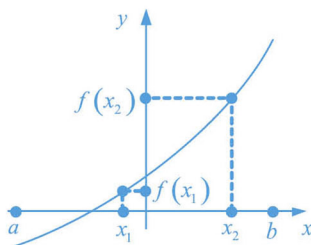
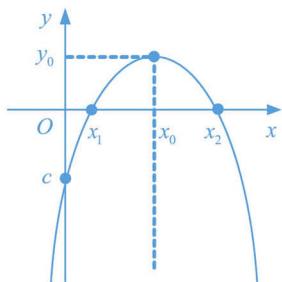


А. А. Черняк, Ж. А. Черняк

ЕГЭ ПО МАТЕМАТИКЕ

АЛГЕБРА. БАЗОВЫЙ УРОВЕНЬ
практическая подготовка



БАЗОВЫЙ

ПРОФИЛЬНЫЙ

- Компактное и наглядное представление теории
- Распространенные ошибки
- Отработка типовых и методы решения неочевидных задач
- Задачи для самостоятельного решения

УДК 373:512
ББК 22.14я72
Ч-49

Черняк, А. А.

Ч-49 ЕГЭ по математике. Алгебра. Базовый уровень.
Практическая подготовка / А. А. Черняк, Ж. А. Черняк. —
СПб.: БХВ-Петербург, 2016. — 368 с.: ил.

ISBN 978-5-9775-3737-7

В книге рассмотрены разделы школьного курса алгебры, необходимые для сдачи ЕГЭ по математике базового уровня и части профильного уровня, достаточных для абитуриентов нематематических специальностей: преобразования арифметических и алгебраических выражений; алгебраические уравнения, неравенства, системы уравнений и неравенств; тригонометрия; показательные и логарифмические уравнения, неравенства и системы уравнений и неравенств; функции, графики, производная. В каждом разделе представлены необходимые теоретические сведения, распространенные ошибки, большое количество типовых задач с ответами, методы решения неочевидных заданий с примерами, задачи для самостоятельной проработки с ответами в конце пособия.

Книга предназначена учащимся с любым уровнем начальной подготовки. Ее можно использовать для самостоятельной подготовки к базовому и профильному уровням ЕГЭ, на уроках, факультативных занятиях, подготовительных курсах, индивидуально с репетитором.

Для образовательных учреждений

УДК 373:512
ББК 22.14я72

Группа подготовки издания:

Главный редактор	<i>Екатерина Кондукова</i>
Зам. главного редактора	<i>Людмила Еремеевская</i>
Зав. редакцией	<i>Екатерина Капалыгина</i>
Редактор	<i>Анна Кузьмина</i>
Компьютерная верстка	<i>Ольги Сергиенко</i>
Корректор	<i>Зинаида Дмитриева</i>
Дизайн обложки	<i>Марины Дамбиевой</i>

Подписано в печать 29.02.16.

Формат 60×90¹/₁₆. Печать офсетная. Усл. печ. л. 23.

Тираж 1200 экз. Заказ №

"БХВ-Петербург", 191036, Санкт-Петербург, Гончарная ул., 20.

Первая Академическая типография "Наука"
199034, Санкт-Петербург, 9 линия, 12/28

ISBN 978-5-9775-3737-7

© Черняк А. А., Черняк Ж. А., 2016

© Оформление, издательство "БХВ-Петербург", 2016

Оглавление

Предисловие.....	7
------------------	---

ГЛАВА 1. Преобразования арифметических и алгебраических выражений	9
--	----------

§ 1.1. Теоретический минимум.....	9
Признаки делимости натуральных чисел	10
Действия над рациональными числами	11
Десятичные дроби	13
Виды числовых промежутков.....	15
Формулы сокращенного умножения.....	15
Определение и существование арифметических корней	16
Формулы преобразования арифметических корней.....	17
Формулы преобразования степеней.....	18
Правила округления	19
Порядок выполнения действий	19
Операции над числовыми множествами	20
Проценты.....	21
Позиционная запись натурального числа	21
Деление чисел на пропорциональные части	22
Модуль.....	22
§ 1.2. Распространенные ошибки	23
§ 1.3. Отработка простых типовых заданий	26
§ 1.4. Решение неочевидных задач. Практические советы и приемы	45
§ 1.5. Задачи для самостоятельного решения.....	53

ГЛАВА 2. Алгебраические уравнения, неравенства, системы уравнений и неравенств	59
---	-----------

§ 2.1. Теоретический минимум.....	59
Прямая теорема Виета для квадратного уравнения.....	60
Обратная теорема Виета для квадратного уравнения	61

Алгоритм решения рациональных неравенств методом интервалов.....	61
Системы и совокупности неравенств.....	63
Стандартные схемы раскрытия модулей в уравнениях и неравенствах	66
Метод интервалов раскрытия модулей в уравнениях и неравенствах	67
Равносильные преобразования иррациональных выражений	69
Стандартные схемы решения простейших иррациональных уравнений и неравенств	70
§ 2.2. Распространенные ошибки	75
§ 2.3. Отработка простых типовых заданий	83
§ 2.4. Решение неочевидных задач. Практические советы и приемы	111
§ 2.5. Задачи для самостоятельного решения.....	157
ГЛАВА 3. Тригонометрия	171
§ 3.1. Теоретический минимум.....	171
Единичная окружность. Тригонометрические функции	171
Правила приведения.....	173
Обратные тригонометрические функции	174
Основные тригонометрические формулы	175
Простейшие тригонометрические уравнения	177
§ 3.2. Распространенные ошибки	180
§ 3.3. Отработка простых типовых заданий	184
§ 3.4. Решение неочевидных задач. Практические советы и приемы	196
§ 3.5. Задачи для самостоятельного решения.....	214
ГЛАВА 4. Показательные и логарифмические уравнения, неравенства и системы уравнений и неравенств	221
§ 4.1. Теоретический минимум.....	221
Простейшие показательные уравнения и неравенства.....	221
Простейшие логарифмические уравнения и неравенства.....	221
Основные логарифмические формулы	222
Равносильные преобразования логарифмических выражений	223
§ 4.2. Распространенные ошибки	224
§ 4.3. Отработка простых типовых заданий	228
§ 4.4. Решение неочевидных задач. Практические советы и приемы	238
§ 4.5. Задачи для самостоятельного решения.....	264

ГЛАВА 5. Функции, графики, производная273

§ 5.1. Теоретический минимум	273
Функция и ее свойства	273
Графики основных элементарных функций	279
Линейная функция	279
Квадратичная функция	281
Степенная функция	284
Тригонометрические функции и обратные тригонометрические функции	286
Показательная и логарифмическая функции	289
Производная функции	290
Геометрический смысл производной	292
§ 5.2. Распространенные ошибки	293
§ 5.3. Отработка простых типовых заданий	299
§ 5.4. Решение неочевидных задач. Практические советы и приемы	322
§ 5.5. Задачи для самостоятельного решения	350

Ответы359

К главе 1	359
К главе 2	359
К главе 3	361
К главе 4	362
К главе 5	363

ГЛАВА 1.

Преобразования арифметических и алгебраических выражений

§ 1.1. Теоретический минимум

- Цифры: $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.$
- Натуральные числа N : $1, 2, 3, \dots, n, \dots$
- Целые числа Z : $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots, \pm n, \dots$
- Рациональные числа Q : $\pm \frac{k}{m}$, где $k = 0, 1, 2, \dots, n, \dots$,
 $m = 1, 2, \dots, n, \dots$
- Иррациональные числа I : нельзя представить в виде $\pm \frac{k}{m}$,
где $k = 0, 1, 2, \dots, n, \dots$,
 $m = 1, 2, \dots, n, \dots$
- Действительные числа R : $Q \cup I$.
- Деление с остатком:

$$\begin{array}{ccccccc} & & n & = & m & q & + & r \\ & \nearrow & & & \nearrow & & \nearrow & \nearrow \\ \text{делимое} & & & & \text{делитель} & & \text{частное} & \text{остаток} \end{array}$$

Здесь n, m, q, r — целые; $m \neq 0$, $0 \leq r \leq m - 1$

Пример: $17 = 3 \cdot 5 + 2.$

- Остаток нуль:

$$n = m \cdot q, r = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n \text{ делится на } m \text{ или} \\ n \text{ кратно } m \text{ или} \\ m \text{ — делитель } n \text{ или} \\ n : m \end{array} \right.$$

- Простые числа — натуральные числа только с двумя делителями, то есть делящиеся на 1 и на само себя.

Пример: 2 (делится только на 1 и на 2), 3 (делится только на 1 и на 3), 5, 7, 11, 13, 17 и т. д.

- Составные числа — натуральные с тремя и более делителями.

Пример: 4, 6, 8, 9, 10, 12 и т. д.

- Четные числа — $\pm 2, \pm 4, \dots, \pm 2n, \dots$
- Нечетные числа — $\pm 1, \pm 3, \pm 5, \dots, \pm (2n + 1), \dots$

Признаки делимости натуральных чисел

Число делится на...	2	если последняя цифра четная;
	3	если сумма цифр числа делится на 3;
	4	если две последние цифры этого числа образуют число, делящееся на 4;
	5	если последняя цифра 0 или 5;
	8	если три последние цифры этого числа образуют число, делящееся на 8;
	9	если сумма цифр числа делится на 9;
	11	если сумма цифр, стоящих на четных местах, отличается от суммы цифр, стоящих на нечетных местах, на число, кратное 11;
	25	если две его последние цифры 00, 25, 50 или 75.

Наибольший общий делитель натуральных чисел n и k — сокращенно $\text{НОД}(n, k)$ — это наибольшее натуральное число, на которое делятся числа n и k . Если $\text{НОД}(n, k) = 1$, то n и k называются **взаимно простыми числами**.

Наименьшее общее кратное натуральных чисел n и k — сокращенно $\text{НОК}(n, k)$ — это наименьшее натуральное число, которое делится на n и k .

Дано:

$$a = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdots p_m^{k_m},$$

$$b = p_1^{r_1} \cdot p_2^{r_2} \cdots p_m^{r_m}$$

$p_1, p_2, \dots, p_m$ — различные простые числа

$k_1, \dots, k_m, r_1, \dots, r_m$ — целые неотрицательные

Найдем:

$$\text{НОД}(a, b) = p_1^{\min\{k_1, r_1\}} \cdot p_2^{\min\{k_2, r_2\}} \cdots p_m^{\min\{k_m, r_m\}} \quad 5^7 \cdot 7^0 \cdot 13^0 \cdot 23^1 = 5^7 \cdot 23^1$$

$$\text{НОК}(a, b) = p_1^{\max\{k_1, r_1\}} \cdot p_2^{\max\{k_2, r_2\}} \cdots p_m^{\max\{k_m, r_m\}} \quad 5^8 \cdot 7^3 \cdot 13^1 \cdot 23^4$$

Геометрически действительные числа изображаются точками на числовой прямой (рис. 1.1).

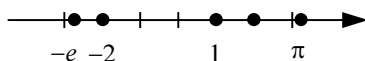


Рис. 1.1

Действия над рациональными числами

Термин или действие	Определение	Пример
Правильная дробь	$\frac{p}{q}, 0 < p < q$	$\frac{3}{8}$
Неправильная дробь	$\frac{p}{q}, 0 < q \leq p$	$\frac{7}{7}, \frac{5}{2}$
Смешанное число	Сумма целого числа и правильной дроби	$5 + \frac{6}{17} = 5\frac{6}{17}$

(продолжение)

Термин или действие	Определение	Пример
Основное свойство дроби	Если числитель и знаменатель дроби умножить на одно и то же, отличное от нуля, целое число, то получится дробь, равная данной	
Привести к общему знаменателю	Заменить дроби $\frac{p}{q}$ и $\frac{m}{n}$ на равные им дроби, имеющие один и тот же знаменатель	$\frac{p \cdot n}{q \cdot n}$ и $\frac{m \cdot q}{n \cdot q}$
Сравнения дробей с разными знаменателями	Привести их к общему знаменателю и сравнить числители	Сравним дроби $\frac{7}{9}$ и $\frac{5}{12}$: $\frac{7}{9} = \frac{7 \cdot 12}{9 \cdot 12} = \frac{84}{108}$ $\frac{5}{12} = \frac{5 \cdot 9}{12 \cdot 9} = \frac{45}{108}$ $\frac{84}{108} > \frac{45}{108} \Rightarrow$ $\Rightarrow \frac{7}{9} > \frac{5}{12}$
Сложение и вычитание дробей	$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{b} = \frac{a \pm c}{b}$ $\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm cb}{bd}$ $-\frac{a}{c} = \frac{-a}{c} = \frac{a}{-c}$	

(окончание)

Термин или действие	Определение	Пример
Умножение и деление дробей	$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$ $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$ $\left(\frac{a}{c}\right)^n = \frac{a^n}{c^n}$	
Сокращение дробей	Деление числителя и знаменателя на их наибольший общий делитель, вследствие чего всякую положительную дробь можно представить в виде несократимой, у которой числитель и знаменатель взаимно просты	$\frac{16}{72} = \frac{2 \cdot 8}{9 \cdot 8} = \frac{2}{9}$
Пропорция	Это равенство двух отношений $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, a и d называются <i>крайними членами пропорции</i> , b и c — <i>средними</i> . Основное свойство пропорции: $a \cdot d = b \cdot c$	

Десятичные дроби

Термин	Определение	Пример
Десятичная дробь	$\pm n, a_1 a_2 a_3 \dots$, где $n \in \mathbb{N}$, $a_1, a_2, a_3, \dots$ — цифры	31,5027761...

(окончание)

Термин	Определение	Пример
Конечная десятичная дробь (или дробь с периодом 0)	$\pm n, a_1 a_2 \dots a_m 00 \dots 0 \dots =$ $= \pm n, a_1 a_2 \dots a_m$	$2,50300 \dots 0 \dots = 2,503$
Периодическая десятичная дробь (с периодом $b_1 b_2 \dots b_k$)	$\pm n, a_1 a_2 \dots a_m b_1 \dots b_k \dots b_1 \dots b_k \dots =$ $= \pm n, a_1 a_2 \dots a_m (b_1 \dots b_k)$	$72,503252525 \dots =$ $= 72,502(25)$
Непериодическая десятичная дробь	Десятичная дробь, не имеющая периода	$2,0100110001110000111 \dots$

- Десятичные дроби — это действительные числа.
- Конечные десятичные дроби — это рациональные числа $\frac{n}{m}$, в которых делителями числа m могут быть только 1, 2 или 5.
- Периодическая десятичная дробь (периоды 0 и 9 исключаются) — это рациональные числа $\frac{n}{m}$, в которых m обязан иметь делитель, отличный от 1, 2 и 5.
- Непериодические десятичные дроби — это иррациональные числа.

Числовым промежутком с концами a и b ($a < b$) называется множество всех точек числовой прямой, расположенных между a и b . Концы промежутка могут как включаться, так и не включаться в этот промежуток.

Виды числовых промежутков

- Интервал $(a; b)$ (рис. 1.2).

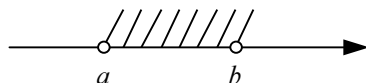


Рис. 1.2

- Отрезок $[a; b]$ (рис. 1.3).

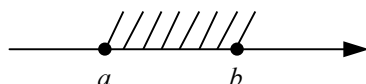


Рис. 1.3

- Полуинтервалы $[a; b)$ и $(c; d]$ (рис. 1.4).

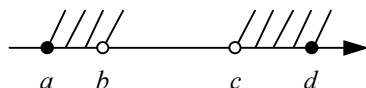


Рис. 1.4

- Бесконечные интервалы $(-\infty; a)$ и $(b; +\infty)$ (рис. 1.5).

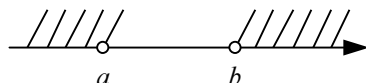


Рис. 1.5

- Бесконечные полуинтервалы $(-\infty; a]$ и $[b; +\infty)$ (рис. 1.6).

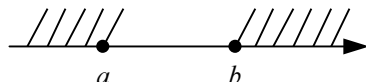


Рис. 1.6

Формулы сокращенного умножения

- Квадрат суммы и квадрат разности

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$
- Разность квадратов

$$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$$

- Куб суммы и куб разности

$$\begin{aligned}(a+b)^3 &= a^3 + b^3 + 3ab(a+b) = \\ &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\ (a-b)^3 &= a^3 - b^3 - 3ab(a-b) = \\ &= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3\end{aligned}$$
- Сумма и разность кубов

$$\begin{aligned}(a+b)(a^2 - ab + b^2) &= a^3 + b^3 \\ (a-b)(a^2 + ab + b^2) &= a^3 - b^3\end{aligned}$$

Определение и существование арифметических корней

Пусть n — произвольное натуральное число, больше 1.

- Действительный корень n -й степени из действительного числа a — это действительное число c , n -я степень которого равна a , то есть $c^n = a$.
- Корень n -й степени из нуля равен нулю: $\sqrt[n]{0} = 0$.
- При нечетном $n = 2k + 1$ существует единственный действительный корень n -й степени из произвольного действительного числа a и обозначается он $\sqrt[2k+1]{a}$.
- При нечетном $n = 2k + 1$ $\sqrt[2k+1]{-a} = -\sqrt[2k+1]{a}$.
- При четном $n = 2k$ существует ровно два действительных корня n -й степени из положительного числа a , они различаются только знаком и обозначаются соответственно $\sqrt[2k]{a}$ и $-\sqrt[2k]{a}$.
- При четном $n = 2k$ действительных корней n -й степени из отрицательного числа a не существует.
- Арифметический корень n -й степени из положительного числа a — это единственное положительное число, n -я степень которого равна a . Обозначается он $\sqrt[n]{a}$.
- При $n = 2$ вместо $\sqrt[2]{a}$ пишут $\sqrt{a}$.

Формулы преобразования арифметических корней

Пусть $a \geq 0$, $b > 0$, k, m, n — натуральные числа.

Действие	Формула	Пример
Упаковка (распаковка)	$\sqrt[k]{a \cdot b} = \sqrt[k]{a} \cdot \sqrt[k]{b}$ $\sqrt[k]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[k]{a}}{\sqrt[k]{b}}$	$\sqrt[5]{3 \cdot 7} = \sqrt[5]{3} \cdot \sqrt[5]{7}$ $\sqrt[7]{\frac{8}{3}} = \frac{\sqrt[7]{8}}{\sqrt[7]{3}}$
Извлечение корня из корня	$\sqrt[k]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[k \cdot m]{a}$	$\sqrt[4]{\sqrt[3]{7}} = \sqrt[12]{7}$
Сокращение показателей	$\sqrt[n \cdot k]{a^{n \cdot m}} = \sqrt[k]{a^m}$	$\sqrt[12]{5^{16}} = \sqrt[3]{5^4}$
Возведение корня в степень	$\left(\sqrt[k]{a}\right)^m = \sqrt[k]{a^m}$	$\left(\sqrt[3]{2}\right)^4 = \sqrt[3]{2^4}$
Вынесение множителя из-под знака корня	$\sqrt[k]{b \cdot a^k} = a \cdot \sqrt[k]{b}$	$\sqrt[3]{2 \cdot 7^3} = 7 \sqrt[3]{2}$
Внесение множителя под знак корня	$a \cdot \sqrt[k]{b} = \sqrt[k]{b \cdot a^k}$	$7 \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{2 \cdot 7^3}$
Вынесение множителя из-под знака корня четной степени	$\sqrt[2m]{b \cdot c^{2m}} = c \cdot \sqrt[2m]{b}$	$\sqrt[3]{2 \cdot 7^3} = 7 \sqrt[3]{2}$
Внесение множителя под знак корня четной степени	$c \cdot \sqrt[2m]{b} = \begin{cases} \sqrt[2m]{b \cdot c^{2m}}, & \text{при } c > 0; \\ -\sqrt[2m]{b \cdot c^{2m}}, & \text{при } c < 0. \end{cases}$	

Формулы преобразования степеней

Пусть a, b — положительные числа; x, y — произвольные действительные числа.

Название	Формула	Пример
С натуральным показателем n	$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ раз}}, a^1 = a$	$a^3 = a \cdot a \cdot a$
С нулевым показателем	$a^0 = 1$	$\pi^0 = 1$
С рациональным показателем	$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}, m — \text{целое число, } n — \text{натуральное число } (n \geq 2)$	$a^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{a^2}$
С отрицательным показателем	$a^{-x} = \frac{1}{a^x}$	$a^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{a^{\frac{1}{3}}}$
Умножение и деление степеней с одинаковыми основаниями	$a^x a^y = a^{x+y}$ $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$	$2^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{7}} = 2^{\frac{10}{21}}$ $\frac{2^3}{2^7} = 2^{-4} = \frac{1}{2^4}$
Умножение и деление степеней с одинаковыми показателями	$a^x b^x = (ab)^x$ $\frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x$	$2^7 \cdot 3^7 = (2 \cdot 3)^7$ $\frac{2^{\frac{1}{7}}}{3^{\frac{1}{7}}} = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{7}}$
Возведение степени в степень	$(a^x)^y = (a^y)^x = a^{xy}$	$(2^3)^{\frac{5}{7}} = \left(2^{\frac{5}{7}}\right)^3 = 2^{\frac{15}{7}}$

Правила округления

Округление десятичной дроби с недостатком: за последней сохраняемой цифрой числа следует цифра 0, 1, 2, 3 или 4. Никакие изменения в последовательность цифр, предшествующих сохраняемой цифре, не вносятся.

$$\pi = 3,1415\dots, \quad \pi \approx 3,14;$$

$$\sqrt{2} = 1,4142\dots, \quad \sqrt{2} \approx 1,41;$$

$$e = 2,7182\dots, \quad e \approx 2,718.$$

Округление десятичной дроби с избытком: за последней сохраняемой цифрой следует цифра 5, 6, 7, 8 или 9. К последней сохраняемой цифре прибавляется единица. При этом, если последняя сохраняемая цифра 9, то она заменяется на 0 и на единицу увеличивается предшествующая ей цифра; если эта цифра также 9, то аналогичным образом действуют до тех пор, пока не встретится цифра, отличная от 9.

$$\pi = 3,141592\dots, \quad \pi \approx 3,1416;$$

$$e = 2,718281\dots, \quad e \approx 2,7183;$$

$$9,999995 \approx 10,00000.$$

Порядок выполнения действий

В выражении, содержащем несколько действий, сначала выполняются действия 3-й ступени — возведение в степень и извлечение корня, затем 2-й ступени — умножение и деление, и наконец, 1-й ступени — сложение и вычитание. При этом действия одной и той же ступени выполняются слева направо.

Для изменения порядка действий используют скобки. В выражении, содержащем скобки, сначала выполняется действие внутри самых внутренних скобок, затем — внутри скобок следующего уровня и т. д.

Операции над числовыми множествами

Пусть A и B — подмножества действительных чисел (рис. 1.7).

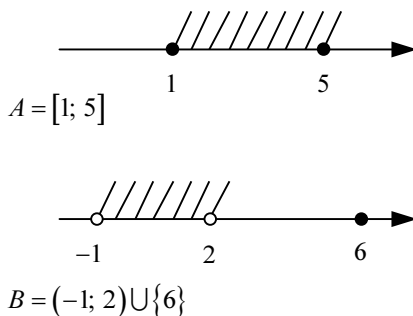


Рис. 1.7

Объединение A и B — $A \cup B$ — множество всех чисел, принадлежащих либо A , либо B :

$$A \cup B = (-1; 5] \cup \{6\}.$$

Пересечение A и B — $A \cap B$ — множество всех чисел, принадлежащих одновременно как A , так и B :

$$A \cap B = [1; 2).$$

Разность A и B — $A \setminus B$ — множество всех чисел, принадлежащих A , но не принадлежащих B :

$$A \setminus B = [2; 5].$$

Разность B и A — $B \setminus A$ — множество всех чисел, принадлежащих B , но не принадлежащих A :

$$B \setminus A = (-1; 1) \cup \{6\}.$$

Проценты

Название	Формула	Пример
1%	$\frac{1}{100} = 0,01$	
$p\%$ от числа A	$A \cdot \frac{p}{100}$	$A = 80, p = 20\% \Rightarrow$ $\Rightarrow 80 \cdot \frac{20}{100} = 16$
Процент числа B от числа A	$\frac{B}{A} \cdot 100\%$	
Количество процентов, на которое число B больше (либо меньше) числа A	$\left(\frac{B}{A} \cdot 100 - 100 \right) \%$	$A = 70,$ $B = 350 \Rightarrow$ B больше A на $q\%$
Число A увеличилось на $q\%$	$\frac{A \cdot (100 + q)}{100}$	
Число A уменьшилось на $q\%$	$\frac{A \cdot (100 - q)}{100}$	
Число A увеличилось на $q\%$, а затем полученное число уменьшилось на $r\%$	$A \left(\frac{100 + q}{100} \right) \left(\frac{100 - r}{100} \right)$	

Позиционная запись натурального числа

Если в десятичной записи натурального числа a имеется ровно n цифр $a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_2, a_1, a_0$, то это число можно записать в виде

$$a = a_{n-1}a_{n-2}\dots a_2a_1a_0 = a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + a_{n-2} \cdot 10^{n-2} + \dots + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0.$$

$$a = 325\,059 = 3 \cdot 10^5 + 2 \cdot 10^4 + 5 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^1 + 9.$$

Деление чисел на пропорциональные части

Если число a делится на части $a_1, a_2, \dots, a_k$ в отношении $b_1 : b_2 : b_3 : \dots : b_k$, то искомыми частями будут числа:

$$a_1 = \frac{a \cdot b_1}{b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_k};$$

$$a_2 = \frac{a \cdot b_2}{b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_k};$$

$$\dots$$

$$a_k = \frac{a \cdot b_k}{b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_k}.$$

Пример. Разделим число 160 на части в отношении 1 : 3 : 4:

$$a_1 = \frac{160 \cdot 1}{1 + 3 + 4} = 20, \quad a_2 = \frac{160 \cdot 3}{1 + 3 + 4} = 60, \quad a_3 = \frac{160 \cdot 4}{1 + 3 + 4} = 80.$$

Модуль

Пусть m и n — натуральные числа.

Термин	Формула
Определение модуля (абсолютной величины) действительного числа a	$ a = \begin{cases} a, & \text{если } a \geq 0, \\ -a, & \text{если } a < 0. \end{cases}$ <i>Пример:</i> $ \sqrt{2} - 2 = -(\sqrt{2} - 2)$ $ \pi - 3,14 = \pi - 3,14$
Следствие определения	$ a \geq 0$, причем $ a = 0 \Leftrightarrow a = 0$
Геометрический смысл модуля	$ a $ есть расстояние от точки A , изображающей на числовой прямой число a , до точки O , изображающей число нуль

(окончание)

Термин	Формула
Модуль в четной степени	$ a ^{2n} = a^{2n}$
Умножение и деление модулей	$ a \cdot b = a \cdot b , \left \frac{a}{b} \right = \frac{ a }{ b }, a^n = a ^n$
Изменение знака в подмодульном выражении	$ a = -a , a - b = b - a $
Модуль как арифметический корень четной степени	$\sqrt{a^2} = a , \sqrt[2n]{a^{2m}} = \sqrt[n]{ a ^m}$

§ 1.2. Распространенные ошибки

Перед выполнением несложных заданий предварительно проверьте, не укоренились ли в вашем сознании неверные шаблоны и навыки. Вначале сравните свой результат с правильным и, в случае разочарования, посмотрите в колонку с неверными результатами и убедитесь, не «достоин» ли ваш результат пополнить этот раздел.

Преобразуем выражение	Верный результат	Неверный результат
$(ab + ac)^k =$	$a^k (b + c)^k$	$a(b + c)^k$
$(2b + 2c)^3 =$	$8(b + c)^3$	$2(b + c)^3$
$\frac{ab}{c^3} =$	$\frac{a}{c} \cdot \frac{b}{c^2} = \frac{a}{c^2} \cdot \frac{b}{c}$	$\frac{a}{c^3} \cdot \frac{b}{c^3}$
$\frac{xy}{8} =$	$\frac{x}{2} \cdot \frac{y}{4} = \frac{x}{4} \cdot \frac{y}{2}$	$\frac{x}{8} \cdot \frac{y}{8}$