Андрей Багманов
Александра Солдатова

Экзамен по математике без репетитора

Практикум абитуриента

Санкт-Петербург
«БХВ-Петербург»
2004

УДК 51(076.1)
ББК 22.1я729
Б14

Багманов А., Солдатова А.

Б14 Экзамен по математике без репетитора. Практикум абитуриента. — СПб.: БХВ-Петербург, 2004. — 352 с.: ил.

ISBN 5-94157-432-0

Пособие по математике для самостоятельной подготовки к поступлению в технические вузы. Ориентировано на тестовую систему вступительных экзаменов; содержит занятия по всем разделам математики программы средней общеобразовательной школы и тренировочные тесты. Составлено с учетом затруднений и распространенных ошибок абитуриентов.

Для абитуриентов и преподавателей

УДК 51(076.1)
ББК 22.1я729

Группа подготовки издания:

Главный редактор	*Екатерина Кондукова*
Зам. главного редактора	*Людмила Еремеевская*
Зав. редакцией	*Григорий Добин*
Редактор	*Анна Кузьмина*
Компьютерная верстка	*Натальи Караваевой*
Корректор	*Виктория Пиотровская*
Дизайн обложки	*Игоря Цырульникова*
Зав. производством	*Николай Тверских*

Лицензия ИД № 02429 от 24.07.00. Подписано в печать 22.06.04.
Формат $60\times90^1/_{16}$. Печать офсетная. Усл. печ. л. 22.
Тираж 3000 экз. Заказ №
"БХВ-Петербург", 190005, Санкт-Петербург, Измайловский пр., 29.

Гигиеническое заключение на продукцию, товар № 77.99.02.953.Д.001537.03.02 от 13.03.2002 г. выдано Департаментом ГСЭН Минздрава России.

Отпечатано с готовых диапозитивов
в ГУП "Типография "Наука"
199034, Санкт-Петербург, 9 линия, 12

ISBN 5-94157-432-0

Содержание

Предисловие

Пособие создано на базе устоявшегося экспресс-курса, предлагаемого авторами выпускникам средних учебных заведений на завершающем этапе обучения элементарной математике. В предлагаемом виде ориентировано на самостоятельные занятия абитуриента.

В последние годы широкое распространение получила тестовая система контроля знаний; она применяется и в средних учебных заведениях, и в высшей школе. В такой же форме проводятся, как правило, выпускные и/или вступительные экзамены. На эту систему проведения испытаний рассчитана и наша книга.

Пособие состоит из 22 глав, условно именуемых занятиями, и тестов. Каждое занятие посвящено одной или двум связанным между собой темам и состоит из следующих подразделов: задачи, определяющие тему; ответы; указания; подробные решения; комментарии; задачи для самостоятельного решения и ответы к ним. Такая структура пособия, как мы надеемся, будет удобной читателю. Она отражает испытанный нами подход к организации обучения абитуриентов и учитывает специфические особенности самостоятельной работы. Задачи внутри каждого занятия значительно различаются по сложности. Одно занятие предполагает несколько часов работы. Поясним подробнее роль каждого подраздела.

- *Вводные задачи* определяют тему занятия. Как правило, расположены в порядке возрастания сложности. Решая эти задачи, учащийся может объективно оценить начальный уровень знаний по текущей теме.

- *Ответы* (к вводным задачам) предназначены для поверхностной проверки. Если все сошлось, можно переходить к последнему пункту. В принципе, не вредно заглянуть в *разд. "Решения"* и *"Комментарии"*.
- *Указания* нужны в случае, если самостоятельно отыскать решение той или иной задачи не удалось. Приводятся не ко всем задачам.
- *Решения* имеются практически везде, кроме самых простых случаев.
- *Комментарии* призваны продемонстрировать уровень общности разнообразных задач. Иногда приводятся альтернативные варианты решений.
- *Задачи для самостоятельного решения* аналогичны или похожи на определяющие тему, но зачастую значительно расширяют последнюю.

Что полезно держать под рукой при работе с пособием (помимо тетради)? Справочник (см. список литературы). Чертежные принадлежности.

Что ни в коем случае не стоит использовать (при решении задач) электронные вычислительные средства (калькулятор, компьютер и т. д.).

Материалы пособия создавались на протяжении ряда лет в процессе работы с абитуриентами и старшеклассниками. Авторы выражают благодарность за содействие в создании пособия: доценту кафедры "Высшая математика" СПбГПУ С. П. Преображенскому, доценту той же кафедры А. Н. Васильеву, другим преподавателям кафедры "Высшая математика" СПбГПУ, а также Подготовительных курсов СПбГПУ. Авторы также выражают признательность администрации средней школы № 110 Выборгского района Санкт-Петербурга в лице Т. Г. Петровой и В. Г. Самсоновой.

За все возможные ошибки и недочеты ответственность несут исключительно авторы.

Занятие 1

Вещественные числа

Натуральные числа. Пересчет элементов конечных множеств. Целые числа. Простые и составные натуральные числа, разложение составного числа на простые множители. Рациональные и иррациональные вещественные числа. Запись вещественного числа в различных формах. Изображение вещественных чисел точками числовой прямой. Сравнение вещественных чисел. Смежные вопросы.

Вводные задачи

1. Из чисел $912 \cdot 918$, $913 \cdot 917$, 915^2 выбрать наименьшее.

2. Из чисел $\frac{237}{238}, \frac{537}{538}, \frac{937}{938}$ выбрать наибольшее.

3. Найти натуральное число n, если $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{72}$.

4. Решить уравнение $x^2 + x = 2450$.

5. Что больше: 6^{12} или 12^6?

6. Найти значение $\sqrt{32} \cdot \sqrt{128}$.

7. Найти значение $\sqrt[3]{373248}$.

8. Верно ли, что число $\frac{0,(16)}{0,(8)}$ меньше 2?

9. Сколько членов насчитывает арифметическая прогрессия 10, 12, ..., 100?

10. Сколько членов насчитывает арифметическая прогрессия $\sqrt{\frac{1}{2}}$, $\frac{3}{\sqrt{2}}$, ..., $\frac{29}{\sqrt{2}}$?

11. На сколько промежутков разбивают числовую ось решения уравнения

$$(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-55)=0\,?$$

12. Сколькими точками изображаются на единичной окружности решения уравнения $\sin 4x = 0$? $\sin\frac{x}{4} = 0$?

13. Что больше: $\log_2 50$ или $\frac{11}{2}$?

14. Что больше: $\lg 15$ или $\log_2 3$?

15. Найти наименьшее целое положительное решение неравенства $x^3 - \frac{5}{x} \geq 1$.

Ответы

1. Первое. **2.** Последнее. **3.** 8. **4.** 49; -50. **5.** Первое. **6.** 64. **7.** 72. **8.** Да. **9.** 46. **10.** 15. **11.** На шесть. **12.** 8; изобразить нельзя. **13.** Первое. **14.** Второе. **15.** 2.

Указания

1. Если обозначить $915 = a$, то наши числа-произведения примут вид

$$(a-3)\cdot(a+3),\ (a-2)\cdot(a+2),\ a^2.$$

2. Вместо упомянутых чисел можно сравнивать разности единицы и этих чисел.

3. $72 = 8 \cdot 9$; $\frac{1}{72} = \frac{1}{8} - \frac{1}{9}$.

4. $x^2 + x = x \cdot (x+1)$; $2450 = 50 \cdot 50 - 50 = 49 \cdot 50 = -50 \cdot (-49)$.

5. $6^{12} = (?)^6$.

6. Оба подкоренных числа — степени двойки. Воспользуйтесь мультипликативным свойством корня.

7. Разложите на множители подкоренное число.

8. Обратите дроби в обыкновенные. В частности, для этого можно представить периодическую дробь в виде суммы бесконечной геометрической прогрессии. Кроме того, ответить на поставленный вопрос можно и без прямых вычислений, пользуясь грубыми оценками.

9. Можно, например, исходить из формулы n-го члена арифметической прогрессии.

10. Вместо данной можно рассмотреть прогрессию из нечетных натуральных чисел 1, 3, 5, ..., 29.

11. Промежутков на один больше, чем самих точек разбиения (1, 2, 3, 4, 55).

12. Решения идут с периодом $\frac{\pi}{2}$. Угловая величина полной окружности равна 2π. Дуг столько же, сколько точек разбиения. Во втором случае период структуры решений длиннее самой окружности (4π по сравнению с 2π).

13. Вместо данных чисел ($a = \log_2 50$, $b = \frac{11}{2}$) можно сравнить (натуральные) числа 2^{2a} и 2^{2b}.

14. Воспользуйтесь "методом увеличительного стекла": умножьте каждое из сравниваемых чисел на 2 и найдите целые части получившихся значений.

15. Решать неравенство не нужно.

Решения

1. Пусть $915 = a$; $\Rightarrow$ $912 \cdot 918 = (a-3) \cdot (a+3) = a^2 - 9$;

$913 \cdot 917 = (a-2) \cdot (a+2) = a^2 - 4$; $915^2 = a^2$;

$a^2 > a^2 - 4 > a^2 - 9$.

2. $\frac{237}{238} = 1 - \frac{1}{238}$; $\frac{537}{538} = 1 - \frac{1}{538}$; $\frac{937}{938} = 1 - \frac{1}{938}$.

Чем больше знаменатель, тем дроби меньше, а разности больше.

3. Поскольку $n \in \mathbb{N}$, уравнение равносильно такому: $n \cdot (n+1) = 8 \cdot (8+1)$. Очевидно, $n = 8$ — один из корней уравнения. Других корней быть не может, т. к. при $n > 8$ будем получать больше 72, а при $n < 8$ — меньше 8.

4. $x \cdot (x+1) = 49 \cdot (49+1) = -50 \cdot (-50+1)$. Очевидны корни $x_1 = 49$, $x_2 = -50$. Больше двух корней у квадратного уравнения не может быть.

5. Приводим оба числовых выражения к степени 6: $6^{12} = 6^{2 \cdot 6} = 36^6 > 12^6$.

6. Мультипликативное свойство корня:

$$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab};$$

имеем:

$$\sqrt{2^5} \cdot \sqrt{2^7} = \sqrt{2^{12}} = 2^6 = 64.$$

7. Разложим подкоренное число на простые множители:

$$373\ 248 = 2 \cdot 186\ 624 = 2^2 \cdot 93\ 312 = 2^3 \cdot 46\ 656 = 2^4 \cdot 23\ 328 =$$

$$= 2^5 \cdot 11\ 664 = 2^6 \cdot 5832 = 2^7 \cdot 2916 = 2^8 \cdot 1458 = 2^9 \cdot 729 =$$

$$= 2^9 \cdot 3 \cdot 243 = 2^9 \cdot 3^2 \cdot 81 = 2^9 \cdot 3^6$$

Таким образом, искомое значение

$\sqrt[3]{2^9 \cdot 3^6} = 2^3 \cdot 3^2 = 8 \cdot 9 = 72$.

8. $0,(8) = 0,888\ \ldots = 0,8 + 0,08 + 0,008 + \ldots = \frac{0,8}{1-0,1} = \frac{8}{9}$;

$$0,(16) = 0,161616\ldots = 0,16 + 0,0016 + 0,000016 + \ldots = \frac{0,16}{1-0,01} = \frac{16}{99};$$

$$\frac{(16/99)}{(8/9)} = \frac{2}{11} < 2.$$

Или: $0,(16) = 0,1616\ \ldots < 0,2$;

$$0,(8) = 0,888\ \ldots > 0,8\ ; \Rightarrow \frac{0,(16)}{0,(8)} < \frac{0,2}{0,8} = \frac{1}{4} < 2\ .$$

9. Количество "запятых" в записи 10, 12, ..., 100 равно

$$\frac{\langle\text{большее}\rangle - \langle\text{меньшее}\rangle}{\langle\text{длина промежутка}\rangle} = \frac{100-10}{2} = 45\ .$$

Количество самих чисел на 1 больше, т. е. 46.

10. Каждый член прогрессии — это число вида $\frac{2k-1}{\sqrt{2}}$, $k = 1, 2, ..., 15$.

Пятнадцать значений k определяют пятнадцать членов прогрессии.

11. Произведение нескольких множителей равно 0 тогда и только тогда, когда хотя бы один из множителей равен 0, а другие при этом не теряют смысла. Приравнивая к нулю по отдельности каждую скобку, получаем пять решений: 1, 2, 3, 4, 55. Эти точки разбивают числовую ось на 6 промежутков (рис. 1.1).

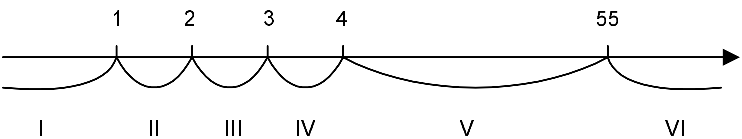

Рис. 1.1. Пять различных точек разбивают числовую ось на 6 промежутков

12. $\sin t = 0 \Leftrightarrow t = \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$; $\sin 4x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi k}{4},\ k \in \mathbb{Z}$. При $k = 0$ получаем $x = 0$; при $k = \pm 1$, $x = \pm\frac{\pi}{4}$; при $k = 2$, $x = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ и т. д. Точки идут строго с периодом $\frac{\pi}{4}$. На полной окружности (угловая мера 2π) поместятся 8 различных серий накладывающихся друг на друга точек. Во втором случае решениями будут точки $x = 4\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$, т. е.

$\{..., -4\pi, 0, +4\pi, +8\pi, ...\}$. При попытке изобразить эти числа мы получим "мигающую" точку в правой части окружности, которая будет "включаться" через раз (рис. 1.2). Более естественно изобразить эту точку не на единичной окружности, а на "единичной восьмерке" (рис. 1.3), а точка, отмеченная крестиком, — "фальшивая". Вообще же тригонометрическую окружность можно представить себе как спираль, которую мы видим "с торца" (рис. 1.4).

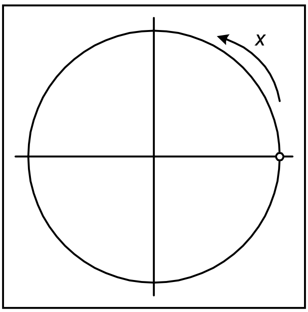

Рис. 1.2. Серии $x = 4\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$. Изображающая точка на окружности "включается" через раз

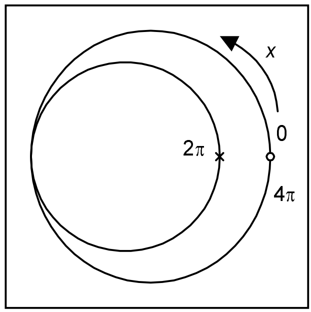

Рис. 1.3. "Двойная" окружность, "восьмерка"

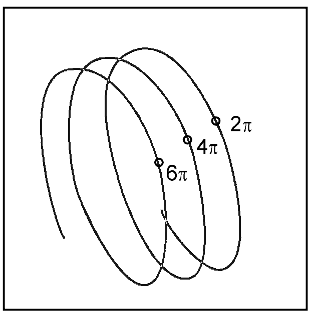

Рис. 1.4. Тригонометрическую окружность можно представить себе как спираль

13. Обозначим символом $*$ неизвестный нам знак неравенства между числами a и b: $a * b$. Этот знак заведомо не изменится на противоположный и не превратится в знак равенства, если числа удвоить: $2a * 2b$, или $2\log_2 50 * 11$, или

$\log_2 2500 * 11$. Чтобы избавиться от "неудобного" логарифма, выполним операцию, которая при решении уравнения может быть названа *потенцированием*: $2^{2a} * 2^{2b}$, или $2500 * 2^{11}$. Но поскольку $2^{10} > 1024$, то $2500 > 2048 = 2^{11}$, и $a > b$.

14. $\lg 15 * \log_2 3 \rightarrow 2\lg 15 * 2\log_2 3 \rightarrow \lg 225 * \log_2 9$.

Так как

$$\lg 225 \in \left(\underbrace{\lg 100}_{2}, \underbrace{\lg 1000}_{3}\right), \ \log_2 9 \in \left(\underbrace{\log_2 8}_{3}, \underbrace{\log_2 16}_{4}\right),$$

то между данными числами "влезет" 3.

15. Число, о котором идет речь, должно быть минимальным, удовлетворяющим двум условиям:

а) оно целое положительное;

б) оно удовлетворяет неравенству $x^3 - \dfrac{5}{x} \geq 1$.

Начнем с условия (а). Наименьшее целое положительное число — это 1. Единица не есть решение (т. к. $1^3 - \dfrac{5}{1} = -4 < 1$), т. е. не удовлетворяет условию (б). Следующей после 1 будет 2. Нетрудно видеть, это число уже подходит. Оно и будет ответом на вопрос задачи.

Комментарии

1. Алгебраический подход к решению данного арифметического примера оказался удобным. Так бывает довольно часто.

2. Последовательность

$$x_n = \frac{1}{n}, \text{ т. е. } 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$$

монотонно убывает (каждое следующее число строго меньше предыдущего) и ограничена снизу (например, нулем, т. к. все эти числа положительны.) Та последовательность, три члена которой упоминаются в условии, образуется из добавок данных чисел до 1. Эта последовательность — строго возрастающая, но все ее члены меньше 1.

3. Разумеется, данное уравнение легко сводится к квадратному. Стоит ли? Вообще, полезно запомнить, что

$$\frac{1}{N}\cdot\frac{1}{N+1}=\frac{1}{N}-\frac{1}{N+1},$$

пригодится в дальнейшем. Мы еще столкнемся со случаями, когда не нужно приводить дроби к общему знаменателю, а, наоборот, как бы развести их по разным знаменателям.

4. Если выигрыш от данного рассуждения (имеется в виду и решение задачи 3) кажется пустяковым, рассмотрите уравнение $\sqrt{x}+\sqrt[3]{3(x+5)}=5$. Идея проста: монотонно возрастающая функция принимает каждое вещественное значение не более одного раза. То же относится и к монотонно убывающей функции. Невелика доблесть алгебраически вывести очевидное решение, попутно отмахиваясь от наседающих со всех сторон неравносильностей, посторонних корней и т. п.

5. Иногда удобнее привести их к одному основанию.

6. Можно было бы перенести множитель от одного корня другому:

$$\sqrt{32}\cdot\sqrt{128}=\sqrt{32\cdot 2}\cdot\sqrt{\frac{128}{2}}=\sqrt{64}\cdot\sqrt{64}.$$

7. Если подкоренное выражение "хорошо" раскладывается на простые (или не очень простые) множители, то можно действовать в том же духе. Если нет уверенности, что корень "должен извлекаться", а получить его в какой-то обозримой форме необходимо, то можно применить приближенные методы.

8. Есть еще один простой (хотя и не очень честный с формальной точки зрения) способ обращать периодические дроби в обыкновенные — через составление уравнения. Пусть $0,(8)=0,888\ldots=x$. Тогда $10x=8,888\ldots=8+0,888\ldots=8+x$, откуда $9x=8$, $x=8/9$. Для получения значения $0,(16)$ в виде обыкновенной дроби умножать придется на 100.

9. Следует иметь в виду "Правило забора". Количество перекладин на 1 меньше количества столбов (рис. 1.5).

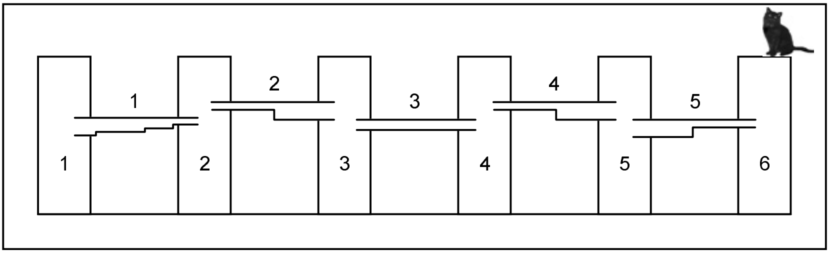

Рис. 1.5. "Правило забора"

Если же забор замкнутой формы, то количество столбов и перекладин совпадает. Например, если "столбы" — вершины правильного n-угольника, то они разобьют описанную окружность на n дуг угловой величины $\frac{2\pi}{n}$ каждая.

10. Прогрессия, о которой идет речь, задается параметрами $a_1 = \sqrt{1/2}$, $d = \sqrt{2}$ (количество членов теперь не считаем существенным параметром). Все ли ее члены — иррациональные числа? Да, все, т. к. если предположить, что $\frac{2k-1}{\sqrt{2}}$ рационально, т. е. равно $\frac{m}{n}$ ($m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$), то

$$\frac{2k-1}{\sqrt{2}} = \frac{m}{n} \Rightarrow \sqrt{2} = \frac{(2k-1)n}{m} \in \mathbb{Q},$$

т. е. $\sqrt{2}$ — рациональное число, что неверно. Деление на m законно. (Почему?)

12. Полезно иметь в виду, что количество "изображающих точек" на единичной окружности для тригонометрической серии

$$x = \alpha + \frac{\pi k}{n}, \; k \in \mathbb{Z}$$

при натуральном n будет всегда равно $2\pi/(\pi/n) = 2\pi$. Например, серия

$$x = \frac{\pi k}{2}, \; k \in \mathbb{Z}$$

задает вершины правильного четырехугольника, вписанного в единичную окружность (т. е. квадрата). Серия

$$x = -\frac{\pi k}{6} + \frac{2\pi}{3} \cdot k\,,\ \ k \in \mathbb{Z}$$

определяет треугольник, а серия

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi k\,,\ \ k \in \mathbb{Z}$$

представляет собой две точки (как и раньше, за каждой точкой окружности скрывается бесконечное множество точек спирали). Эти три случая отображены на рис. 1.6.

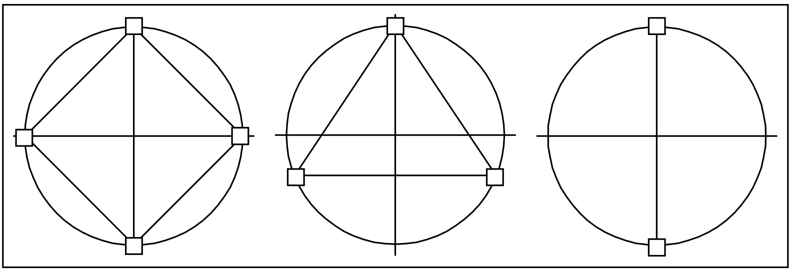

Рис. 1.6. Различные случаи изображения периодических серий решений

13. Приведенная запись процедуры сравнения вещественных чисел во многих случаях предпочтительнее любой другой. Пример: сравнить числа $\sqrt{2}+\sqrt{7}$ и $\sqrt{3}+\sqrt{6}$ (справа приведены пояснения).

$\sqrt{2} + \sqrt{7} \ * \ \sqrt{3} + \sqrt{6}$	оба числа > 0
$\left(\sqrt{2} + \sqrt{7}\right)^2 \ * \ \left(\sqrt{3} + \sqrt{6}\right)^2$	возводим в квадрат
$2 + 2\sqrt{14} + 7 \ * \ 3 + 6 + 2\sqrt{18}$	"убираем лишнее"
$\sqrt{14} \ * \ \sqrt{18}$	очевидно, $\sqrt{14}$ меньше

и потому $\sqrt{2} + \sqrt{7} < \sqrt{3} + \sqrt{6}$.

Важно, чтобы при каждом переходе от одной пары чисел к другой знак не мог измениться (этого всегда можно достичь).

14. Это совершенно иная ситуация. Аналитическими преобразованиями оба логарифма сразу убрать нельзя. В той или иной форме неопределенность останется, что бы мы с ними ни делали. Именно поэтому возникает необходимость "живой" оценки. Надо сказать, что различные оценки часто приходится выполнять в высшей математике.

15. Отметим, что в условии нет требования решить неравенство, т. е. найти все решения или доказать их отсутствие. Мы сделали ровно то, что требовалось.

Задачи для самостоятельного решения

1. Найти остаток от деления $568 \cdot 570 \cdot 573$ на 7.

2. Указать наименьшее пятизначное натуральное число, при делении на 18 дающее в остатке 3.

3. Из чисел $\frac{29}{59}$, $\frac{39}{79}$, $\frac{49}{99}$ выбрать наиболее близкое к $\frac{1}{2}$.

4. Сократить дробь $\frac{841}{899}$.

5. Найти наибольший общий делитель (НОД) и наименьшее общее кратное (НОК) чисел

а) 36 и 84;

б) 624 и 625;

в) p^n и p^m, $p = 2, 3, \ldots;$ $m > n$.

6. Найти такие числа A, B, что $\frac{A}{x} + \frac{B}{x+4} = \frac{4}{x^2 + 4x}$ для всех положительных x.

Решить уравнение (7—8):

7. $x^3 + 3x = 1030$.

8. $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2 + 2} = 1\frac{1}{3}$.

9. Что больше: $(3/2)^{20}$ или $(4/3)^{30}$?

10. Найти целое значение $\sqrt[4]{\sqrt[4]{128}\cdot\sqrt[4]{256}\cdot\sqrt[4]{2}}$.

11. Найти значение $\sqrt{30}\cdot\sqrt{110}\cdot\sqrt{132}$.

12. Верно ли, что число $7,(3)\cdot 6,(81)$ — целое?

13. Сколько положительных членов насчитывает арифметическая прогрессия 430, 421, 412, ...?

14. Указать количество нечетных четырехзначных натуральных чисел, являющихся полными квадратами.

15. Сколько решений имеет уравнение $\cos x = 1$ на промежутке $[-9\pi;\ 12\pi]$? На промежутке $[-10;\ 20]$?

16. На сколько промежутков разбивают числовую ось решения уравнения

$(2x-1)\cdot(3x-2)\cdot(4x-2)\cdot(3x-1)=0$?

17. Сколькими точками изображаются на единичной окружности решения уравнения $\sin 8x = -1$?

Сравнить числа (18—20):

18. $\sqrt{1+\sqrt{2}}$ и $\sqrt[4]{6}$.

19. $\lg 5$ и 0,7.

20. $\sqrt[5]{1+\sqrt{2}}$ и $\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{3}}$.

21. Числа $a = 2{,}5$; $b = \sqrt{5}$; $c = 5\cdot\sin\frac{\pi}{5}$ расположить в порядке возрастания.

22. Найти наибольшее целое решение неравенства $x^2 - 25x > 100$ из промежутка $[-10;\ -3]$.

23. При каком значении a уравнение $(x-1)\left(x^2+x-2\right)(x-a)=0$ имеет ровно два различных решения?

24. При каком значении a уравнение

$$\frac{(x+6)\cdot(x-2)}{x^2-a^2}=0$$

имеет ровно два различных решения?

25. Для каких $p \in \mathbb{R}$ наименьшее целочисленное решение неравенства $\dfrac{x-p}{x-4} < 0$ есть $x = 2$?

26. Является ли простым число $4^{14} - 441$?

27. Сколько различных натуральных делителей имеет число 2310?

28. Что больше: $1,034 \cdot 0,983^2$ или $1,012^2 \cdot 0,976$?

29. Найти число, обратное к половине отношения суммы наибольшего простого двузначного числа и числа, записанного теми же цифрами в обратном порядке, к наибольшему двузначному числу, кратному сумме своих цифр.

30. Выполнить действия:

$$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{3}+\sqrt{2}+2}{\sqrt{3}+1} - \frac{\sqrt{6}-\sqrt{3}-\sqrt{2}+2}{\sqrt{3}-1}.$$

31. Показать, что

$$A = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{2}-\sqrt{6}} \in \mathbb{Q}.$$

Записать значение A в стандартном виде ($A = \dfrac{n}{m}$, $n \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{N}$).

32. При каких $n \in \mathbb{Z}$ число $\sin\dfrac{60\pi}{2^n}$ не является целым?

33. Сравнить числа $\sqrt{74} - \sqrt{73}$ и $\dfrac{1}{2\sqrt{73}}$.

Указание: $(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \cdot (\sqrt{n+1} + \sqrt{n}) = 1$.

34. При каких $n \in \mathbb{Z}$ число $\dfrac{2^n}{n+1}$ будет целым?

35. Определить знак числа $4\cos\dfrac{\pi}{6} + 5\sin\dfrac{\pi}{4} - 7$.

Определение

Целой частью вещественного числа называется наибольшее целое число, не превосходящее данного. Обозначение: $[x]$. Например, $[2{,}5] = 2$, $[-2{,}5] = -3$, $[\sqrt{2}\,] = 1$.

36. Найти целую часть числа $\sqrt{24} - \sqrt{98}$.

37. Найти целую часть числа $\sqrt[3]{7} + \sqrt[3]{9}$.

Указание: ближайшее к данному целое число — это 4. Привести к противоречию неравенство $\sqrt[3]{7} + \sqrt[3]{9} > 4$. Для этого обе его части умножить на положительное числовое выражение $\sqrt[3]{49} - \sqrt[3]{63} + \sqrt[3]{81}$. Учесть, что $\sqrt[3]{49} - \sqrt[3]{63} + \sqrt[3]{81} = \left(\sqrt[3]{7} + \sqrt[3]{9}\right)^2 - 3\sqrt[3]{63}$.

Ответы

1. 4. (*Указание:* $568 = n = \underbrace{81}_{k} \cdot 7 + 1 = 7k + 1$.) **2.** 10011. (*Указание:* предварительно разделить 10 000 на 18 с остатком.) **3.** Последнее. **4.** $\frac{29}{31}$. (*Указание:* $\frac{841}{899} = 1 - \frac{58}{899} = 1 - \frac{2 \cdot 29}{899}$.) **5.** а) 12, 252; б) 1, 390 000; в) p^n, p^m. **6.** $A = 1$, $B = -1$. **7.** 10. **8.** ± 1. **9.** Второе. **10.** 2. **11.** 660. **12.** Да. Это число равно 50. **13.** 48. **14.** 34. **15.** 11; 5. **16.** На четыре. **17.** Для изображения потребуется восемь точек. **18—20.** Первое меньше. **21.** b, a, c. (*Указание:* $\sin\frac{\pi}{5} > \sin\frac{\pi}{6}$.) **22.** -4. **23.** $a \in \{-2; 1\}$. **24.** $a \neq \pm 2$, $a \neq \pm 6$. **25.** $p \in [1; 2)$. **26.** Нет. (*Указание:* $4^{14} = \left(2^{14}\right)^2$; $441 = 21^2$.) **27.** 32. **28.** Второе. (*Указание:* введите обозначения $0{,}017 = p$, $0{,}012 = q$.) **29.** $\frac{45}{44}$. **30.** 1. **31.** $A = -\frac{1}{2}$. **32.** $n = 4, 5, \ldots$. **33.** Первое меньше. **34.** $\left\{2^{m-1} - 1,\ m \in \mathbb{N}\right\}$. **35.** Минус. **36.** -6. **37.** 3.

Занятие 2

Формулы сокращенного умножения

Разность квадратов. Разность кубов. Связь формул сокращенного умножения с задачей суммирования геометрической прогрессии. Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии. Бесконечная периодическая дробь как сумма прогрессии. Квадрат суммы. Простейшие приближенные формулы. Геометрический смысл формул сокращенного умножения. Обобщения формул сокращенного умножения.

Вводные задачи

1. Упростить выражения: $(1-t)\cdot(1+t)$; $(1-t)\cdot\left(1+t+t^2\right)$;

$(1-t)\cdot\left(1+t+t^2+\ldots+t^{1000}\right)$.

2. Вычислить $\left(1-\sqrt[3]{5}\right)\cdot\left(1+\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{25}\right)$.

3. Вычислить $(1-0,1)\cdot\left(1+0,1+(0,1)^2+(0,1)^3+\ldots+(0,1)^n\right)$. Как будет вести себя данное выражение при $n\to\propto$?

4. Найти сумму $1+\varepsilon+\varepsilon^2+\varepsilon^3+\ldots+\varepsilon^n$. Исследовать случай $-1<\varepsilon<+1$, $n\to\propto$.

5. Получить значение выражения $a^5+a^4b+a^3b^2+a^2b^3+ab^4+b^5$ в компактной форме ($a>b>0$).

6. Разложить на множители $2x^2-xy-y^2$.

7. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 + xy - 2y^2 = 2, \\ 2x + y = 3. \end{cases}$$

8. Решить уравнение $9x^4 + 12x^2y^2 + 16y^4 = 0$.

9. Вывести приближенную формулу $(1+\varepsilon)^2 \approx 1 + 2\varepsilon$ для "малого" числа ε. Оценить значение $1{,}015^2$ и сравнить с точным.

10. Вывести приближенную формулу $\dfrac{1}{1+\varepsilon} \approx 1 - \varepsilon$. Оценить значение $\dfrac{1}{1{,}01}$ и сравнить с вычисленным непосредственным делением.

11. Вывести формулы квадрата суммы трех чисел и квадрата суммы *n* чисел.

12. Каков коэффициент при x^7 у многочлена $\left(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5\right)^2$?

Ответы

1. $1 - t^2$; $1 - t^3$; $1 - t^{1001}$. **2.** −4. **3.** $1 - (0{,}1)^{n+1}$; стремится к 1. **4.** $\dfrac{1-\varepsilon^{n+1}}{1-\varepsilon}$ или $\dfrac{\varepsilon^{n+1}-1}{\varepsilon-1}$ при $\varepsilon \neq 1$; $n + 1$ при $\varepsilon = 1$; при $-1 < \varepsilon < +1$, $n \to \propto$ получаем $\dfrac{1}{1-\varepsilon}$. **5.** $\dfrac{a^6 - b^6}{a - b}$. **6.** $(2x + y)\cdot(x - y)$. **7.** (5/3; −1/3); (4/3; 1/3). **8.** (0; 0). **9.** $1{,}015^2 \approx 1{,}03$; $1{,}015^2 = 1{,}030225$.

10. $\dfrac{1}{1{,}01} \approx 0{,}99$; 0.9900990099... .

11. $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2bc + 2ac + 2ab$; $(a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n)^2 =$
$= a_1{}^2 + a_2{}^2 + \ldots + a_{n-1}{}^2 + a_n{}^2 + 2a_1a_2 + 2a_1a_3 + \ldots + 2a_1a_n + 2a_2a_3 + \ldots + 2a_{n-1}a_n$.

12. 4.

Указания

1. Все три формулы можно получить непосредственным перемножением.

2. Частный случай предыдущего.

3. Значение выражения получается непосредственным умножением; $(0,1)^{n+1}$ с ростом n быстро стремится к 0.

4. Если $\varepsilon = 1$, получаем сумму $1 + 1 + ... + 1$ из n слагаемых; в противном случае все выражение домножаем и делим на $1 - \varepsilon$.

5. Вынести a^5 или b^5.

6. Вынести y^2; получится квадратичное выражение относительно $\frac{x}{y}$.

7. Разложить на множители левую часть первого уравнения. Через эти множители просто выражается левая часть второго уравнения.

8. При $y \neq 0$ выполнить деление на y^4.

9. Сравнить поведение $2y$ и $y^2 = y \cdot y$ при малых y.

10. Рассмотреть разность $\frac{1}{1+\varepsilon} - (1 - \varepsilon)$; показать ее малое значение при малых ε.

11. Формула квадрата суммы трех чисел (четырех, пяти) получается непосредственным перемножением; для случая n слагаемых можно воспользоваться методом математической индукции.

12. Выяснить, какие слагаемые в скобках "порождают" член x^7.

Решения

1. Приводим решение третьего примера.

$$(1-t)\cdot\left(1+t+t^2+\ldots+t^{1000}\right)=$$

$$=(1-t)+\left(t-t^2\right)+\left(t^2-t^3\right)+\ldots+\left(t^{1000}-t^{1001}\right)=$$

$$= 1 \underbrace{\underbrace{-t+t}_{0} \underbrace{-t^2+t^2}_{0} \underbrace{-t^3+\ldots+t^{1000}}_{0+0+\ldots+0}}_{\text{Остаются лишь непарные слагаемые: первое и последнее}} - t^{1001} = 1 - t^{1001}$$

2. $\left(1-\sqrt[3]{5}\right)\cdot\left(1+\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{25}\right)=1-\left(\sqrt[3]{5}\right)^3=1-5=-4.$

3. Сокращая слагаемые после умножения, получим выражение, содержащее лишь крайние члены: $1-(0{,}1)^{n+1}$. При большом количестве слагаемых в скобке это выражение сколь угодно мало отличается от 1, например, при $n = 1$ получаем $1-(0{,}1)^{n+1}=1-(0{,}1)^{1+1}=0{,}99$, а при $n = 5$ уже $1-(0{,}1)^{5+1}=0{,}999\,999$.

4. $1 + \varepsilon + \varepsilon^2 + \varepsilon^3 + \ldots + \varepsilon^n =$

$$\frac{(1-\varepsilon)\cdot\left(1+\varepsilon+\varepsilon^2+\varepsilon^3+\ldots+\varepsilon^n\right)}{1-\varepsilon}=\frac{1-\varepsilon^{n+1}}{1-\varepsilon}.$$

По сути, это вывод формулы суммы геометрической прогрессии. Если ε — "мал", т. е. $-1 < \varepsilon < +1$, то $\varepsilon^{n+1} \to 0$ (стремится к нулю), и вся дробь превращается в $\dfrac{1}{1-\varepsilon}$ — формула суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии.

5. $a^5 + a^4b + a^3b^2 + a^2b^3 + ab^4 + b^5 =$

$$= b^5\cdot\left(\underbrace{\frac{a^5}{b^5}+\frac{a^4}{b^4}+\frac{a^3}{b^3}+\frac{a^2}{b^2}+\frac{a}{b}+1}_{\text{Сумма геометрич. прогрессии, как в п. 4}}\right)=b^5\cdot\frac{\dfrac{a^6}{b^6}-1}{\dfrac{a}{b}-1}=\frac{a^6-b^6}{a-b}$$

или же можно выполнить умножение и деление на $a - b$.

Отметим, что каждый член указанного выражения имеет одну и ту же суммарную (по совокупности переменных a и b) степень, а именно 5. Выражения такого типа называются *однородными*.

6. Если $y \neq 0$, то

$$2x^2 - xy - y^2 = y^2 \cdot \left(2\left(\frac{x}{y}\right)^2 - \frac{x}{y} - 1 \right).$$

Пусть отношение $\frac{x}{y} = t$; тогда выражение в скобках есть $2t^2 - t - 1$. Это квадратный трехчлен с корнями $t_1 = -1/2$, $t_2 = 1$. Используя формулу разложения квадратного трехчлена на множители $a\,t^2 + b\,t + c = a\left(t - t_1\right)\left(t - t_2\right)$ для $a \neq 0$, $D > 0$, получаем

$$2t^2 - t - 1 = 2\left(t + 1/2\right)\,\left(t - 1\right) = \left(2t + 1\right)\left(t - 1\right),$$

т. е.

$$2x^2 - xy - y^2 = y^2 \cdot \left(2 \cdot \frac{x}{y} + 1 \right)\left(\frac{x}{y} - 1 \right) = \left(2x + y\right)\left(x - y\right).$$

Отметим, что если все же $y = 0$, то и тогда такое разложение на множители остается справедливым.

7. Перепишем систему в виде

$$\begin{cases} \left(x - y\right) \cdot \left(x + 2y\right) = 2, \\ \left(x - y\right) + \left(x + 2y\right) = 3. \end{cases}$$

Последнее возможно, если

$$\begin{cases} x - y = 1, \\ x + 2y = 2 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x - y = 2, \\ x + 2y = 1. \end{cases}$$

Это линейные системы.

Решение первой есть $x = 4/3$; $y = 1/3$, а второй $x = 5/3$; $y = -1/3$.

8. Если предположить, что $y = 0$, то

$$9x^4 + 12x^2 \cdot 0 + 16 \cdot 0^4 = 0,$$

и тогда $x = 0$. Если же $y \neq 0$, то можно делить на y^4. Получаем

$$9 \cdot \left(\frac{x}{y}\right)^4 + 12\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 16 = 0,$$