Московский
педагогический
государственный
университет

А. В. Царев, Г. В. Шеина

ЭЛЕМЕНТЫ АБСТРАКТНОЙ И КОМПЬЮТЕРНОЙ АЛГЕБРЫ

Москва
2016

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Московский педагогический государственный университет»

А. В. Царев, Г. В. Шеина

ЭЛЕМЕНТЫ АБСТРАКТНОЙ И КОМПЬЮТЕРНОЙ АЛГЕБРЫ

Учебное пособие

МПГУ
Москва • 2016

УДК 512 (07)
ББК 22.14я73
Ц181

Рецензенты:

В. А. Артамонов, доктор физико-математических наук,
профессор кафедры высшей алгебры
Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова

О. В. Муравьева, кандидат физико-математических наук, доцент
кафедры теоретической информатики и дискретной математики
Московского педагогического государственного университета

Царев, Андрей Валерьевич.

Ц181 Элементы абстрактной и компьютерной алгебры : Учебное пособие / А. В. Царев, Г. В. Шеина. – Москва : МПГУ, 2016. – 116 с.

ISBN 978-5-4263-0393-5

Учебное пособие подготовлено на кафедре алгебры МПГУ и адресовано студентам математических факультетов педвузов. В нем рассматриваются не только необходимые теоретические основы курса «Абстрактная и компьютерная алгебра», но и приводится большое количество задач разного уровня сложности, в том числе и задания для самостоятельных и контрольных работ.

УДК 512 (07)
ББК 22.14я73

ISBN 978-5-4263-0393-5

Оглавление

§1. Необходимые сведения из абстрактной алгебры

Отношения

Элементы двух или нескольких множеств могут быть связаны друг с другом тем или иным образом. Например, две прямые в пространстве могут быть параллельными, перпендикулярными, скрещивающимися. Две прямые могут быть перпендикулярны одной и той же плоскости. Алгебраические выражения могут быть тождественно равными. Для описания подобного рода связей нам понадобятся понятия прямого произведения и отношения.

Прямое произведение множеств

Определение. **Прямым произведением** двух множеств A и B называется множество всевозможных упорядоченных пар вида (a, b), где $a \in A$, $b \in B$. Прямое произведение обозначается так: $A \times B$.

Замечание. Слова «множество *упорядоченных* пар» означают, что пары (a, b) и (b, a) различны, если $a \neq b$.

Отметим, что пары (a, b) и (a_1, b_1) мы считаем **равными тогда и только тогда**, когда $a = a_1$ и $b = b_1$.

Пример 1. Прямое произведение множества $\mathbb{R}$ на себя, то есть $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, обозначается как $\mathbb{R}^2$. Оно обычно отождествляется с множеством координат всех точек плоскости.

Приведем пример множества, не представимого в виде прямого произведения.

Пример 2. Рассмотрим множество M точек на плоскости $\mathbb{R}^2$, задаваемое уравнением $x^2 + y^2 = 1$. Покажем, что множество M не может быть представлено в виде прямого произведения множеств $A \subseteq \mathbb{R}$ и $B \subseteq \mathbb{R}$. Предположим, напротив, что множество M может быть представлено в виде прямого произведения множеств $A \subseteq \mathbb{R}$ и $B \subseteq \mathbb{R}$, то есть справедливо равенство $M = A \times B$.

Точка $(0; 1)$ удовлетворяет уравнению $x^2 + y^2 = 1$. Поэтому $1 \in B$. Уравнению $x^2 + y^2 = 1$ удовлетворяет также точка $(1; 0)$, поэтому $1 \in A$. Точка $(1; 1)$, по определению прямого произведения, также должна принадлежать прямому произведению, и если $M = A \times B$, то ее координаты должны удовлетворять уравнению окружности. Но последнее неверно.

Наряду с прямым произведением двух множеств можно рассматривать также прямое произведение n множеств $A_1, \dots, A_n$, которое обычно обозначают

$A_1 \times \dots \times A_n$.

По определению, $A_1 \times \dots \times A_k = \{(a_1, \dots, a_k), a_1 \in A_1, \dots, a_k \in A_k\}$.

В случае конечных множеств A_1 и A_2 количество элементов в прямом произведении равно $n(A) \cdot n(B)$, где $n(M)$ есть число элементов множества M.

Индукцией по числу сомножителей можно показать, что

$$n(A_1 \times \dots \times A_k) = n(A_1) \cdot \dots \cdot n(A_k).$$

Задача. Пусть $A = \{a, b\}, B = \{c, d, e\}$. Выпишите все элементы прямых произведений $A \times A, A \times B, B \times A, B \times B, A \times A \times A$.

Бинарные отношения

Элементы двух множеств или одного и того же множества могут находиться в различных отношениях по отношению друг к другу. Например, относительно двух натуральных чисел можно выяснять, какое из них больше, или является ли одно из них делителем другого.

В обычной жизни мы также выясняем, являются ли два человека, например, членами одной семьи, а также является ли один человек старше другого. Дадим определение математического понятия отношения.

Определение. Любое подмножество прямого произведения множеств A и B называется **бинарным отношением** между элементами множеств A и B.
Таким образом, если $R \subseteq A \times B$, то R называется бинарным отношением. При этом говорят, что если $(x, y) \in R$, то для элементов x, y *выполняется отношение* R. Вместо записи $(x, y) \in R$ часто используют более простую запись xRy.

Примеры

- На множестве всех людей можно рассматривать отношения быть родителем, быть сестрой, быть братом, быть друзьями.
- На множестве всех прямых плоскости можно рассмотреть отношение быть параллельными или перпендикулярными.
- На множестве действительных чисел можно рассмотреть отношения «порядка»: одно число строго меньше другого, одно число не больше другого и т. д.
- Множество R точек на плоскости $\mathbb{R}^2$, задаваемое неравенством $x^2 + y^2 < 1$ также задает бинарное отношение между действительными числами. Например, числа $x = 0{,}5$ и $y = 1$ не находятся в этом отношении, а числа $x = 0{,}5$ и $y = 0{,}4$ находятся в этом отношении.

Виды бинарных отношений

Перейдем теперь к рассмотрению бинарных отношений в случае, когда $A = B$. Рассмотрим наиболее распространенные (в математике) виды и примеры таких бинарных отношений.

1. **Рефлексивные** отношения. Так называются отношения R на множестве A, обладающие свойством:
   для любого элемента $a \in A$ выполняется условие $(a, a) \in R$.

   Примеры.

   - Отношение «число x делит число y» на множестве натуральных чисел является рефлексивным, поскольку каждое натуральное число является своим делителем.
   - Отношение $x < y$ на множестве действительных чисел не является рефлексивным, а отношение $x \leq y$ является рефлексивным.

2. **Симметричные** отношения. Так называются отношения R на множестве A, у которых для любых элементов $a, b \in A$ из того, что $(a, b) \in R$, следует, что $(b, a) \in R$.

   Примеры.

   - Отношение «число x делит число y» на множестве натуральных чисел не является симметричным, поскольку, например, число 2 делит число 4, а 4 не делит число 2.
   - Отношение $x < y$ на множестве действительных чисел не является симметричным; отношение $x \leq y$ также не является симметричным.

Замечание.

Пусть отношение R задает отношение на множестве действительных чисел, то есть $R \subseteq \mathbb{R}^2$. Тогда рефлексивность и симметричность можно «видеть»: для рефлексивных отношений все точки прямой $y = x$ должны принадлежать множеству R.

Для симметричных отношений множество R должно располагаться симметрично относительно прямой $y = x$.

Задача. Изобразите множество решений неравенства $y > x$ и неравенства $y > -x$ и, используя замечание, убедитесь в том, что первое отношение не симметрично, а второе симметрично.

3. Антисимметричные отношения. Так называются отношения, у которых для любых элементов $x, y \in A$ выполняется условие $\begin{cases} xRy \\ yRx \end{cases} \Rightarrow x = y$.

Примеры

- Отношение «число x делит число y» на множестве **натуральных** чисел является антисимметричным, поскольку если натуральное число x делит число y и число y делит число x, то $x = y$.
- Отношение «число x делит число y» на множестве **целых** чисел не является антисимметричным, поскольку если целое число x делит целое число y и число y делит число x, то $x = \pm y$.

4. Транзитивные отношения. Так называются отношения, у которых для любых элементов $x, y, z \in A$ выполняется условие $\begin{cases} xRy \\ yRz \end{cases} \Rightarrow xRz$.

Примеры

- Отношение $x \leq y$ (или $x < y$) на множестве действительных чисел является транзитивным.
- Отношение делимости на множестве целых чисел является транзитивным.

5. Отношения порядка. Все отношения порядка должны обладать свойствами:

1) антисимметричность;
2) транзитивность;
3) отношение **нестрогого** порядка должно, кроме того, быть рефлексивным.

Примеры

- Отношение $\subseteq$ на множестве $P(M)$ всех подмножеств данного множества M задает (нестрогий) порядок.
- Отношение $x \leq y$ также задает нестрогий порядок на множестве действительных чисел.

Задача 1. Приведите примеры бинарного отношения, которое

а) рефлексивно, транзитивно, но не антисимметрично;
б) транзитивно, симметрично, но не рефлексивно;
в) рефлексивно, транзитивно, но не симметрично;
г) рефлексивно, симметрично, но не транзитивно.

Областью определения отношения $R \subseteq A \times A$ называется множество таких элементов $x \in A$, для которых существует такой элемент $y \in A$, что $(x, y) \in R$.

Область определения отношения R будем обозначать δ_R.

Пример.

Область определения отношения $x^2 + y^2 = 0$ состоит из одной точки 0, а область определения отношения $x^2 + y^2 = 1$ состоит из всех точек отрезка $[-1; 1]$.

Задача 2. Докажите, что если $R \subseteq A \times A$ – транзитивно и симметрично на множестве A и область определения δ_R совпадает с A, то R – рефлексивно.

Среди всех отношений особое место занимают отношения, которые являются рефлексивными, симметричными и транзитивными. К таким отношениям относятся равенства, но не только они. Такие отношения называют **отношениями эквивалентности**.

Отношения эквивалентности. Классы эквивалентности

Определение. Отношение $R \subseteq A \times A$ называется **отношением эквивалентности** на множестве A, если оно

1) рефлексивно,
2) симметрично,
3) транзитивно.

Отношение эквивалентности будем символически обозначать знаком $\sim$ и вместо записи aRb использовать запись $a \sim b$.

Примеры

- Отношение подобия геометрических фигур является отношением эквивалентности.
- Отношение на множестве комплексных чисел, заданное так:

$$z_1 R z_2 \Leftrightarrow Re\, z_1 = Re\, z_2.$$

Задача 1. Докажите, что приведенные отношения являются отношениями эквивалентности.

Определение. Множество элементов, эквивалентных элементу $a,$ называется **классом эквивалентности** этого элемента. Мы будем обозначать этот класс эквивалентности символом C_a. Итак, $C_a = \{a' | a' \in A, a' \sim a\}$.

Задача 2. Зададим отношение на множестве комплексных чисел так:

$$z_1 R z_2 \Leftrightarrow Re\, z_1 = Re\, z_2.$$

Проверьте, что это отношение эквивалентности. Найдите класс эквивалентности числа $1 + i$. Изобразите графически все элементы этого класса эквивалентности, то есть изобразите на комплексной плоскости все комплексные числа, которые эквивалентны числу $1 + i$.

Свойства классов эквивалентности

1. Любой класс эквивалентности C_a не пуст.
2. Классы эквивалентности двух элементов совпадают тогда и только тогда, когда элементы эквивалентны: $C_a = C_{a'} \Leftrightarrow a \sim a'$.
3. Классы эквивалентности неэквивалентных элементов не пересекаются; точнее, $a \nsim a' \Leftrightarrow C_a \cap C_{a'} = \emptyset$.

Учебное пособие

Царев Андрей Валерьевич
Шеина Галина Валентиновна

ЭЛЕМЕНТЫ АБСТРАКТНОЙ И КОМПЬЮТЕРНОЙ АЛГЕБРЫ

Редактор *Дубовец В. В.*
Оформление обложки *Удовенко В. Г.*
Компьютерная верстка *Дорожкина О. Н., Потрахов И. А.*

Управление издательской деятельности
и инновационного проектирования МПГУ
119571, Москва, Вернадского пр-т, д. 88, оф. 446.
Тел.: (499) 730-38-61
E-mail: izdat@mpgu.edu

Подписано в печать 04.07.2016. Формат 60x90/16.
Бум. офсетная. Печать цифровая. Объем 7,25 п. л.
Тираж 500 экз. Заказ № 565.

ISBN 978-5-4263-0393-5

9 785426 303935