется, в первом издании. Мы надеемся, что она найдет свое естественное место в университетском преподавании наряду с другими руководствами, в частности, с книгой Г. Е. Шилова «Математический анализ, специальный курс», в которой более подчеркнута аналитическая сторона дела, а интерес к метрическим и топологическим пространствам, мерам и т. д. как самостоятельным объектам культивируется в меньшей степени.

*А. Колмогоров
С. Фомин*

ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

A 531	$L_1, L_1(X, \mu)$ 393
B_T 546	$L_2, L_2(X, \mu)$ 399
$B(x_0, r)$ 63	$L_p(X, \mu)$ 404
$B[x_0, r]$ 63	$\mathcal{L}(E, E_1)$ 240
$B(X^2, Y)$ 505	L/L' 134
$\mathbf{BC}(X, Y)$ 503	$L(\{x_\alpha\})$ 134
$\mathfrak{B}(\mathfrak{S})$ 53	l_1 200, 532
$\mathbb{C}$ 529	l_2 56
$C = C[0; 1]$ 56	l_p 61
$C[a, b]$ 56	$\mathcal{M}$ 539
C_T 530	$N(X^n, Y)$ 506
$C^1[a, b]$ 391	$\mathfrak{N}(\mathfrak{S})$ 48
$C^n[a, b]$ 186	S_∞ 232
$C_2[a, b]$ 57	S_∞^* 469
$C_E^1[t_0, t_1]$ 512	T_{x_0} 514
C^∞ 181	V_a^b 351
$CBV[0, 1]$ 546	$V^0[a, b]$ 356
c 34	W 531
$DF(x, h)$ 498	Z 470
$D(\lambda), D(s, t; \lambda)$ 495	$\rho_1(x, y)$ 56
$dF, d^2F, d^n F$ 507	$\rho_p(x, y)$ 58
$E^*, E^\#$ 196	$\rho_\infty(x, y)$ 56
(E^*, b) 199	$\tau(\mathfrak{B})$ 94
$(E^*, \ \cdot\)$ 197	$\aleph$ 34
$f: M \rightarrow N$ 21	$\aleph_0$ 34
$f(A)$ 21	$\aleph_1$ 44
$f^{-1}(b)$ 21	$\cup$ 18
$f^{-1}(\tau)$ 100	$\cap$ 18
F'' 504	Δ 19
$\mathcal{GL}(E, E_1)$ 245	$\setminus$ 19
Im 234	$\subset$ 19
$J(E)$ 140	$\sim$ 29
$K[a, b]$ 181	φ 24
Ker 234	

§ 1. Понятие множества. Операции над множествами

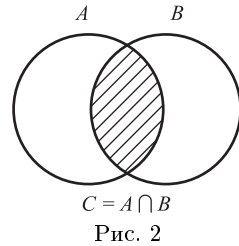
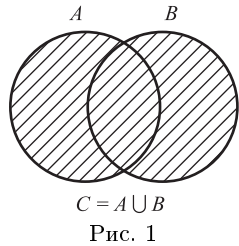
1. Основные определения. В математике встречаются самые разнообразные *множества*. Можно говорить о множестве граней многогранника, точек на прямой, множестве натуральных чисел и т. д. Понятие множества настолько общее, что трудно дать ему какое-либо определение, которое не сводилось бы просто к замене слова «множество» его синонимами: совокупность, собрание элементов и т. п.

Роль, которую понятие множества играет в современной математике, определяется не только тем, что сама теория множеств стала в настоящее время весьма обширной и содержательной дисциплиной, но главным образом тем влиянием, которое теория множеств, возникшая в конце прошлого столетия, оказывала и оказывает на всю математику в целом. Не ставя своей задачей сколько-нибудь полное изложение этой теории, мы здесь лишь введем основные обозначения и приведем первоначальные теоретико-множественные понятия, используемые в дальнейшем.

Множества мы будем обозначать прописными буквами $A, B, \dots$, а их элементы — малыми $a, b, \dots$. Утверждение «элемент a принадлежит множеству A » символически записывается так: $a \in A$ (или $A \ni a$); запись $a \notin A$ (или $A \not\ni a$) означает, что элемент a не принадлежит A . Если все элементы, из которых состоит A , входят и в B (причем случай $A = B$ не исключается), то мы называем A *подмножеством* множества B и пишем $A \subset B$. Например, целые числа образуют подмножество в множестве всех действительных чисел.

Иногда мы не знаем заранее, содержит ли некое множество (например, множество корней данного уравнения) хотя бы один элемент. Поэтому целесообразно ввести понятие *пустого* множества, т. е. множества, не содержащего ни одного элемента. Мы будем обозначать его символом $\emptyset$. Любое множество содержит $\emptyset$ в качестве подмножества. Подмножества некоторого множества, отличные от него самого и от $\emptyset$, называются *собственными*.

2. Операции над множествами. Пусть A и B — произвольные множества; их *суммой*, или *объединением* $C = A \cup B$ называется множество, состоящее из всех элементов, принадлежащих хотя бы одному из множеств A и B (рис. 1).



Аналогично определяется сумма любого (конечного или бесконечного) числа множеств: если A_α — произвольные множества, то их сумма $\bigcup_\alpha A_\alpha$ есть совокупность элементов, каждый из которых принадлежит хотя бы одному из множеств A_α .

Назовем *пересечением* $C = A \cap B$ множеств A и B множество, состоящее из всех элементов, принадлежащих как A , так и B (рис. 2). Например, пересечение множества всех четных чисел и множества всех чисел, делящихся на три, состоит из всех целых чисел, делящихся без остатка на шесть. Пересечением любого (конечного или бесконечного) числа множеств A_α называется совокупность $\bigcap_\alpha A_\alpha$ элементов, принадлежащих каждому из множеств A_α .

Операции сложения и пересечения множеств по самому своему определению коммутативны и ассоциативны, т. е.

$$\begin{aligned} A \cup B &= B \cup A, & (A \cup B) \cup C &= A \cup (B \cup C), \\ A \cap B &= B \cap A, & (A \cap B) \cap C &= A \cap (B \cap C). \end{aligned}$$

Кроме того, они взаимно дистрибутивны:

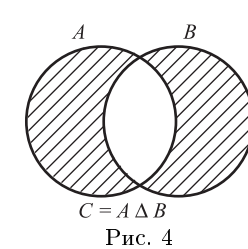
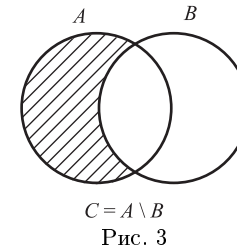
$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C), \quad (1)$$

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C). \quad (2)$$

Действительно, проверим, например, первое из этих равенств¹⁾. Пусть элемент x принадлежит множеству, стоящему в левой части

¹⁾ Равенство двух множеств $A = B$ понимается как тождественное равенство, т. е. оно означает, что каждый элемент множества A принадлежит B , и наоборот. Иначе говоря, равенство $A = B$ равносильно тому, что выполнены оба включения: $A \subset B$ и $B \subset A$.

равенства (1), т. е. $x \in (A \cup B) \cap C$. Это означает, что x входит в C и, кроме того, по крайней мере в одно из множеств A или B . Но тогда x принадлежит хотя бы одному из множеств $A \cap C$ или $B \cap C$, т. е. входит в правую часть рассматриваемого равенства. Обратно, пусть $x \in (A \cap C) \cup (B \cap C)$. Тогда $x \in A \cap C$ или $x \in B \cap C$. Следовательно, $x \in C$ и, кроме того, x входит в A или B , т. е. $x \in A \cup B$. Таким образом, $x \in (A \cup B) \cap C$. Равенство (1) доказано. Аналогично проверяется равенство (2).



Определим для множеств операцию вычитания. Назовем *разностью* $C = A \setminus B$ множеств A и B совокупность тех элементов из A , которые не содержатся в B (рис. 3). При этом, вообще говоря, не предполагается, что $A \supset B$. Вместо $A \setminus B$ иногда пишут $A - B$.

Иногда (например, в теории меры) удобно рассматривать так называемую *симметрическую разность* двух множеств A и B , которая определяется как сумма разностей $A \setminus B$ и $B \setminus A$ (рис. 4). Симметрическую разность C множеств A и B мы будем обозначать символом $A \Delta B$. Таким образом, по определению,

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Упражнение. Показать, что

$$A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

Часто приходится рассматривать тот или иной запас множеств, являющихся подмножествами некоторого основного множества S , например, различные множества точек на числовой прямой. В этом случае разность $S \setminus A$ называют *дополнением* множества A и обозначают $\complement A$ или A' .

В теории множеств и ее приложениях весьма важную роль играет так называемый принцип двойственности, который основан на следующих двух соотношениях:

1. Дополнение суммы равно пересечению дополнений:

$$S \setminus \bigcup_{\alpha} A_{\alpha} = \bigcap_{\alpha} (S \setminus A_{\alpha}). \quad (3)$$

2. Дополнение пересечения равно сумме дополнений:

$$S \setminus \bigcap_{\alpha} A_{\alpha} = \bigcup_{\alpha} (S \setminus A_{\alpha}). \quad (4)$$

Принцип двойственности состоит в том, что из любого равенства, относящегося к системе подмножеств фиксированного множества S , совершенно автоматически может быть получено другое — двойственное — равенство путем замены всех рассматриваемых множеств их дополнениями, сумм множеств — пересечениями, а пересечений — суммами. Примером использования этого принципа может служить вывод теоремы 3' из теоремы 3 § 2 гл. II.

Приведем доказательство соотношения (3).

Пусть $x \in S \setminus \bigcup_{\alpha} A_{\alpha}$. Это означает, что x не входит в объединение $\bigcup_{\alpha} A_{\alpha}$, т. е. не входит ни в одно из множеств A_{α} . Следовательно, x принадлежит каждому из дополнений $S \setminus A_{\alpha}$ и потому $x \in \bigcap_{\alpha} (S \setminus A_{\alpha})$. Обратно, пусть $x \in \bigcap_{\alpha} (S \setminus A_{\alpha})$, т. е. x входит в каждое $S \setminus A_{\alpha}$; тогда x не входит ни в одно из множеств A_{α} , т. е. не принадлежит их сумме $\bigcup_{\alpha} A_{\alpha}$, а тогда $x \in S \setminus \bigcup_{\alpha} A_{\alpha}$. Равенство (3) доказано. Соотношение (4) доказывается аналогично. (Проведите доказательство.)

Название «симметрическая разность» для операции $A \Delta B$ не совсем удачно; эта операция во многом аналогична операции взятия суммы множеств $A \cup B$. Действительно, $A \cup B$ означает, что мы связываем *неисключающим* «или» два утверждения: «элемент принадлежит A » и «элемент принадлежит B », а $A \Delta B$ означает, что те же самые два утверждения связываются *исключающим* «или»: элемент x принадлежит $A \Delta B$ тогда и только тогда, когда он принадлежит либо *только* A , либо *только* B . Множество $A \Delta B$ можно было бы назвать «суммой по модулю два» множеств A и B (берется объединение этих двух множеств, но элементы, которые при этом встречаются дважды, выбрасываются).

§ 2. Отображения. Разбиения на классы

1. Отображение множеств. Общее понятие функции.

В анализе понятие функции вводится следующим образом. Пусть X — некоторое множество на числовой прямой. Говорят, что на этом множестве определена функция f , если каждому числу

$x \in X$ поставлено в соответствие определенное число $y = f(x)$. При этом X называется *областью определения* данной функции, а Y — совокупность всех значений, принимаемых этой функцией, — ее *областью значений*.

Если же вместо числовых рассматривать множества какой угодно природы, то мы приходим к самому общему понятию функции. Пусть M и N — два произвольных множества. Говорят, что на M определена функция f , принимающая значения из N , если каждому элементу $x \in M$ поставлен в соответствие один и только один элемент y из N . Для множеств произвольной природы (как, впрочем, и в случае числовых множеств) вместо термина «функция» часто пользуются термином «отображение», говоря об отображении одного множества в другое. При специализации природы множеств M и N возникают специальные типы функций, которые носят особые названия «вектор-функция», «мера», «функционал», «оператор» и т. д. Мы столкнемся с ними в дальнейшем.

Для обозначения функции (отображения) из M в N мы будем часто пользоваться записью $f: M \rightarrow N$.

Если a — элемент из M , то отвечающий ему элемент $b = f(a)$ из N называется *образом* a (при отображении f). Совокупность всех тех элементов a из M , образом которых является данный элемент $b \in N$, называется *прообразом* (или, точнее, *полным прообразом*) элемента b и обозначается $f^{-1}(b)$.

Пусть A — некоторое множество из M ; совокупность $\{f(a) : a \in A\}$ всех элементов вида $f(a)$, где $a \in A$, называется *образом* A и обозначается $f(A)$. В свою очередь для каждого множества B из N определяется его (полный!) прообраз $f^{-1}(B)$, а именно: $f^{-1}(B)$ есть совокупность всех тех элементов из M , образы которых принадлежат B . Может оказаться, что ни один элемент b из B не имеет непустого прообраза, тогда и прообраз $f^{-1}(B)$ будет пустым множеством.

Здесь мы ограничимся рассмотрением самых общих свойств отображений.

Введем следующую терминологию. Мы будем говорить, что f есть *отображение* множества M «на» множество N , если $f(M) = N$; такое отображение называют также *сюръекцией*. В общем случае, т. е. когда $f(M) \subset N$, говорят, что f есть *отображение* M «в» N .

Если для любых двух различных элементов x_1 и x_2 из M их образы $y_1 = f(x_1)$ и $y_2 = f(x_2)$ также различны, то f называется *инъекцией*. Отображение $f: M \rightarrow N$, которое одновременно является сюръекцией и инъекцией, называется *биекцией* или *взаимно однозначным соответствием между* M и N .

Установим основные свойства отображений.

Теорема 1. *Прообраз суммы двух множеств равен сумме их прообразов:*

$$f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B).$$

Доказательство. Пусть элемент x принадлежит множеству $f^{-1}(A \cup B)$. Это означает, что $f(x) \in A \cup B$, т.е. $f(x) \in A$ или $f(x) \in B$. Но тогда x принадлежит по крайней мере одному из множеств $f^{-1}(A)$ или $f^{-1}(B)$, т.е. $x \in f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$. Обратно, если $x \in f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$, то x принадлежит по крайней мере одному из множеств $f^{-1}(A)$ и $f^{-1}(B)$, т.е. $f(x)$ принадлежит хотя бы одному из множеств A или B , следовательно, $f(x) \in A \cup B$, но тогда $x \in f^{-1}(A \cup B)$.

Теорема 2. *Прообраз пересечения двух множеств равен пересечению их прообразов:*

$$f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B).$$

Доказательство. Если $x \in f^{-1}(A \cap B)$, то $f(x) \in A \cap B$, т.е. $f(x) \in A$ и $f(x) \in B$, следовательно, $x \in f^{-1}(A)$ и $x \in f^{-1}(B)$, т.е. $x \in f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$.

Обратно, если $x \in f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$, т.е. $x \in f^{-1}(A)$ и $x \in f^{-1}(B)$, то $f(x) \in A$ и $f(x) \in B$. Иначе говоря, $f(x) \in A \cap B$. Следовательно, $x \in f^{-1}(A \cap B)$.

Теорема 3. *Образ суммы двух множеств равен сумме их образов:*

$$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B).$$

Доказательство. Если $y \in f(A \cup B)$, то это означает, что $y = f(x)$, где x принадлежит по крайней мере одному из множеств A и B . Следовательно, $y = f(x) \in f(A) \cup f(B)$. Обратно, если $y \in f(A) \cup f(B)$, то $y = f(x)$, где x принадлежит по крайней мере одному из множеств A и B , т.е. $x \in A \cup B$ и, следовательно, $y = f(x) \in f(A \cup B)$.

Теоремы 1, 2 и 3 остаются в силе для сумм и пересечений любого (конечного или бесконечного) числа множеств.

Заметим, что *образ пересечения двух множеств, вообще говоря, не совпадает с пересечением их образов*. Например, пусть рассматриваемое отображение представляет собой проектирование плоскости на ось x . Тогда отрезки

$$\begin{aligned} 0 \leq x \leq 1, & \quad y = 0, \\ 0 \leq x \leq 1, & \quad y = 1 \end{aligned}$$

не пересекаются, а в то же время их образы совпадают.

Упражнение. Докажите, что прообраз дополнения равен дополнению прообраза. Верно ли аналогичное утверждение для образа дополнения?

2. Разбиение на классы. Отношения эквивалентности.

В самых различных вопросах встречаются разбиения тех или иных множеств на попарно непересекающиеся подмножества. Например, плоскость (рассматриваемую как множество точек) можно разбить на прямые, параллельные оси x , трехмерное пространство можно представить как объединение концентрических сфер различных радиусов (начиная с $r = 0$), жителей данного города можно разбить на группы по их году рождения и т. п.

Каждый раз, когда некоторое множество M представлено тем или иным способом как сумма попарно непересекающихся подмножеств, мы говорим о *разбиении множества M на классы*.

Обычно приходится иметь дело с разбиениями, построенными на базе того или иного признака, по которому элементы множества M объединяются в классы. Например, множество всех треугольников на плоскости можно разбить на классы равных между собой или на классы равновеликих треугольников, все функции от x можно разбить на классы, собирая в один класс функции, принимающие в данной точке одинаковые значения, и т. д.

Признаки, по которым элементы множества разбиваются на классы, могут быть самыми разнообразными. Но все же такой признак не вполне произволен. Предположим, например, что мы захотели бы разбить все действительные числа на классы, включая число b в тот же класс, что и число a , в том и только в том случае, когда $b > a$. Ясно, что никакого разбиения действительных чисел на классы таким путем получить нельзя, так как если $b > a$, т.е. если b следует зачислить в тот же класс, что и a , то $a < b$, т.е. число a *нельзя* включить в тот же класс, что и b . Кроме того, так как a не больше, чем само a , то a *не должно попасть* в один класс с самим собой! Другой пример. Попробуем разбить точки плоскости на классы, относя две точки к одному классу в том и только том случае, когда расстояние между ними меньше 1. Ясно, что добиться этого нельзя, так как если расстояние от a до b меньше 1 и расстояние от b до c меньше 1, то это вовсе не означает, что расстояние от a до c меньше 1. Таким образом, зачисляя a в один класс с b , а b в один класс с c , мы получим, что в один и тот же класс могут попасть две точки, расстояние между которыми больше 1.

Приведенные примеры подсказывают условия, при которых тот или иной признак действительно позволяет разбить элементы некоторого множества на классы.

Пусть M — некоторое множество и пусть некоторые из пар (a, b) элементов этого множества являются «отмеченными»¹⁾. Если (a, b) — «отмеченная» пара, то мы будем говорить, что элемент a связан с b отношением φ , и обозначать это символом $a \sim_{\varphi} b$. Например, если имеется в виду разбиение треугольников на классы равновеликих, то $a \sim_{\varphi} b$ означает «треугольник a имеет ту же площадь, что и треугольник b ». Данное отношение φ называется *отношением эквивалентности*, если оно обладает следующими свойствами.

- 1) Рефлексивность: $a \sim_{\varphi} a$ для любого элемента $a \in M$.
- 2) Симметричность: если $a \sim_{\varphi} b$, то $b \sim_{\varphi} a$.
- 3) Транзитивность: если $a \sim_{\varphi} b$ и $b \sim_{\varphi} c$, то $a \sim_{\varphi} c$.

Эти условия необходимы и достаточны для того, чтобы отношение φ (признак!) позволяло разбить множество M на классы. В самом деле, всякое разбиение данного множества на классы определяет между элементами этого множества некоторое отношение эквивалентности. Действительно, если $a \sim_{\varphi} b$ означает « a находится в том же классе, что и b », то отношение φ будет, как легко проверить, рефлексивным, симметричным и транзитивным.

Обратно, пусть φ — некоторое отношение эквивалентности между элементами множества M и K_a — класс элементов x из M , эквивалентных данному элементу a : $x \sim_{\varphi} a$. В силу свойства рефлексивности элемент a сам принадлежит классу K_a . Покажем, что два класса K_a и K_b либо совпадают, либо не пересекаются. Пусть некоторый элемент c принадлежит одновременно и K_a , и K_b , т. е. $c \sim_{\varphi} a$ и $c \sim_{\varphi} b$. Тогда в силу симметричности $a \sim_{\varphi} c$ и в силу транзитивности

$$a \sim_{\varphi} b. \quad (1)$$

Если теперь x — произвольный элемент из K_a , т. е. $x \sim_{\varphi} a$, то в силу (1) и свойства транзитивности $x \sim_{\varphi} b$, т. е. $x \in K_b$.

Точно так же доказывается, что всякий элемент $y \in K_b$ входит в K_a . Таким образом, два класса K_a и K_b , имеющих хотя бы один общий элемент, совпадают между собой. Мы получили разбиение множества M на классы по заданному отношению эквивалентности.

Понятие разбиения множества на классы тесно связано с рассмотренным в предыдущем пункте понятием отображения.

Пусть f — отображение множества A в множество B . Собрав в один класс все элементы из A , образы которых в B совпадают,

¹⁾ При этом элементы a и b берутся в определенном порядке, т. е. (a, b) и (b, a) — две, вообще говоря, различные пары.

мы получим, очевидно, некоторое разбиение множества A . Обратно, рассмотрим произвольное множество A и некоторое его разбиение на классы. Пусть B — совокупность тех классов, на которые разбито множество A . Ставя в соответствие каждому элементу $a \in A$ тот класс (т. е. элемент из B), к которому a принадлежит, мы получим отображение множества A на множество B .

Примеры. 1. Спроектируем плоскость xy на ось x . Прообразы точек оси x — вертикальные прямые. Следовательно, этому отображению отвечает разбиение плоскости на параллельные прямые.

2. Разобьем все точки трехмерного пространства на классы, объединив в один класс точки, равноудаленные от начала координат. Каждый класс представляет собой сферу некоторого радиуса. Совокупность всех этих классов можно отождествить с множеством всех точек, лежащих на луче $[0, \infty)$. Итак, разбиению трехмерного пространства на концентрические сферы отвечает отображение этого пространства на полупрямую.

3. Объединим в один класс все действительные числа с одинаковой дробной частью. Этому разбиению отвечает отображение прямой линии на окружность единичной длины.

Понятие эквивалентности является частным случаем более общего понятия бинарного отношения. Пусть M — произвольное множество. Обозначим через $M \times M$ или M^2 совокупность всех упорядоченных пар (a, b) , где $a, b \in M$. Говорят, что в M задано *бинарное отношение* φ , если в M^2 выделено произвольное подмножество R_{φ} . Точнее говоря, мы скажем, что элемент a находится в отношении φ к элементу b — обозначение $a \varphi b$ — в том и только том случае, когда пара (a, b) принадлежит R_{φ} . Примером бинарного отношения может служить отношение тождества ε ; именно, $a \varepsilon b$ в том и только том случае, если $a = b$; иначе говоря, это — отношение, задаваемое диагональю Δ в $M \times M$, т. е. подмножеством пар вида (a, a) . Ясно, что всякое отношение эквивалентности φ в некотором множестве M есть бинарное отношение, подчиненное следующим условиям.

- 1) Диагональ Δ принадлежит R_{φ} (рефлексивность).
- 2) Если $(a, b) \in R_{\varphi}$, то и $(b, a) \in R_{\varphi}$ (симметричность).
- 3) Если $(a, b) \in R_{\varphi}$ и $(b, c) \in R_{\varphi}$, то и $(a, c) \in R_{\varphi}$ (транзитивность).

Итак, эквивалентность — это бинарное отношение, удовлетворяющее условиям рефлексивности, транзитивности и симметричности. В § 4 мы рассмотрим другой важный частный случай бинарного отношения — частичную упорядоченность.

§ 3. Эквивалентность множеств. Понятие мощности множества

1. Конечные и бесконечные множества. Рассматривая различные множества, мы замечаем, что иногда можно, если не фактически, то хотя бы примерно, указать число элементов в данном множестве. Таковы, например, множество всех вершин некоторого многогранника, множество всех простых чисел, не превосходящих данного числа, множество всех молекул воды на Земле и т. д. Каждое из этих множеств содержит конечное, хотя, быть может, и неизвестное нам число элементов. С другой стороны, существуют множества, состоящие из бесконечного числа элементов. Таково, например, множество всех натуральных чисел, множество всех точек на прямой, всех кругов на плоскости, всех многочленов с рациональными коэффициентами и т. д. При этом, говоря, что множество бесконечно, мы имеем в виду, что из него можно извлечь один элемент, два элемента и т. д., причем после каждого такого шага в этом множестве еще останутся элементы.

Два конечных множества мы можем сравнивать по числу элементов и судить, одинаково это число или же в одном из множеств элементов больше, чем в другом. Спрашивается, можно ли подобным же образом сравнивать бесконечные множества? Иначе говоря, имеет ли смысл, например, вопрос о том, чего больше: кругов на плоскости или рациональных точек на прямой, функций, определенных на отрезке $[0, 1]$, или прямых в пространстве, и т. д.?

Посмотрим, как мы сравниваем между собой два конечных множества. Можно, например, сосчитать число элементов в каждом из них и, таким образом, эти два множества сравнить. Но можно поступить и иначе, именно, попытаться установить *биекцию*, т. е. взаимно однозначное соответствие между элементами этих множеств, иначе говоря, такое соответствие, при котором каждому элементу одного множества отвечает один и только один элемент другого, и наоборот. Ясно, что взаимно однозначное соответствие между двумя конечными множествами можно установить тогда и только тогда, когда число элементов в них одинаково. Например, чтобы проверить, одинаково ли число студентов в группе и стульев в аудитории, можно, не пересчитывая ни тех, ни других, посадить каждого студента на определенный стул. Если мест хватит всем и не останется ни одного лишнего стула, т. е. если будет установлена биекция между этими двумя множествами, то это и будет означать, что число элементов в них одинаково.

Заметим теперь, что если первый способ (подсчет числа элементов) годится лишь для сравнения конечных множеств, второй (установление взаимно однозначного соответствия) пригоден и для бесконечных.

2. Счетные множества. Простейшим среди бесконечных множеств является множество натуральных чисел. Назовем *счетным множеством* всякое множество, элементы которого можно биективно сопоставить со всеми натуральными числами. Иначе говоря, счетное множество — это такое множество, элементы которого можно занумеровать в бесконечную последовательность: $a_1, \dots, a_n, \dots$ Приведем примеры счетных множеств.

1. *Множество всех целых чисел.* Установим соответствие между всеми целыми и всеми натуральными числами по следующей схеме:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & -1 & 1 & -2 & 2 & \dots, \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \dots, \end{array}$$

вообще, неотрицательному числу $n \geq 0$ сопоставим нечетное число $2n + 1$, а отрицательному $n < 0$ — четное число $2|n|$:

$$\begin{array}{ll} n \leftrightarrow 2n + 1 & \text{при } n \geq 0, \\ n \leftrightarrow 2|n| & \text{при } n < 0. \end{array}$$

2. *Множество всех четных положительных чисел.* Соответствие очевидно: $n \leftrightarrow 2n$.

3. *Множество $2, 4, 8, \dots, 2^n, \dots$ степеней числа 2.* Здесь соответствие также очевидно. Каждому числу 2^n сопоставляется число n .

4. Рассмотрим более сложный пример, а именно, покажем, что *множество всех рациональных чисел* счетно. Каждое рациональное число однозначно записывается в виде несократимой дроби $\alpha = p/q$, $q > 0$. Назовем сумму $|p| + q$ *высотой* рационального числа α . Ясно, что число дробей с данной высотой n конечно. Например, высоту 1 имеет только число $0/1$, высоту 2 — числа $1/1$ и $-1/1$, высоту 3 — числа $2/1$, $1/2$, $-2/1$ и $-1/2$ и т. д. Будем нумеровать все рациональные числа по возрастанию высоты, т. е. сперва выпишем числа высоты 1, потом — числа высоты 2 и т. д. При этом всякое рациональное число получит некоторый номер, т. е. будет установлено взаимно однозначное соответствие между всеми натуральными и всеми рациональными числами.

Бесконечное множество, не являющееся счетным, называется *несчетным* множеством.