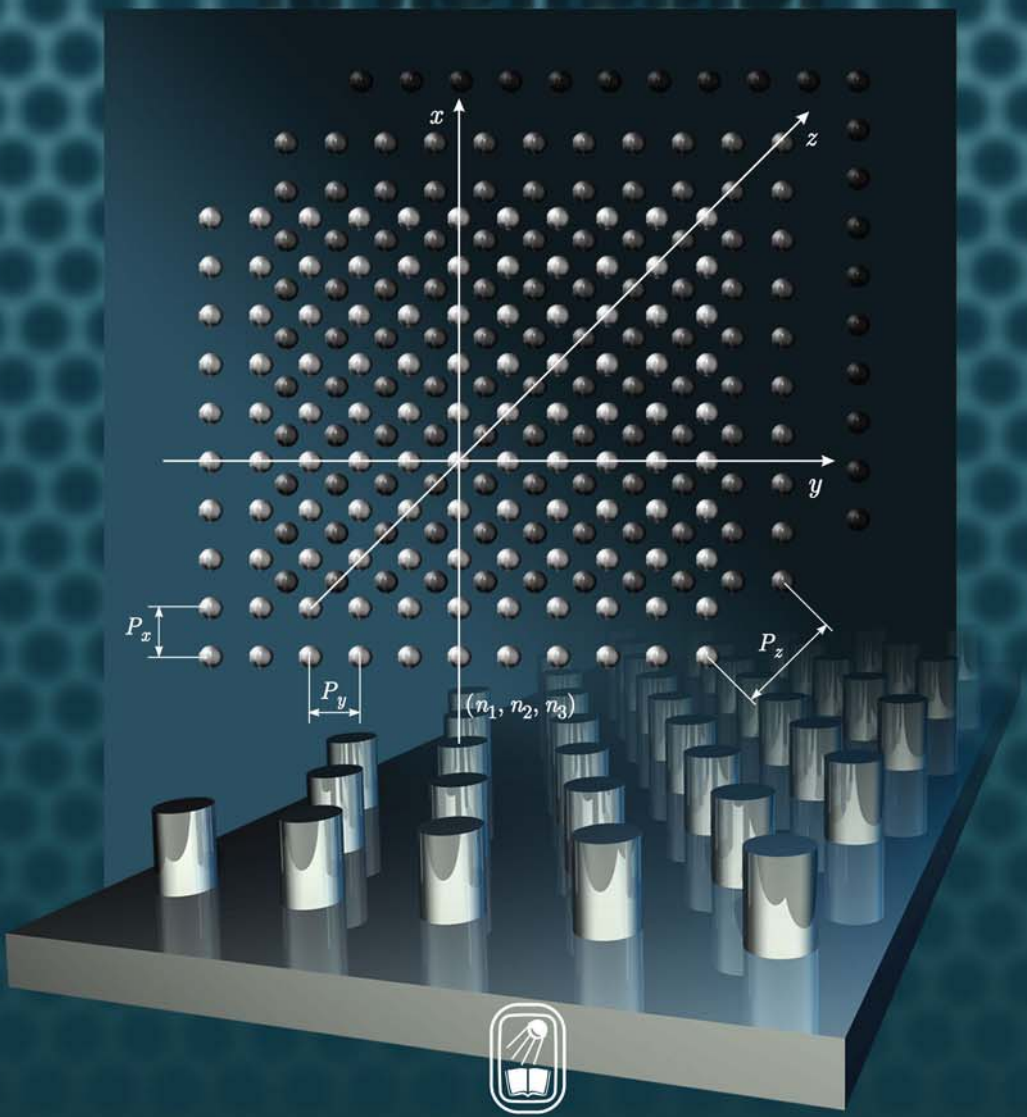
С. Е. Банков

ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ КРИСТАЛЛЫ



УДК 537.8
ББК 22.37
Б 23

Банков С. Е. **Электромагнитные кристаллы.** — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2010. — 352 с. — ISBN 978-5-9221-1272-7.

В книге рассматриваются вопросы теории практического использования неоднородных периодических сред — электромагнитных кристаллов. С помощью феноменологической модели анализируются физические явления в однородных средах: пространственная дисперсия, многоволновость, формирование запрещенных зон, киральность. Рассмотрены явления сверхфокусировки поля в линзе Веселаго и колебания Юха в неоднородных кристаллах с плоскими границами. Излагается новый подход к описанию электромагнитного поля в периодических средах — метод компенсирующих источников. С его помощью анализируется широкий класс электромагнитных кристаллов с дефектами, с помощью которых внутри периодической среды формируются волноводные элементы и функциональные узлы. Рассмотрены излучающие электромагнитные кристаллы и антенны на их основе.

ISBN 978-5-9221-1272-7

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение 5

Глава 1. **Волны в однородных электромагнитных кристаллах и метаматериалах** 12

1.1. Феноменологическая модель электромагнитного кристалла 14

1.2. Феноменологическая модель метаматериала. Волны в изотропном метаматериале 25

1.3. Отрицательные среды 30

1.4. Пространственная дисперсия и многоволновость электромагнитных кристаллов. Матричная модель электромагнитного кристалла 37

1.5. Запрещенные зоны и bandgap-кристаллы 49

1.6. Волны в изотропных киральных электромагнитных кристаллах . . . 56

Глава 2. **Неоднородные электромагнитные кристаллы и метаматериалы с плоскими границами** 61

2.1. Полубесконечный электромагнитный кристалл 63

2.2. Линза Веселаго 82

2.3. Плоско-слоистые электромагнитные кристаллы 103

Глава 3. **Метод компенсирующих источников для электромагнитных кристаллов с дефектами** 122

3.1. Метод компенсирующих источников для двумерных разреженных электромагнитных кристаллов 124

3.2. Метод компенсирующих источников для двумерных электромагнитных кристаллов общего вида 149

3.3. Специальная функция Грина для решетки осесимметричных цилиндров 165

3.4. Ключевые задачи для метода компенсирующих источников 181

3.5. Специальная функция Грина для трехмерного электромагнитного кристалла 197

Глава 4. **Волноводные СВЧ-элементы и устройства на основе электромагнитных кристаллов** 199

4.1. Принципы построения волноводных устройств на основе СВЧ-электромагнитных кристаллов 199

4.2. EBG-волноводы 217

4.3. Связанные EBG-волноводы и устройства на их основе 237

4.4. Элементы волноводного тракта 251

4.5. Волноводные делители мощности 261

4.6. Экспериментальное исследование EBG-волноводных элементов . . . 270

Глава 5. **Квазиоптические и излучающие структуры на основе электромагнитных кристаллов** 282
5.1. Принципы функционирования квазиоптических и излучающих структур. 282
5.2. Метод компенсирующих источников для щелевых решеток. 284
5.3. Волны в однородных планарных электромагнитных кристаллах . . . 299
5.4. Решетки конечной длины 309
5.5. Антенны и квазиоптические устройства на основе двумерных электромагнитных кристаллов 331
Список литературы 344

Глава 1

ВОЛНЫ В ОДНОРОДНЫХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ КРИСТАЛЛАХ И МЕТАМАТЕРИАЛАХ

Рассмотрим ряд физических явлений, которые связаны с распространением волн в однородных электромагнитных кристаллах. Во введении говорилось, что появление новых эффектов в электромагнитных кристаллах обусловлено снятием ограничений на величину периода решетки и на структуру частиц, формирующих кристалл. Мы остановимся на четырех эффектах: волны в отрицательных средах, волны в средах с пространственной дисперсией и многомодовых средах, формирование запрещенных зон в электромагнитных кристаллах, волны в киральных средах. Безусловно, этот список можно было бы продолжить. Однако мы вынуждены ограничить себя, сконцентрировав свое внимание на физических явлениях, которые привлекали особенно пристальное внимание исследователей так, что каждое из перечисленных явлений послужило отправной точкой для формирования самостоятельного научного направления.

Для того, чтобы избежать чисто описательного изложения материала в форме обзора литературы, нам необходимо уделить внимание математической модели, описывающей распространение волн в однородном электромагнитном кристалле. Вообще говоря, такая модель достаточно сложна, если она полностью описывает весь комплекс процессов, происходящих в электромагнитном кристалле. Мы будем использовать упрощенную феноменологическую модель.

Естественным образом описание полей в электромагнитном кристалле разделяется на две самостоятельные задачи. Первая задача — создание модели уединенной частицы, являющейся основой для построения кристалла. Вторая задача — это модель взаимодействия частиц через электромагнитные волны. Первая задача уникальна. Ее решение существенно зависит от структуры частицы. Вторая задача универсальна, поскольку ее решение одинаково для любого электромагнитного кристалла. Поэтому в рамках данной главы мы не будем вникать в детали решения первой задачи, а лишь зафиксируем форму, в которой должно быть оно представлено и обратим свое внимание

на вторую задачу. При этом мы вынуждены будем сделать ряд предположений о свойствах частицы, которые в реальных структурах не всегда выполняются. Однако сейчас мы не ставим цель построить универсальную модель электромагнитного кристалла, что, скорее всего, невозможно. Мы лишь хотим получить математическую модель, которая качественно верно передает особенности явлений, о которых говорилось выше. Другими словами, нам необходима феноменологическая модель однородного электромагнитного кристалла.

Мы будем рассматривать несколько модификаций такой модели. Наиболее подробно будет изучен трехмерный электромагнитный кристалл, образованный мультипольными частицами. Без подробного вывода будут представлены уравнения, описывающие волны в двумерных кристаллах, образованных частицами в виде нитей. К их числу также относится интенсивно исследуемая в настоящее время проволочная среда.

Уравнения для трехмерного электромагнитного кристалла будут получены для произвольного периода решетки. Их модификация для периода, стремящегося к нулю, соответствует уравнениям, описывающим волны в однородной среде. На первый взгляд этот случай не представляет интереса, так как он исключает эффекты, связанные с периодичностью решетки кристалла. Однако, как это отмечалось во введении, ряд интересных явлений связан с особыми свойствами частиц, формирующих кристалл. Поэтому эти явления имеют место независимо от периода решетки и могут наблюдаться, в том числе, и в однородных средах, когда кристаллическая структура не играет определяющей роли. Уравнения, описывающие волны в электромагнитном кристалле с малым периодом получили название модели метаматериала. Эта модель будет использована для описания отрицательных и киральных сред.

Следует отметить, что для объяснения разных физических явлений в электромагнитных кристаллах оказываются удобными разные способы представления электромагнитного поля в кристалле, которым соответствуют разные модели. Мы будем использовать два равноправных подхода. Основной подход связан с представлением электромагнитного кристалла как упорядоченного набора частиц, поле каждой из которых является полем совокупности элементарных диполей. В рамках второго подхода кристалл рассматривается как совокупность плоских слоев частиц, взаимодействующих через пространственные гармоники Флоке [39]. Такому представлению поля соответствует матричная модель электромагнитного кристалла. Несмотря на абсолютную эквивалентность обоих методов, матричная модель оказывается в ряде случаев более наглядной и удобной.

Мы будем использовать матричную модель электромагнитного кристалла для объяснения явления многомодовости (п. 1.4). Также она оказывается полезной при выводе соотношений, описывающих

импеданс Блоха [40] и эффективные материальные параметры однородной, изотропной среды (метаматериала) (п. 1.2).

1.1. Феноменологическая модель электромагнитного кристалла

Феноменологическая модель трехмерного электромагнитного кристалла. В этом разделе мы построим математическую модель однородного трехмерного электромагнитного кристалла, которая позволит определить параметры его собственных волн. Структура электромагнитного кристалла показана на рис. 1.1.1.

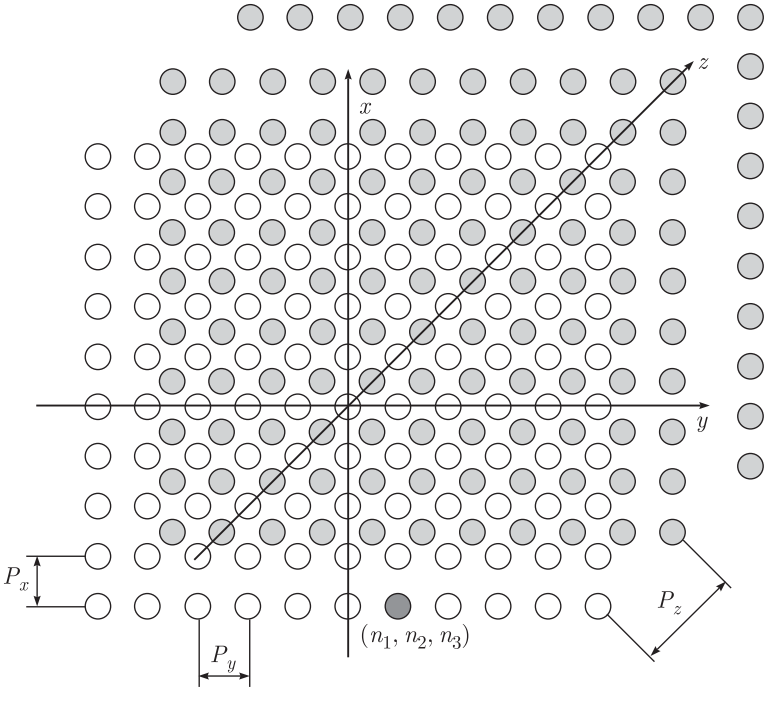


Рис. 1.1.1. Трехмерный электромагнитный кристалл

Пусть электромагнитный кристалл имеет прямоугольную решетку, в узлах которой расположены частицы, формирующие его. Полагаем, что решетка расположена в свободном пространстве и имеет периоды вдоль осей координат $0x$, $0y$ и $0z$ соответственно P_x, P_y, P_z. Положение элемента будем описывать тремя числами n_1, n_2, n_3, которые объединим в вектор $\mathbf{n}$:

$$\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3). \tag{1.1.1}$$

Тогда радиус-вектор, соединяющий центр элемента решетки с началом координат можно записать следующим образом:

$$\mathbf{r}(\mathbf{n}) = (n_1\, P_x, n_2\, P_y, n_3\, P_z). \tag{1.1.2}$$

Элементом кристалла в общем случае является некоторый объект, который может иметь достаточно сложную внутреннюю структуру. Поскольку речь в этом разделе идет об электромагнитных кристаллах, то нас интересуют электродинамические свойства частицы. Будем рассматривать исключительно пассивные структуры. В этом случае частица не является источником собственного электромагнитного излучения. Она может только реагировать на внешнее воздействие, создавая некоторое новое рассеянное поле. Это поле, в свою очередь, воздействует на соседние частицы, возбуждая их и порождая поле следующей итерации и т. д. Сумма всех полей от всех частиц формирует поле в электромагнитном кристалле.

Такая концепция формирования поля показывает, что во взаимодействии между частицами ближнее поле, сосредоточенное внутри частицы или в малой окрестности ее, не участвует. Его реализует поле, которое условно можно назвать дальним. Это поле имеет относительно простую структуру и для него можно предложить простую модель в отличие от сложного ближнего поля. При создании такой модели определяющим фактором являются геометрические размеры частицы. Пусть она имеет характерный размер ρ. Будем считать, что он удовлетворяет следующим неравенствам:

$$\rho \ll \lambda, \quad \rho \ll P_{x,y,z}, \tag{1.1.3}$$

где λ — длина волны в свободном пространстве.

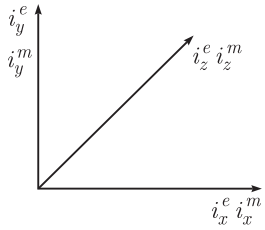


Рис. 1.1.2. Мультипольная модель частицы

Таким образом, мы считаем частицу малоразмерной. Это предположение позволяет предложить простую модель частицы в виде совокупности из шести элементарных диполей, которая показана на рис. 1.1.2.

Назовем эту модель мультипольной моделью.

Еще раз отметим, что модель частицы должна адекватно описывать лишь ее дальнее поле. Ближнее поле может отличаться от реального сколь угодно сильно.

Полагаем, что частица может описываться как электрическими, так и магнитными диполями. Вдоль элементарного диполя течет ток следующего вида:

$$\mathbf{I}^{e,m} = \mathbf{i}^{e,m}\, \delta(x - x')\, \delta(y - y')\, \delta(z - z'), \tag{1.1.4}$$

где $\mathbf{i}^{e,m}$ — плотность тока, индексы e, m соответствуют электрическому и магнитному токам, $\delta(x)$ — дельта-функция Дирака; x', y', z' — координаты точки, в которой расположен диполь.

Для компактной записи токов диполей введем вектор $\mathbf{U}$:

$$\mathbf{U} = \left(\widetilde{i}_x^e, \widetilde{i}_y^e, \widetilde{i}_z^e, i_x^m, i_y^m, i_z^m\right), \quad \widetilde{i}^e = W_0\, \mathbf{i}^e, \tag{1.1.5}$$

где $W_0 = 120\pi$ Ом — волновое сопротивление свободного пространства. При такой записи все компоненты вектора $\mathbf{U}$ имеют одинаковую размерность В/м.

Определим далее также вектор $\mathbf{E}$:

$$\mathbf{E} = \left(E_x, E_y, E_z, \widetilde{H}_x, \widetilde{H}_y, \widetilde{H}_z\right), \tag{1.1.6}$$

где $\widetilde{H} = W_0\, \mathbf{H}$. Отметим, что компоненты вектора $\mathbf{E}$ также имеют одинаковую размерность В/м.

Модель частицы устанавливает связь между векторами $\mathbf{U}$ и $\mathbf{E}$:

$$\mathbf{U} = \widehat{A}\mathbf{E}, \quad \widehat{A} = \begin{bmatrix} \widehat{a} & \widehat{b} \\ \widehat{c} & \widehat{d} \end{bmatrix}, \tag{1.1.7}$$

где компоненты тензора $\widehat{A}$ в свою очередь являются тензорами размера 3×3. В формуле (1.1.4) предполагается, что компоненты поля, входящие в вектор $\mathbf{E}$, берутся в точке размещения частицы. Важным обстоятельством является то, что в поле (1.1.6) не включается собственное поле диполей, которое в точке их расположения стремится к бесконечности.

Далее, чтобы получить самосогласованную модель взаимодействия полей внутри электромагнитного кристалла, нам необходимо просуммировать поля от всех частиц. Поле одной частицы можно найти, используя известную связь тока и векторного потенциала $\mathbf{A}^{e,m}$ [41]:

$$\mathbf{A}^{e,m} = \mathbf{i}^{e,m} G(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), \tag{1.1.8}$$

$$G(\mathbf{r}-\mathbf{r}') = \frac{1}{8\pi^2} \int\limits_{\boldsymbol{\kappa}} \frac{\exp\left[-i\kappa_1(x-x') - i\kappa_2(y-y') - \gamma|z-z'|\right]}{\gamma}\, d\boldsymbol{\kappa},$$
$$\gamma = \sqrt{\kappa_1^2 + \kappa_2^2 - k_0^2}\,, \quad d\boldsymbol{\kappa} = d\kappa_1\, d\kappa_2, \tag{1.1.9}$$

где k_0 — волновое число свободного пространства, интегрирование в (1.1.9) ведется по двум переменным в бесконечных пределах, $\boldsymbol{\kappa} = (\kappa_1, \kappa_2)$. Функция $G(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ — функция Грина свободного пространства.

Нам также потребуется связь векторного потенциала с полем, так как в уравнение (1.1.7) входят поля. Эта связь известна [41]:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= -i\omega\, \mu_a\, \mathbf{A}^e + \frac{1}{i\omega\, \varepsilon_a} \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{A}^e - \operatorname{rot} \mathbf{A}^m, \\ \mathbf{H} &= -i\omega\, \varepsilon_a\, \mathbf{A}^m + \frac{1}{i\omega\, \mu_a} \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{A}^m + \operatorname{rot} \mathbf{A}^e, \end{aligned} \tag{1.1.10}$$

где ω — круговая частота; ε_a, μ_a — абсолютные диэлектрическая и магнитная проницаемости свободного пространства. Соотношения (1.1.10) записаны в предположении, что поля зависят от времени как $\mathrm{e}^{i\omega t}$. Эта зависимость будет использоваться далее во всей книге.

Выделим в решетке элемент, характеризуемый вектором $\mathbf{n}$, и определим для него вектор $\mathbf{E_n}$, суммируя поля от всех элементов с индексами $\mathbf{n}'$ за исключением элемента с индексом $\mathbf{n}' = \mathbf{n}$:

$$\mathbf{E_n} = \frac{1}{8\pi^2} \sum_{\mathbf{n}'}^{(\mathbf{n})} \int\limits_{\boldsymbol{\kappa}} \frac{\exp\left[-i\kappa_1 P_x(n_1 - n_1') - i\kappa_2 P_y(n_2 - n_2') - \gamma P_z |n_3 - n_3'|\right]}{\gamma} \times$$
$$\times\, Z'^{\,p,m}\, d\boldsymbol{\kappa}\, \mathbf{U}_{\mathbf{n}'}. \quad (1.1.11)$$

$$Z'^{\,p,m}(\boldsymbol{\kappa}) = \begin{bmatrix} \dfrac{\widehat{L}^{p,m}(\boldsymbol{\kappa})}{ik} & -\widehat{M}^{p,m}(\boldsymbol{\kappa}) \\ \widehat{M}^{p,m}(\boldsymbol{\kappa}) & \dfrac{\widehat{L}^{p,m}(\boldsymbol{\kappa})}{ik} \end{bmatrix}, \quad (1.1.12)$$

$$\widehat{L}^{p,m}(\boldsymbol{\kappa}) = \begin{bmatrix} k^2 - \kappa_1^2 & -\kappa_1\,\kappa_2 & \pm i\kappa_1\,\gamma \\ -\kappa_1\,\kappa_2 & k^2 - \kappa_2^2 & \pm i\kappa_2\,\gamma \\ \pm i\kappa_1\,\gamma & \pm i\kappa_2\,\gamma & k^2 + \gamma^2 \end{bmatrix}, \quad (1.1.13)$$

$$\widehat{M}^{p,m}(\boldsymbol{\kappa}) = \begin{bmatrix} 0 & \pm\gamma & -i\kappa_2 \\ \mp\gamma & 0 & i\kappa_1 \\ i\kappa_2 & -i\kappa_1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (1.1.14)$$

верхний знак соответствует индексу p, а нижний — m, индекс p берется при $n_3 - n_3' > 0$, а индекс m — при $n_3 - n_3' < 0$.

Подставим (1.1.11) в формулу (1.1.7):

$$\mathbf{U_n} = \frac{1}{8\pi^2} \sum_{\mathbf{n}'}^{(\mathbf{n})} \int\limits_{\boldsymbol{\kappa}} \frac{\exp\left[-i\kappa_1 P_x(n_1 - n_1') - i\kappa_2 P_y(n_2 - n_2') - \gamma P_z |n_3 - n_3'|\right]}{\gamma} \times$$
$$\times\, \widehat{Z}^{p,m}\, d\boldsymbol{\kappa}\, \mathbf{U}_{\mathbf{n}'}, \quad \widehat{Z}^{p,m} = \widehat{A} Z'^{\,p,m}. \quad (1.1.15)$$

Система линейных алгебраических уравнений (1.1.15) описывает собственные состояния поля в электромагнитном кристалле в общем случае. Нас интересует решение частного вида. Назовем его собственной волной. Для этого ищем вектора $\mathbf{U_n}$ в следующем виде:

$$\mathbf{U_n} = \mathbf{W}(\boldsymbol{\alpha})\, \mathrm{e}^{-i\boldsymbol{\alpha}\,\mathbf{r}(\mathbf{n})}, \quad (1.1.16)$$

где $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ — волновой вектор собственной волны, а $\alpha_{1,2,3}$ — его проекции на оси $0x$, $0y$ и $0z$, которые изменяются в пределах от $-\pi/P_i$ до π/P_i $(i = x, y, z)$, где под P_i понимается соответствующий период решетки. Модуль волнового вектора равен постоянной распространения волны. Решение в форме (1.1.6) является аналогом

плоской волны в однородном пространстве. Вектор $\mathbf{W}(\boldsymbol{\alpha})$ — шестикомпонентный вектор, который определяет токи в частице, расположенной в начале координат. Токи в других частицах отличаются только экспоненциальным множителем.

Дальнейшие преобразования системы (1.1.15) связаны с подстановкой в нее соотношения (1.1.16) и суммированием по $\mathbf{n}'$. Опишем основные приемы, с помощью которых удается просуммировать ряды в (1.1.15) и избавиться от интегралов. Для суммирования рядов необходимо воспользоваться известной формулой [42]:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{in(\kappa-\alpha)\,P} = \frac{2\pi}{P} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(\kappa - \alpha - \frac{2\pi n}{P}\right). \tag{1.1.17}$$

Применяя формулу (1.1.17) к (1.1.15), мы можем преобразовать суммы по $n'_{1,2}$ для всех n'_3 кроме $n'_3 = n_3$. После преобразования мы получаем под интегралом дельта-функции, что позволяет избавиться от интегрирования. Случай $n'_3 = n_3$ необходимо рассмотреть отдельно. Применить формулу (1.1.17) при $n'_3 = n_3$ невозможно, так как из бесконечных рядов надо убрать слагаемые с $n'_{1,2} = n_{1,2}$. Для решения указанной выше проблемы воспользуемся следующим приемом. Будем искать поля в точке, смещенной относительно центра частицы на некоторое расстояние δ в положительном направлении по оси $0z$. В этой точке слагаемое с $\mathbf{n} = \mathbf{n}'$ будет конечным и его можно вычислять. В этом случае допустимо ввести его в ряд из (1.1.15) и применить формулу (1.1.17) для случая $n'_3 = n_3$ и избавиться от интегрирования. Чтобы результат не изменился, необходимо вычесть из (1.1.15) добавленное слагаемое. После этого следует совершить предельный переход при $\delta \to 0$. Сумма по n'_3 вычисляется по формуле суммирования геометрической прогрессии [43].

Выполнение всех указанных выше операций приводит нас к следующему результату:

$$\widehat{Q}(\boldsymbol{\alpha})\,\mathbf{W}(\boldsymbol{\alpha}) = 0, \tag{1.1.18}$$

$$\widehat{Q}(\boldsymbol{\alpha}) = \widehat{E} + \widehat{\Psi} \to -\frac{1}{2P_x\,P_y} \sum_{\mu} \times$$
$$\times \left(\frac{\exp\left(-(\gamma_\mu + i\alpha_3)\,P_z\right)}{1 - \exp\left(-(\gamma_\mu + i\alpha_3)\,P_z\right)} \frac{\widehat{Z}^m_\mu}{\gamma_\mu} + \frac{\exp\left(-(\gamma_\mu - i\alpha_3)\,P_z\right)}{1 - \exp\left(-(\gamma_\mu - i\alpha_3)\,P_z\right)} \frac{\widehat{Z}^p_\mu}{\gamma_\mu} \right),$$

$$\widehat{\Psi} = \lim_{\delta\to 0} \left(\frac{1}{8\pi^2} \int\limits_{\boldsymbol{\kappa}} \widehat{Z}^p(\boldsymbol{\kappa}) \frac{\exp\left(-i\gamma\,\delta\right)}{\gamma}\, d\boldsymbol{\kappa} - \frac{1}{2P_x\,P_y} \sum_{\mu} \widehat{Z}^p_\mu \frac{\exp\left(-\gamma_\mu\,\delta\right)}{\gamma_\mu} \right),$$

$$\gamma_\mu = \sqrt{\kappa_{1n}^2 + \kappa_{2m}^2 - k^2}\,,$$

$$\kappa_{1n} = \alpha_1 + \frac{2\pi n}{P_x}, \quad \kappa_{2m} = \alpha_2 + \frac{2\pi m}{P_y},$$
$$n = \ldots -1, 0, 1, \ldots, \quad m = \ldots -1, 0, 1, \ldots .$$

Выражение (1.1.18) представляет собой систему уравнений размерности 6×6, которая определяет параметры собственных волн электромагнитного кристалла. Постоянные распространения можно найти из условия существования нетривиальных решений однородной системы линейных алгебраических уравнений

$$\det\left(\widehat{Q}(\boldsymbol{\alpha})\right) = 0. \tag{1.1.19}$$

Отметим, что в уравнение (1.1.19) входят три неизвестные величины $\alpha_{1,2,3}$, а найти из него можно только одну переменную. Это означает, что уравнение (1.1.19), которое можно назвать дисперсионным уравнение электромагнитного кристалла, устанавливает функциональную связь между проекциями волнового вектора на оси координат типа $\alpha_3 = f(\alpha_1, \alpha_2)$. Эта ситуация полностью аналогична волнам в свободном пространстве, для которых решение задачи на собственные волны дает известное соотношение:

$$\alpha_3 = \sqrt{k_0^2 - \alpha_1^2 - \alpha_2^2}\,. \tag{1.1.20}$$

Кроме того, система (1.1.18) позволяет найти с точностью до постоянного множителя вектор $\mathbf{W}(\boldsymbol{\alpha})$. Будем называть уравнение (1.1.19) дисперсионным уравнением трехмерного электромагнитного кристалла.

Далее рассмотрим вычисление матрицы $\widehat{\Psi}$. Для дальнейших преобразований нам потребуется следующая функция:

$$\varphi_0(x, y, z) = \frac{1}{2P_x\,P_y} \sum_{\mu} \frac{\exp\left[-\,g_\mu\,z - i\kappa_{1n}\,x - i\kappa_{2m}\,y\right]}{g_\mu},$$
$$g_\mu = \sqrt{\kappa_{1n}^2 + \kappa_{2m}^2 + \nu^2}\,, \tag{1.1.21}$$

где ν — константа, выбор которой мы обсудим ниже.

Нам потребуется матричный дифференциальный оператор $\widehat{Z}_d$, который получается из $\widehat{Z}^{p,m}$ следующими заменами:

$$-i\kappa_1 \to \frac{\partial}{\partial x}, \quad -i\kappa_2 \to \frac{\partial}{\partial y}, \quad \pm\gamma \to \frac{\partial}{\partial z}. \tag{1.1.22}$$

Для функции (1.1.21) можно получить удобное представление, воспользовавшись следующей формулой [41]:

$$\frac{\mathrm{e}^{-g_\mu\,z - i\kappa_{1n}\,x - i\kappa_{2m}\,y}}{g_\mu} = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\nu\,r - i\kappa_{1n}(x-x') - i\kappa_{2m}(y-y')}}{r}\,dx'\,dy',$$
$$r = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z^2}\,. \tag{1.1.23}$$

Подставим соотношение (1.1.23) в (1.1.21) и применим формулу (1.1.17). Выберем константу ν так, чтобы выполнялось неравенство

$$\mathrm{e}^{-\nu P_{x,y,z}} \ll 1. \tag{1.1.24}$$

Соотношение (1.1.24) дает нам основание пренебречь всеми слагаемыми, пропорциональными $\mathrm{e}^{-\nu P_{x,y,z}}$. Тогда для функции $\varphi_0(x,y,z)$ получаем компактное представление

$$\varphi_0(x,y,z) = \frac{1}{4\pi}\,\frac{\mathrm{e}^{-\nu r}}{r}. \tag{1.1.25}$$

Под r понимается та же функция, что и в (1.1.23), но с заменой координат со штрихами на координаты без штрихов. Отметим также еще одно полезное соотношение [44]:

$$\varphi(x,y,z) = \frac{1}{8\pi^2}\int\limits_{\boldsymbol{\kappa}} \frac{\exp\left[-\gamma\, z - i\kappa_1\, x - i\kappa_2\, y\right]}{\gamma}\, d\boldsymbol{\kappa} = \frac{1}{4\pi}\,\frac{\mathrm{e}^{-ik_0 r}}{r}. \tag{1.1.26}$$

Для функций φ_0, φ можно записать в окрестности точки $r=0$ разложения по степеням r:

$$4\pi\,\varphi(x,y,z) = \frac{1}{r} - ik_0 - \frac{k_0^2 r}{2} + \ldots, \tag{1.1.27}$$

$$4\pi\,\varphi_0(x,y,z) = \frac{1}{r} - \nu + \frac{\nu^2 r}{2} + \ldots\,. \tag{1.1.28}$$

Сконструируем далее функцию $\varphi_a(x,y,z)$ таким образом, чтобы ее разложение, аналогичное (1.1.27), (1.1.28), имело бы одинаковые с (1.1.27) степени при $r^{\pm 1}$. Можно предложить следующую функцию:

$$\varphi_a(x,y,z) = \sum_{q=0}^{1} a_q \frac{\partial^{2q}\,\varphi_0(x,y,z)}{\partial \nu^{2q}}, \tag{1.1.29}$$

$$a_0 = 1, \quad a_1 = -\frac{k_0^2+\nu^2}{2}. \tag{1.1.30}$$

Применим к $\varphi_a(x,y,z)$ оператор $\widehat{Z}_d$ в точке $x=y=0$, $z=\delta$:

$$\widehat{Z}_d(\varphi_a(x,y,z)) = \widehat{f}_a(\delta), \quad x=0,\ \ y=0,\ \ z=\delta, \tag{1.1.31}$$

где

$$\widehat{f}_a(\delta) = \frac{1}{2P_x\,P_y}\sum_{\mu}\widehat{Z}_\mu^p \sum_{q=0}^{1} a_q \frac{\partial^{2q}}{\partial \nu^{2q}}\left(\frac{\mathrm{e}^{-g_\mu\,\delta}}{g_\mu}\right). \tag{1.1.32}$$

Определим матрицу $\widehat{f}(\delta)$:

$$\widehat{f}(\delta) = \frac{1}{2P_x\,P_y}\sum_{\mu}\widehat{Z}_\mu^p\,\frac{\mathrm{e}^{-\gamma_\mu\,\delta}}{\gamma_\mu}. \tag{1.1.33}$$

С учетом всех проделанных выше операций мы можем записать для $\widehat{\Psi}$ новое представление:

$$\widehat{\Psi} = \lim_{\delta\to 0}\Big(\widehat{Z}_d(\varphi(x,y,z) - \varphi_a(x,y,z))_{x=y=0,\,z=\delta} - (\widehat{f}(\delta) - \widehat{f}_a(\delta))\Big). \qquad (1.1.34)$$

Из выражения (1.1.34) понятно, зачем было предъявлено требование совпадения нечетных степеней в разложениях для функций φ_0, φ. Выполнение этого условия обеспечивает существование предела в (1.1.34). Ряды в (1.1.34) теперь сходятся при $\delta = 0$, следовательно:

$$\lim_{\delta\to 0}\left((\widehat{f}(\delta) - \widehat{f}_a(\delta))\right) = \sum_{\mu}\widehat{Z}^p_\mu\left(\frac{1}{\gamma_\mu} - \frac{1}{g_\mu} + \frac{a_1}{g^3_\mu}\left(1 - \frac{3\nu^2}{g^2_\mu}\right)\right). \qquad (1.1.35)$$

Предел от разности функций в (1.1.34) вычисляется аналитически:

$$\lim_{\delta\to 0}\Big(\widehat{Z}_d(\varphi(x,y,z) - \varphi_a(x,y,z))_{x=y=0,z=\delta}\Big) = -\frac{1}{6\pi ik}\,(\nu^3 + ik^3)\widehat{A}, \qquad (1.1.36)$$

где матрица $\widehat{A}$ определяется соотношением (1.1.7).

Следовательно, для $\widehat{\Psi}$ получаем окончательное выражение:

$$\widehat{\Psi} = \frac{1}{2P_x\,P_y}\sum_{\mu}\widehat{Z}^p_\mu\left(\frac{1}{\gamma_\mu} - \frac{1}{g_\mu} + \frac{a_1}{g^3_\mu}\left(1 - \frac{3\nu^2}{g^2_\mu}\right)\right) - \frac{1}{6\pi ik}\,(\nu^3 + ik^3)\widehat{A}. \qquad (1.1.37)$$

Таким образом, мы определили все параметры, входящие в систему уравнений (1.1.18).

Дисперсионное уравнение (1.1.19) дает нам постоянную распространения собственной волны в электромагнитном кристалле. Наряду с постоянной распространения используют также такое понятие как волновое сопротивление волны, понимая под ним отношение поперечных компонент ее электрического и магнитного полей. Если речь идет об однородной изотропной среде, то говорят о волновом сопротивлении среды, считая, что этот параметр однозначно характеризует не только волну, но и собственно среду.

Для электромагнитного кристалла, в котором эффекты, связанные с периодичностью структуры, выражены достаточно ярко, смысл в использовании волнового сопротивления не совсем очевиден. Однако при малом периоде решетки, когда электромагнитный кристалл можно рассматривать как однородную среду (см. п. 1.2) волновое сопротивление необходимо для определения материальных параметров среды, т. е. ее диэлектрической и магнитной проницаемостей. Кроме того, знание волнового сопротивления позволяет решать задачу об отражении и преломлении плоских волн на границе раздела двух метаматериалов. Таким образом, имеются практически важные случаи, в которых применение волнового сопротивления необходимо и оправданно.

Импеданс Блоха. В общем случае, когда период решетки не мал, имеется неоднозначность с определением понятия волнового сопротивления [45]. Причина появления такой неопределенности вполне понятна. Она связана с попыткой применения параметра, описывающего однородную среду, к описанию структуры, которая средой уже не является. Поэтому возникает несколько возможностей определить волновое сопротивление. Все они одинаково «неправильные». Таким образом, следует говорить не о корректности определения волнового сопротивления, а о его целесообразности. Видимо, наибольшими возможностями обладает понятие импеданса Блоха [40]. Его использование позволяет описывать электромагнитные кристаллы с периодом решетки, который формально уже малым не является [46].

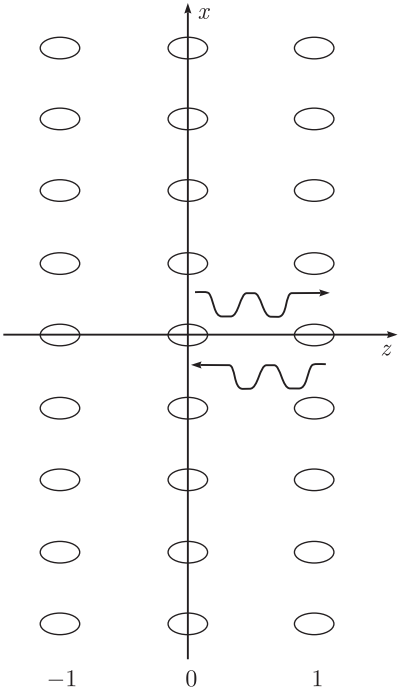


Рис. 1.1.3. К определению импеданса Блоха

Импеданс Блоха хорошо известен в теории периодических структур [40]. Он появляется в результате использования определенной концепции электромагнитного поля. Опишем ее и покажем, что она не противоречит модели, представленной выше.

В рамках указанной концепции электромагнитный кристалл рассматривается как совокупность слоев. Каждый слой расположен в плоскости, параллельной плоскости XOY. Слои находятся на расстоянии P_z друг от друга (см. рис. 1.1.3). Каждый слой представляет собой двумерно-периодическую структуру, образованную частицами, формирующими электромагнитный кристалл. Поле между слоями можно представить в виде разложения по пространственным гармоникам Флоке:

$$\mathbf{E} = \sum_{\mu} \left(\mathbf{A}_{\mu}\, \mathrm{e}^{-\gamma_{\mu} z} + \mathbf{B}_{\mu}\, \mathrm{e}^{\gamma_{\mu} z}\right) \exp\left[-\, i\kappa_{1n}\, x - i\kappa_{2m}\, y\right]. \qquad (1.1.38)$$

Выделим из ряда (1.1.38) слагаемое с $n = m = 0$ – $\mathbf{E}_0$. Припишем ему индекс μ, равный нулю. Тогда для $\mathbf{E}_0$ получаем:

$$\mathbf{E}_0 = \left(\mathbf{A}_0\, \mathrm{e}^{-\gamma_0 z} + \mathbf{B}_0\, \mathrm{e}^{\gamma_0 z}\right) \exp\left[-\, i\alpha_1\, x - i\alpha_2\, y\right]. \qquad (1.1.39)$$

Пусть поле (1.1.39) соответствует решению дисперсионного уравнения (1.1.19) относительно переменной α_3 с положительной действительной частью. Таким образом, мы рассматриваем собственную волну электромагнитного кристалла, бегущую вдоль оси $0z$ в положительном направлении. Отметим, что первое слагаемое в (1.1.39) описывает нулевую гармонику Флоке, распространяющуюся также в положительном направлении, а второе слагаемое — гармонику, распространяющуюся в отрицательном направлении. Назовем отношение поперечных компонент электрического поля, например компонент E_x, этих гармоник внутренним коэффициентом отражения R_0:

$$R_0 = \frac{B_{0x}}{A_{0x}}. \tag{1.1.40}$$

Результат не изменится, если при определении R_0 использовать компоненту E_y. Импеданс Блоха Z_b определяется через R_0 следующим образом:

$$Z_b = \frac{\gamma_0}{i\omega\,\mu_0}\,\frac{1+R_0}{1-R_0}. \tag{1.1.41}$$

Отметим, что разложение поля по гармоникам Флоке нами было неявно использовано при выводе системы (1.1.18). Поэтому нам не составит труда найти импеданс Блоха. Выразим R_0 через параметры феноменологической модели. Приведем без вывода формулу для коэффициента отражения:

$$R_0 = \frac{(Z_0'^{\,p}\mathbf{W})_x}{(Z_0'^{\,m}\mathbf{W})_x}\,\frac{1-\exp\left(-(\gamma_\mu + i\alpha_3)\,P_z\right)}{1-\exp\left(-(\gamma_\mu - i\alpha_3)\,P_z\right)}\,\exp\left((\gamma_\mu + i\alpha_3)\,P_z\right). \tag{1.1.42}$$

В выражении (1.1.42) под $\mathbf{W}$ понимается собственный вектор волны электромагнитного кристалла, который получается из решения однородной системы уравнений (1.1.18).

Феноменологическая модель двумерного электромагнитного кристалла. В заключение данного раздела мы приведем без вывода дисперсионное уравнение для важного частного случая двумерного электромагнитного кристалла. Оно очень похоже на результат для трехмерного случая, но непосредственно получить его из него весьма затруднительно. Принципиальное отличие двумерной структуры от трехмерной состоит в том, что элементами электромагнитного кристалла являются цилиндры, т. е. структуры однородные по одной из осей координат. Пусть это будет координата x. Все поля не зависят от нее, т. е.

$$\frac{\partial}{\partial x} \equiv 0. \tag{1.1.43}$$

Считаем цилиндры тонкими так, что их дальнее поле может быть представлено в виде поля нити тока с произвольной ориентацией вектора тока (см. рис. 1.1.4).

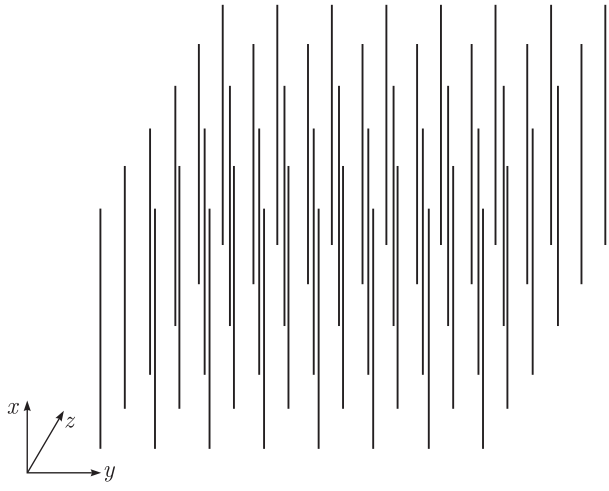


Рис. 1.1.4. Двумерный электромагнитный кристалл, образованный нитями тока

В этом случае соотношение (1.1.4) преобразуется следующим образом:

$$\mathbf{I}^{e,m} = \mathbf{i}^{e,m}\,\delta(y-y')\,\delta(z-z'). \tag{1.1.44}$$

Полностью аналогично трехмерному случаю вводятся векторы $\mathbf{U}$ и $\mathbf{E}$. Под собственной волной однородного электромагнитного кристалла понимается решение в следующей форме:

$$\mathbf{U_n} = \mathbf{W}(\boldsymbol{\alpha})\,\mathrm{e}^{-i\boldsymbol{\alpha}\,\mathbf{r}(\mathbf{n})}, \tag{1.1.45}$$

где $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2)$ — волновой вектор волны; α_1 — его проекция на ось Oy, а α_2 — проекция на ось Oz. Вектор $\mathbf{n} = (n_1, n_2)$ описывает положение элемента в двумерной решетке, индекс n_1 определяет координату y, а n_2 — координату z.

В рамках допущений, сделанных выше, матрица $\widehat{Q}(\alpha)$, задающая систему уравнений относительно компонент токов, имеет следующий вид:

$$\widehat{Q}(\boldsymbol{\alpha}) = \widehat{E} + \widehat{\Psi} \to -\frac{1}{2P_x}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \times$$
$$\times\left(\frac{\exp\left(-(\gamma_n + i\alpha_2)\,P_z\right)}{1-\exp\left(-(\gamma_n+i\alpha_2)P_z\right)}\,\frac{\widehat{Z}_n^m}{\gamma_n} + \frac{\exp\left(-(\gamma_n - i\alpha_2)\,P_z\right)}{1-\exp\left(-(\gamma_n-i\alpha_2)P_z\right)}\,\frac{\widehat{Z}_n^p}{\gamma_n}\right), \tag{1.1.46}$$
$$\gamma_n = \sqrt{\kappa_{1n}^2 - k_0^2}, \quad \kappa_{1n} = \alpha_1 + \frac{2\pi n}{P_x}, \quad n = \ldots -1, 0, 1, \ldots\,.$$

Матрицы $\widehat{Z}^{p,m}$ в формуле (1.1.46) получаются из соотношений (1.1.12)–(1.1.14) при $\kappa_2 = 0$.

Наиболее сильно отличие двумерной структуры от трехмерной проявляется в структуре матрицы $\widehat{\Psi}$:

$$\widehat{\Psi} = \lim_{\delta\to 0}\Big(\widehat{Z}_d\,(\varphi(y,z)-\varphi_a(y,z))\underset{y=0,z=\delta}{}-(\widehat{f}(\delta)-\widehat{f}_a(\delta))\Big),$$

$$\varphi(x,z)=\frac{1}{4\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{-\gamma z-i\kappa y}}{\gamma}\,d\kappa=-\frac{i}{4}\,H_0^{(2)}(k_0 r),$$

$$\varphi_0(x,z)=\frac{1}{2\pi}\,K_0(\nu r),\quad \varphi_a(x,z)=\sum_{q=0}^{1}a_q\frac{\partial^{2q}\varphi_0(y,z)}{\partial\nu^{2q}},$$

$$\widehat{f}(\delta)=\frac{1}{2P_x}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\widehat{Z}_n^p\frac{\mathrm{e}^{-\gamma_n\,\delta}}{\gamma_n},\tag{1.1.47}$$

$$\widehat{f}_a(\delta)=\frac{1}{2P_y}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\widehat{Z}_n^p\sum_{q=0}^{1}a_q\frac{\partial^{2q}}{\partial\nu^{2q}}\left(\frac{\mathrm{e}^{-g_n\,\delta}}{g_n}\right),$$

$$a_0=1,\quad a_1=-\frac{k_0^2+\nu^2}{2}.$$

1.2. Феноменологическая модель метаматериала. Волны в изотропном метаматериале

Феноменологическая модель метаматериала. В данном разделе мы построим математическую модель электромагнитного кристалла с малым периодом. В этом случае особые свойства электромагнитного кристалла, обусловленные периодичностью решетки, не проявляются и он ведет себя также как метаматериал с неупорядоченным размещением частиц. Поэтому мы можем рассматривать модель, представленную ниже, в качестве модели метаматериала, т. е. структуры, характеризуемой усредненными макроскопическими параметрами, такими как диэлектрическая и магнитная проницаемости.

Будем рассматривать электромагнитный кристалл с одинаковыми периодами по всем направлениям:

$$P_{x,y,z}=P.\tag{1.2.1}$$

Для корректного предельного перехода при $P\to 0$ необходимо сделать ряд замечаний о поведении некоторых параметров. В первую очередь, это касается матрицы $\widehat{A}$, описывающей реакцию частицы на внешнее воздействие. При уменьшении периода решетки пропорционально должны уменьшаться размеры частицы. По этой причине ее реакция на внешнее поле также должна уменьшаться. Допустим, что она пропорциональна P^3. Тогда для $\widehat{A}$ можно записать:

$$\widehat{A}=P^3\widetilde{A},\tag{1.2.2}$$

где $\widetilde{A}$ — матрица, имеющая конечные значения элементов при $P\to 0$.

При выводе соотношения для матрицы $\widehat{\Psi}$ был введен параметр ν, удовлетворяющий неравенству (1.1.24). Выполнение этого неравенства при малом периоде P требует, чтобы ν возрастал обратно пропорционально периоду:

$$\nu = \frac{\widetilde{\nu}}{P}. \tag{1.2.3}$$

В уравнение (1.1.18) входит матрица $\widehat{Z}^p_\mu$, равная $\widehat{A}Z'^p_\mu$. В выражения для элементов матрицы Z'^p_μ входят величины κ_{1n}, κ_{2m}, обратно пропорциональные периоду. Максимальная степень, с которой они входят в Z'^p_μ, равна двум. Поэтому для матрицы Z'^p_μ можно записать следующее представление:

$$Z'^p_\mu = \frac{\widetilde{Z}^p_\mu}{P^2}, \tag{1.2.4}$$

где $\widetilde{Z}^p_\mu$ остается конечной величиной при $P \to 0$.

С учетом сделанных замечаний можно определить поведение величин γ_μ и g_μ при $P \to 0$:

$$g_\mu = \frac{\widetilde{g}_\mu}{P}, \quad \widetilde{g}_\mu = \sqrt{4\pi^2(n^2+m^2)+\widetilde{\nu}^2}\,, \tag{1.2.5}$$

$$\gamma_\mu = \begin{cases} \gamma_0 & \text{при} \quad n = m = 0, \\ \dfrac{\widetilde{\gamma}_\mu}{P} & \text{при} \quad n \neq 0, \quad m \neq 0, \end{cases} \qquad \widetilde{\gamma}_\mu = 2\pi\sqrt{n^2+m^2}\,. \tag{1.2.6}$$

Из формулы (1.2.6) видно, что постоянные γ_μ по разному ведут себя в предельном случае в зависимости от индексов n, m. В частности, γ_0 не растет при уменьшении периода.

Принимая во внимание соотношения (1.2.5) и (1.2.6), можно найти предел ряда из (1.1.18). Отметим, что при ненулевых индексах n, m все члены ряда пропорциональны экспоненциально малым множителям

$$\mathrm{e}^{-2\pi\sqrt{n^2+m^2}}\,,$$

наименьший из которых равен 0,001867. Если пренебречь их вкладом, то ряд в формуле (1.1.18) сводится к сумме двух слагаемых:

$$-\frac{\widetilde{A}}{2\gamma_0}\left(\frac{\widehat{Z}^m_0}{\gamma_\mu + i\alpha_3} + \frac{\widehat{Z}^p_0}{\gamma_\mu - i\alpha_3}\right). \tag{1.2.7}$$

Формула для матрицы $\widehat{\Psi}$ преобразуется к следующему выражению:

$$\widehat{\Psi} = \widetilde{A}\,\widetilde{S},$$

$$\widetilde{S} = \frac{1}{2}\sum_\mu Z'^p_\mu\left(\frac{1}{\widetilde{\gamma}_\mu} - \frac{1}{\widetilde{g}_\mu} - \frac{\widetilde{\nu}^2}{\widetilde{g}^3_\mu}\left(1 - \frac{3\widetilde{\nu}^2}{\widetilde{g}^2_\mu}\right)\right) - \frac{\widetilde{\nu}^3}{6\pi i k}, \tag{1.2.8}$$

$$\chi_\mu = \begin{cases} 0, & n = m = 0, \\ 1, & n \neq 0, \quad m \neq 0. \end{cases} \tag{1.2.9}$$

Можно показать, что матрица $\widetilde{S}$ является произведением единичной матрицы на число S, которое определяется следующей формулой:

$$S = \frac{1}{ik_0}\left[\sum_{n,m=1}^{\infty} n^2\left(\frac{1}{\widetilde{\gamma}_\mu} - \frac{1}{\widetilde{g}_\mu} - \frac{\widetilde{\nu}^2}{\widetilde{g}_\mu^3}\left(1 - \frac{3\widetilde{\nu}^2}{\widetilde{g}_\mu^2}\right)\right) - \frac{\widetilde{\nu}^3}{6\pi}\right]. \tag{1.2.10}$$

Благодаря множителю χ_μ слагаемое с γ_0 выпадает из (1.2.8). По этой причине в выражение для $\widehat{\Psi}$ не входят волновые числа $\alpha_{1,2,3}$. Таким образом, матрица системы линейных алгебраических уравнений, определяющая волновые числа собственных волн, при $P \to 0$ имеет следующий вид:

$$\widehat{Q}(\boldsymbol{\alpha}) = \widehat{E} + \widetilde{A}S - \frac{\widetilde{A}}{2\gamma_0}\left(\frac{\widehat{Z}_0^m}{\gamma_0 + i\alpha_3} + \frac{\widehat{Z}_0^p}{\gamma_0 - i\alpha_3}\right). \tag{1.2.10}$$

Несложные, но громоздкие, преобразования позволяют записать окончательное выражение для матрицы $\widehat{Q}(\boldsymbol{\alpha})$:

$$\widehat{Q}(\boldsymbol{\alpha}) = \widehat{E} + \widetilde{A}S - \widetilde{A}\widehat{H}(\boldsymbol{\alpha})\frac{1}{\gamma_0^2 + \alpha_3^2},$$

$$\widehat{H}(\boldsymbol{\alpha}) = \frac{1}{ik_0}\begin{bmatrix} k_0^2 - \alpha_1^2 & -\alpha_1\alpha_2 & -\alpha_1\alpha_3 & 0 & \alpha_3 k_0 & -\alpha_2 k_0 \\ -\alpha_1\alpha_2 & k_0^2 - \alpha_2^2 & -\alpha_2\alpha_3 & -\alpha_3 k_0 & 0 & \alpha_1 k_0 \\ -\alpha_2\alpha_3 & -\alpha_2\alpha_3 & \alpha_1^2 + \alpha_2^2 & \alpha_2 k_0 & -\alpha_1 k_0 & 0 \\ 0 & -\alpha_3 k_0 & \alpha_2 k_0 & k_0^2 - \alpha_1^2 & -\alpha_1\alpha_2 & -\alpha_1\alpha_3 \\ \alpha_3 k_0 & 0 & -\alpha_1 k_0 & -\alpha_1\alpha_2 & k_0^2 - \alpha_2^2 & -\alpha_2\alpha_3 \\ -\alpha_2 k_0 & \alpha_1 k_0 & 0 & -\alpha_2\alpha_3 & -\alpha_2\alpha_3 & \alpha_1^2 + \alpha_2^2 \end{bmatrix}. \tag{1.2.11}$$

Напомним, что, как и в общем случае, дисперсионное уравнение для собственных волн получается из условия существования нетривиальных решений системы (1.2.11):

$$\det\left(\widehat{Q}(\boldsymbol{\alpha})\right) = 0. \tag{1.2.12}$$

Собственные волны однородного, изотропного метаматериала. Эффективные диэлектрическая и магнитная проницаемости метаматериала. Рассмотрим далее распространение собственных волн в однородном метаматериале с магнитодиэлектрическими свойствами. Этому случаю соответствует матрица $\widehat{A}$ вида

$$\widehat{A} = \begin{bmatrix} a\widehat{E} & 0 \\ 0 & d\widehat{E} \end{bmatrix}, \tag{1.2.13}$$