

ЭКСПРЕСС-ПОДГОТОВКА



В СХЕМАХ И ТАБЛИЦАХ

МАТЕМАТИКА

Все темы в наглядных таблицах



Тренировочные задания



Ответы ко всем заданиям



ЭКСПРЕСС-ПОДГОТОВКА



в схемах и таблицах

А. Н. Роганин

И. В. Третьяк

МАТЕМАТИКА

Москва

2017

УДК 373:51
ББК 22.1я721
Р59

Роганин, Александр Николаевич.
Р59 ЕГЭ. Математика / А. Н. Роганин, И. В. Третьяк. — Москва : Эксмо, 2017. — 256 с. — (ЕГЭ. Экспресс-подготовка (в схемах и таблицах)).

ISBN 978-5-699-94866-6

Пособие содержит теоретические сведения по всем темам, проверяемым на ЕГЭ по математике. После каждого раздела приводятся тренировочные задания разных типов с ответами. Наглядное и доступное изложение материала позволит быстро найти нужную информацию, устранить пробелы в знаниях и в кратчайшие сроки повторить большой объем информации.

Издание окажет помощь старшеклассникам при подготовке к урокам, различным формам текущего и промежуточного контроля, а также для подготовки к экзаменам.

УДК 373:51
ББК 22.1я721

ISBN 978-5-699-94866-6

© Роганин А.Н., Третьяк И.В., 2017
© Оформление. ООО «Издательство «Эксмо», 2017

СОДЕРЖАНИЕ

1. АЛГЕБРА	9
1.1. ЧИСЛА, КОРНИ И СТЕПЕНИ.	9
1.1.1. Целые числа.	9
1.1.2. Степень с натуральным показателем	9
1.1.3. Дроби, проценты, рациональные числа	9
1.1.4. Степень с целым показателем.	12
1.1.5. Корень степени $n > 1$ и его свойства	13
1.1.6. Степень с рациональным показателем и её свойства	15
1.1.7. Свойства степени с действительным показателем	15
Примеры заданий ЕГЭ по теме 1.1.	
«Числа, корни и степени»	16
1.2. ОСНОВЫ ТРИГОНОМЕТРИИ	18
1.2.1. Синус, косинус, тангенс, котангенс произвольного угла	18
1.2.2. Радианная мера угла.	19
1.2.3. Синус, косинус, тангенс и котангенс числа	19
1.2.4. Основные тригонометрические тождества	21
1.2.5. Формулы приведения	21
1.2.6. Синус, косинус и тангенс суммы и разности двух углов	21
1.2.7. Синус и косинус двойного угла.	22
Примеры заданий ЕГЭ по теме 1.2.	
«Основы тригонометрии»	23
1.3. ЛОГАРИФМЫ.	25
1.3.1. Логарифм числа	25
1.3.2. Логарифм произведения, частного, степени	25
1.3.3. Десятичный и натуральный логарифм, число e	26
Примеры заданий ЕГЭ по теме 1.3.	
«Логарифмы»	27
1.4. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ВЫРАЖЕНИЙ	28
1.4.1. Преобразование выражений, включающих арифметические операции	28
1.4.2. Преобразование выражений, включающих операцию возведения в степень	29
1.4.3. Преобразование выражений, включающих корни натуральной степени	30
1.4.4. Преобразование тригонометрических выражений	31
1.4.5. Преобразование выражений, включающих операцию логарифмирования	34
1.4.6. Модуль (абсолютная величина) числа	35
Примеры заданий ЕГЭ по теме 1.4.	
«Преобразование выражений»	36

2. УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА	38
2.1. УРАВНЕНИЯ	38
2.1.1. Квадратные уравнения	38
2.1.2. Рациональные уравнения.	40
2.1.3. Иррациональные уравнения.	42
2.1.4. Тригонометрические уравнения	43
2.1.5. Показательные уравнения	46
2.1.6. Логарифмические уравнения	47
2.1.7. Равносильность уравнений, систем уравнений	48
2.1.8. Простейшие системы уравнений с двумя неизвестными	49
2.1.9. Основные приёмы решения систем уравнений: подстановка, алгебраическое сложение, введение новых переменных.	50
2.1.10. Использование свойств и графиков функций при решении уравнений.	51
2.1.11. Изображение на координатной плоскости множества решений уравнений с двумя переменными и их систем.	53
2.1.12. Применение математических методов для решения содержательных задач из различных областей науки и практики. Интерпретация результата, учёт реальных ограничений.	54
ПРИМЕРЫ ЗАДАНИЙ ЕГЭ ПО ТЕМЕ 2.1.	
«УРАВНЕНИЯ»	57
2.2. НЕРАВЕНСТВА.	62
2.2.1. Квадратные неравенства	62
2.2.2. Рациональные неравенства.	64
2.2.3. Показательные неравенства	64
2.2.4. Логарифмические неравенства	66
2.2.5. Системы линейных неравенств	67
2.2.6. Системы неравенств с одной переменной	67
2.2.7. Равносильность неравенств, систем неравенств.	68
2.2.8. Использование свойств и графиков функций при решении неравенств	68
2.2.9. Метод интервалов	70
2.2.10. Изображение на координатной плоскости множества решений неравенств с двумя переменными и их систем.	72
ПРИМЕРЫ ЗАДАНИЙ ЕГЭ ПО ТЕМЕ 2.2.	
«НЕРАВЕНСТВА»	75
3. ФУНКЦИИ	78
3.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ И ГРАФИК ФУНКЦИИ	78
3.1.1. Функция, область определения функции.	78
3.1.2. Множество значений функции	80
3.1.3. График функции. Примеры функциональных зависимостей в реальных процессах и явлениях.	81
3.1.4. Обратная функция. График обратной функции	82
3.1.5. Преобразование графиков: параллельный перенос, симметрия относительно осей координат	83
ПРИМЕРЫ ЗАДАНИЙ ЕГЭ ПО ТЕМЕ 3.1.	
«ОПРЕДЕЛЕНИЕ И ГРАФИК ФУНКЦИИ»	85

3.2. ЭЛЕМЕНТАРНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ	87
3.2.1. Монотонность функции. Промежутки возрастания и убывания	87
3.2.2. Чётность и нечётность функции	87
3.2.3. Периодичность функции	88
3.2.4. Ограниченность функции.	88
3.2.5. Точки экстремума (локального максимума и минимума) функции	89
3.2.6. Наибольшее и наименьшее значения функции	90
Примеры заданий ЕГЭ по теме 3.2.	
«Элементарное исследование функций»	91
3.3. ОСНОВНЫЕ ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ	94
3.3.1. Линейная функция, её график	94
3.3.2. Функция, описывающая обратную пропорциональную зависимость, её график	96
3.3.3. Квадратичная функция, её график	97
3.3.4. Степенная функция с натуральным показателем, её график	99
3.3.5. Тригонометрические функции, их графики	102
3.3.6. Показательная функция, её график	105
3.3.7. Логарифмическая функция, её график	106
Примеры заданий ЕГЭ по теме 3.3.	
«Основные элементарные функции»	107
4. НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА	110
4.1. ПРОИЗВОДНАЯ	110
4.1.1. Понятие о производной функции, геометрический смысл производной.	110
4.1.2. Физический смысл производной, нахождение скорости для процесса, заданного формулой или графиком.	110
4.1.3. Уравнение касательной к графику функции	111
4.1.4. Производные суммы, разности, произведения, частного	111
4.1.5. Производные основных элементарных функций	113
4.1.6. Вторая производная и её физический смысл	113
Примеры заданий ЕГЭ по теме 4.1.	
«Производная»	114
4.2. ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ	117
4.2.1. Применение производной к исследованию функций и построению графиков	117
4.2.2. Примеры использования производной для нахождения наилучшего решения в прикладных, в том числе социально- экономических задачах	120
Примеры заданий ЕГЭ по теме 4.2.	
«Исследование функций»	122
4.3. ПЕРВООБРАЗНАЯ И ИНТЕГРАЛ	124
4.3.1. Первообразные элементарных функций.	124
4.3.2. Примеры применения интеграла в физике и геометрии.	126
Примеры заданий ЕГЭ по теме 4.3.	
«Первообразная и интеграл»	128

5. ГЕОМЕТРИЯ	130
5.1. ПЛАНИМЕТРИЯ	130
5.1.1. Треугольник	130
5.1.2. Параллелограмм, прямоугольник, ромб, квадрат	141
5.1.3. Трапеция	144
5.1.4. Окружность и круг	146
5.1.5. Окружность, вписанная в треугольник, и окружность, описанная около треугольника	150
5.1.6. Многоугольник. Сумма углов выпуклого многоугольника . . .	152
5.1.7. Правильные многоугольники. Вписанная окружность и описанная окружность правильного многоугольника	154
Примеры заданий ЕГЭ по теме 5.1.	
«Планиметрия»	156
5.2. ПРЯМЫЕ И ПЛОСКОСТИ В ПРОСТРАНСТВЕ	161
5.2.1. Пересекающиеся, параллельные и скрещивающиеся прямые	161
5.2.2. Параллельность прямой и плоскости, признаки и свойства . .	163
5.2.3. Параллельность плоскостей, признаки и свойства	164
5.2.4. Перпендикулярность прямой и плоскости, признаки и свойства; перпендикуляр и наклонная; теорема о трёх перпендикулярах	164
5.2.5. Перпендикулярность плоскостей, признаки и свойства	167
5.2.6. Параллельное проектирование. Изображение пространственных фигур	168
Примеры заданий ЕГЭ по теме 5.2.	
«Прямые и плоскости в пространстве»	170
5.3. МНОГОГРАННИКИ	173
5.3.1. Призма, её основания, боковые рёбра, высота, боковая поверхность; прямая призма; правильная призма	173
5.3.2. Параллелепипед; куб; симметрии в кубе, в параллелепипеде	175
5.3.3. Пирамида, её основание, боковые рёбра, высота, боковая поверхность; треугольная пирамида; правильная пирамида	177
5.3.4. Сечения куба, призмы, пирамиды	181
5.3.5. Представления о правильных многогранниках (тетраэдр, куб, октаэдр, додекаэдр и икосаэдр)	182
Примеры заданий ЕГЭ по теме 5.3.	
«Многогранники»	184
5.4. ТЕЛА И ПОВЕРХНОСТИ ВРАЩЕНИЯ	187
5.4.1. Цилиндр. Основание, высота, боковая поверхность, образующая, развёртка	187
5.4.2. Конус. Основание, высота, боковая поверхность, образующая, развёртка	189
5.4.3. Шар и сфера, их сечения	192
Примеры заданий ЕГЭ по теме 5.4.	
«Тела и поверхности вращения»	194

5.5. ИЗМЕРЕНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН	199
5.5.1. Величина угла, градусная мера угла, соответствие между величиной угла и длиной дуги окружности	199
5.5.2. Угол между прямыми в пространстве; угол между прямой и плоскостью, угол между плоскостями	200
5.5.3. Длина отрезка, ломаной, окружности, периметр многоугольника	202
5.5.4. Расстояние от точки до прямой, от точки до плоскости; расстояние между прямыми, расстояние между плоскостями	203
5.5.5. Площадь треугольника, параллелограмма, трапеции, круга, сектора	207
5.5.6. Площадь поверхности конуса, цилиндра, сферы.	211
5.5.7. Объём куба, прямоугольного параллелепипеда, пирамиды, призмы, цилиндра, конуса, шара	212
Примеры заданий ЕГЭ по теме 5.5.	
«Измерение геометрических величин»	214
5.6. КООРДИНАТЫ И ВЕКТОРЫ	219
5.6.1. Координаты на прямой, декартовы координаты на плоскости и в пространстве	219
5.6.2. Формула расстояния между двумя точками; уравнение сферы.	221
5.6.3. Вектор, модуль вектора, равенство векторов, сложение векторов и умножение вектора на число	222
5.6.4. Коллинеарные векторы. Разложение вектора по двум неколлинеарным векторам.	225
5.6.5. Компланарные векторы. Разложение по трём некопланарным векторам	227
5.6.6. Координаты вектора; скалярное произведение векторов, угол между векторами.	228
Примеры заданий ЕГЭ по теме 5.6.	
«Координаты и векторы»	229
6. ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ, СТАТИСТИКИ И ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ.	231
6.1. ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ	231
6.1.1. Поочерёдный и одновременный выбор.	231
6.1.2. Формулы числа сочетаний и перестановок. Бином Ньютона	233
Примеры заданий ЕГЭ по теме 6.1.	
«Элементы комбинаторики»	235
6.2. ЭЛЕМЕНТЫ СТАТИСТИКИ	237
6.2.1. Табличное и графическое представление	237
6.2.2. Числовые характеристики рядов данных.	238
Примеры заданий ЕГЭ по теме 6.2.	
«Элементы статистики»	239
6.3. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ.	241
6.3.1. Вероятности событий.	241
6.3.2. Примеры использования вероятностей и статистики при решении прикладных задач	242
Примеры заданий ЕГЭ по теме 6.3.	
«Элементы теории вероятностей»	244

ОТВЕТЫ К ПРИМЕРАМ ЗАДАНИЙ ЕГЭ	246
1. АЛГЕБРА	246
1.1. Числа, корни и степени	246
1.2. Основы тригонометрии	246
1.3. Логарифмы	246
1.4. Преобразование выражений	246
2. УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА	247
2.1. Уравнения	247
2.2. Неравенства	247
3. ФУНКЦИИ	248
3.1. Определение и график функции	248
3.2. Элементарное исследование функций.	248
3.3. Основные элементарные функции	248
4. НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА	248
4.1. Производная	248
4.2. Исследование функций.	249
4.3. Первообразная и интеграл	249
5. ГЕОМЕТРИЯ	249
5.1. Планиметрия	249
5.2. Прямые и плоскости в пространстве	249
5.3. Многогранники	250
5.4. Тела и поверхности вращения.	250
5.5. Измерение геометрических величин	251
5.6. Координаты и векторы.	251
6. ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ, СТАТИСТИКИ И ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ	251
6.1. Элементы комбинаторики.	251
6.2. Элементы статистики.	252
6.3. Элементы теории вероятностей	252



1. АЛГЕБРА

1.1. ЧИСЛА, КОРНИ И СТЕПЕНИ

1.1.1. Целые числа

Множество целых чисел		
Z	N	Натуральные числа 1; 2; 3; ...; противоположные им числа: -1; -2; -3; ... и число 0 образуют множество целых чисел
	0	
	N ₋	

1.1.2. Степень с натуральным показателем

Степень	
n -й степенью действительного числа a называется действительное число b , полученное в результате умножения числа a самого на себя n раз	
$b = a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_n, n \in N$	
a — основание степени, n — показатель степени	
$0^n = 0 (n > 0);$ $1^n = 1;$ $a^1 = a;$ 0^0 — не определено	
Степень с натуральным показателем	
$a^1 = a; a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_n, a \in R,$ $n \in N$	$2^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32;$ $(-3)^3 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = -27;$ $0^7 = 0; 1^{100} = 1; (-1)^{99} = -1; (-1)^{100} = 1$

1.1.3. Дроби, проценты, рациональные числа

Рациональные числа

Множество рациональных чисел		
Q	Z	Числа, которые можно представить в виде $\frac{m}{n}$, где $m \in Z, n \in N$. Рациональные числа — бесконечные периодические дроби. Если период состоит из одних нулей, дробь считается конечной десятичной
	дроби	

Дроби

Основное свойство дроби	
Значение дроби не изменится, если числитель и знаменатель умножить или разделить на одно и то же число (выражение), не равное нулю	$\frac{a(b-c)}{m(b-c)} = \frac{a}{m};$ $\frac{25}{75} = \frac{1}{3}; \quad \frac{22}{33} = \frac{2}{3}$
Сравнение дробей	
Из двух дробей с одинаковыми знаменателями больше та, числитель которой больше	$\frac{7}{13} < \frac{11}{13}, \text{ т. к. } 7 < 11$
Из двух дробей с одинаковыми числителями больше та, у которой знаменатель меньше	$\frac{11}{21} < \frac{11}{15}, \text{ т. к. } 21 > 15$
Сложение и вычитание	
Если знаменатели равны, то числители складываются (вычитаются), а знаменатели сохраняются	$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{b} = \frac{a \pm c}{b};$ $\frac{13}{21} - \frac{7}{21} = \frac{6}{21} = \frac{2}{7}$
Если знаменатели разные, то сначала дроби приводят к наименьшему общему знаменателю, а потом складывают (вычитают) как дроби с одинаковыми знаменателями	$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} \pm \frac{bc}{bd} = \frac{ad \pm bc}{bd};$ $\frac{3}{7} + \frac{4}{9} = \frac{3 \cdot 9 + 4 \cdot 7}{7 \cdot 9} = \frac{27 + 28}{63} = \frac{55}{63}$
При сложении (вычитании) смешанных чисел можно сложить (вычесть) их целые и дробные части	$5\frac{1}{8} + 1\frac{5}{6} = 5 + 1 + \frac{1}{8} + \frac{5}{6} =$ $= 6 + \frac{3 + 20}{24} = 6\frac{23}{24}$
Умножение дробей	
При умножении дробей перемножают их числители и знаменатели	$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd};$ $\frac{3}{7} \cdot \frac{2}{5} = \frac{3 \cdot 2}{7 \cdot 5} = \frac{6}{35}$
При умножении смешанных чисел их сначала превращают в неправильные дроби, а потом перемножают	$2\frac{2}{5} \cdot 7\frac{3}{8} = \frac{12}{5} \cdot \frac{59}{8} = \frac{177}{10} = 17\frac{7}{10}$

Окончание таблицы

Деление дробей	
При делении двух дробей деление заменяют умножением делимого на дробь, обратную делителю	$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc};$ $5\frac{1}{3} : 1\frac{5}{9} = \frac{16}{3} : \frac{14}{9} = \frac{16 \cdot 9}{3 \cdot 14} = \frac{24}{7} = 3\frac{3}{7}$
Возведение дроби в степень	
При возведении дроби в степень возводят числитель и знаменатель дроби в эту степень	$\left(\frac{2}{3}\right)^5 = \frac{2^5}{3^5} = \frac{32}{243};$ $\left(1\frac{1}{5}\right)^2 = \left(\frac{6}{5}\right)^2 = \frac{36}{25} = 1\frac{11}{25}$

Проценты

Проценты	
Процент — это сотая часть некоторого числа (которое принимается за единицу)	$1\% = \frac{1}{100}$ $1\% \text{ от числа } a \text{ — это } \frac{1}{100}a$
Преобразования процентов	
Чтобы выразить число в процентах, нужно его умножить на 100 %	$0,23 = 0,23 \cdot 100\% = 23\%;$ $0,07 = 0,07 \cdot 100\% = 7\%;$ $5 = 5 \cdot 100\% = 500\%$
Чтобы записать проценты в виде числа, нужно число, стоящее перед знаком %, разделить на 100	$13\% = 13 : 100 = 0,13;$ $2\% = 2 : 100 = 0,02;$ $123\% = 123 : 100 = 1,23$
Нахождение процента от числа	
$p\%$ от числа a равно: $\frac{p}{100} \cdot a$	20 % от числа 120 равно: $\frac{20 \cdot 120}{100} = 24$
Нахождение числа по данному проценту	
Если $p\%$ от некоторого числа равно m , то всё число a равно: $a = \frac{m \cdot 100}{p}$	Если 15 % от некоторого числа равно 45, то всё число равно: $\frac{45 \cdot 100}{15} = 300$

Нахождение процентного отношения двух чисел	
Число a составляет от числа b : $\frac{a}{b} \cdot 100 \%$	Число 22 составляет от числа 88: $\frac{22}{88} \cdot 100 \% = 25 \%$
Увеличение (уменьшение) на $p \%$	
Число a увеличилось на $p \%$: $a + \frac{p \%}{100 \%} = a \left(1 + \frac{p \%}{100 \%} \right)$	Число 110 увеличилось на 5%: $110 \cdot \left(1 + \frac{5}{100} \right) = 110 \cdot 1,05 = 115,5$
Число a уменьшилось на $p \%$: $a - \frac{p \%}{100 \%} = a \left(1 - \frac{p \%}{100 \%} \right)$	Число 110 уменьшилось на 5%: $110 \cdot \left(1 - \frac{5}{100} \right) = 110 \cdot 0,95 = 104,5$
Формула сложных процентов	
Если A_0 — начальный капитал (вклад), p — годового процент, n — количество лет, то в конце n -го года капитал составит: $A_n = A_0 \left(1 + \frac{p}{100} \right)^n$	Если начальный капитал — 5000 и годового процент — 6, то в конце 3-го года капитал составит: $5000 \cdot \left(1 + \frac{6}{100} \right)^3 \approx 5955$

1.1.4. Степень с целым показателем

Степень с целым показателем	
$a^0 = 1, a \neq 0$; 0^0 — не определено; $a^{-n} = \frac{1}{a^n}, a \geq 0, n \in Z$	$(-3)^{-3} = \frac{1}{(-3)^3} = -\frac{1}{27};$ $\left(\frac{2}{5} \right)^{-2} = \left(\frac{5}{2} \right)^2 = \frac{25}{4};$ $1,3^{-2} = \left(\frac{13}{10} \right)^{-2} = \left(\frac{10}{13} \right)^2 = \frac{100}{169}$

Основные свойства степени

Умножение степеней	
$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	$2^5 \cdot 2^{-3} = 2^{5+(-3)} = 2^2 = 4;$ $8^{\frac{1}{3}} \cdot 8^{\frac{2}{3}} = 8^{\frac{1}{3} + \frac{2}{3}} = 8^1 = 8$ $8^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{8}} = \frac{1}{2};$ $5^{\sqrt{3}} \cdot 5^{\sqrt{2}} = 5^{\sqrt{3} + \sqrt{2}}$

Окончание таблицы

Деление степеней	
$a^m : a^n = a^{m-n}$	$5^{-2} : 5^{-5} = 5^{-2-(-5)} = 5^{-2+5} = 5^3 = 125;$ $3^{2\sqrt{3}} : 3^{\sqrt{3}} = 3^{2\sqrt{3}-\sqrt{3}} = 3^{\sqrt{3}}$
Возведение степени в степень	
$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$	$((-2)^2)^{-3} = (-2)^{2 \cdot (-3)} = (-2)^{-6} = \frac{1}{(-2)^6} = \frac{1}{64};$ $(7^{\sqrt{3}})^{\sqrt{2}} = 7^{\sqrt{3} \cdot \sqrt{2}} = 7^{\sqrt{6}}$
Возведение в степень произведения	
$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$	$(-3ab^3c)^3 = -27a^3b^9c^3;$ $0,5^7 \cdot (-2)^7 = (0,5 \cdot (-2))^7 = (-1)^7 = -1$
Возведение в степень дроби	
$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}, b \neq 0$	$\left(-\frac{2}{5}\right)^3 = \frac{(-2)^3}{5^3} = -\frac{8}{125}$
$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$	$\left(\frac{2}{3}\right)^{-4} = \left(\frac{3}{2}\right)^4 = \frac{81}{16}$

1.1.5. Корень степени $n > 1$ и его свойства

<p>Арифметическим квадратным корнем из неотрицательного числа a называют такое неотрицательное число b, квадрат которого равен a:</p> $\sqrt{a} = b \Leftrightarrow \begin{cases} b \geq 0 \\ b^2 = a \end{cases}$	$\sqrt{36} = 6$, т.к. $6^2 = 36$, $6 > 0$; $\sqrt{25} \neq 8$, т.к. $8^2 \neq 25$; $\sqrt{25} \neq (-5)$, т.к. $-5 < 0$; $\sqrt{-3}$ — не определён
--	---

Тождества	
$(\sqrt{a})^2 = a, a \geq 0$	$(\sqrt{121})^2 = 121;$ $(\sqrt{13})^2 = 13$
$\sqrt{a^2} = a , a \in R$	$\sqrt{3^2} = 3 = 3;$ $\sqrt{(-21)^2} = -21 = 21;$ $\sqrt{(\sqrt{2} - \sqrt{3})^2} = \sqrt{2} - \sqrt{3} = -(\sqrt{2} - \sqrt{3}) = \sqrt{3} - \sqrt{2}$

Основные свойства корня степени n	
$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b};$ $\sqrt{ab} = \sqrt{ a } \cdot \sqrt{ b }$	$\sqrt{0,001} \cdot \sqrt{0,4} = \sqrt{0,001 \cdot 0,4} = \sqrt{0,0004} = 0,02;$ $\sqrt{121 \cdot 625 \cdot 100} = \sqrt{121} \cdot \sqrt{625} \cdot \sqrt{100} =$ $= 11 \cdot 25 \cdot 10 = 2750$
$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}, b \neq 0; \sqrt{\frac{a}{b}} = \left \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \right $	$\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{8}{2}} = \sqrt{4} = 2; \sqrt{\frac{144}{169}} = \frac{\sqrt{144}}{\sqrt{169}} = \frac{12}{13}$
$(\sqrt{a})^p = \sqrt{a^p}; \sqrt{a^p} = (\sqrt{ a })^p$	$\sqrt{9^3} = (\sqrt{9})^3 = 3^3 = 27$
<p>Если $a > 1$, то $a > \sqrt{a}$ и $\sqrt{a} > 1$; если $0 < a < 1$, то $a < \sqrt{a}$ и $0 < \sqrt{a} < 1$</p>	$7 > \sqrt{7} \text{ и } \sqrt{7} > 1;$ $\frac{1}{3} < \sqrt{\frac{1}{3}} \text{ и } \sqrt{\frac{1}{3}} < 1$
<p>Если $a > b \geq 0$, то $\sqrt{a} > \sqrt{b}$</p>	$\sqrt{3} > \sqrt{2}, \text{ т. к. } 3 > 2$

Арифметические корни n -й степени при $n \geq 2, n \in \mathbb{N}$

<p>Арифметическим корнем n-й степени ($n \in \mathbb{N}, n \geq 2$) из неотрицательного числа a называется такое неотрицательное число b, n-я степень которого равна a:</p> $\left. \begin{array}{l} \sqrt[n]{a} = b \\ n \in \mathbb{N}, a \geq 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} b \geq 0 \\ b^n = a \end{array} \right.$	$\sqrt[4]{81} = 3;$ $\sqrt[5]{0,00001} = 0,1;$ $\sqrt[5]{1024} = 4;$ $\sqrt[3]{0,027} = 0,3$
<p>Если $a < 0$, то</p> ${}^{2n-1}\sqrt{a} = -{}^{2n-1}\sqrt{ a }$	$\sqrt[3]{-8} = -\sqrt[3]{8} = -2; \sqrt[5]{-243} = -\sqrt[5]{243} = -3;$ $\sqrt[3]{(\sqrt{3}-2)^3} = -\sqrt[3]{(2-\sqrt{3})^3} = -(2-\sqrt{3}) = \sqrt{3}-2$
Корень чётной степени из отрицательного числа не определён	
Тождества	
<p>Если $\sqrt[n]{a}$ существует, то:</p> $(\sqrt[n]{a})^n = a;$ ${}^{2n}\sqrt{a^{2n}} = a , a \in \mathbb{R};$ ${}^{2n-1}\sqrt{a^{2n-1}} = a, a \in \mathbb{R};$	$(\sqrt[4]{5})^4 = 5; (\sqrt[5]{-2})^5 = -2;$ $\sqrt[6]{(-2)^6} = -2 = 2; \sqrt[7]{(-3)^7} = -3$

Окончание таблицы

Основные свойства арифметического корня n -й степени	
$\sqrt[n]{a^{mk}} = \sqrt[n]{a^m}^k$, $a \geq 0, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$	$\sqrt[6]{8^8} = \sqrt[3]{8^4} = 2^4 = 16$; $\sqrt[12]{m^3} = \sqrt[4]{m}$
$\sqrt[n]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$, $a \geq 0, n \in \mathbb{N}, n \neq 1$	$\sqrt{\sqrt{3}} = \sqrt[4]{3}$; $\sqrt[3]{\sqrt[5]{7}} = \sqrt[15]{7}$
$(\sqrt[n]{a})^k = \sqrt[n]{a^k}$, $a \geq 0, k \in \mathbb{N}$	$(\sqrt[3]{5})^2 = \sqrt[3]{5^2} = \sqrt[3]{25}$
$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$, $n \in \mathbb{N}, n \geq 2, a \geq 0, b \geq 0$	$\sqrt[4]{16 \cdot 625} = \sqrt[4]{16} \cdot \sqrt[4]{625} = 2 \cdot 5 = 10$; $\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{9} = \sqrt[3]{3 \cdot 9} = \sqrt[3]{27} = 3$
$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$, $n \in \mathbb{N}, n \geq 2, a \geq 0, b > 0$	$\sqrt[3]{\frac{125}{27}} = \frac{\sqrt[3]{125}}{\sqrt[3]{27}} = \frac{5}{3}$; $\frac{\sqrt[4]{80}}{\sqrt[4]{5}} = \sqrt[4]{\frac{80}{5}} = \sqrt[4]{16} = 2$
Если $a > b \geq 0$, то $\sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}$; если $a > 1$, то $\sqrt[n]{a} > 1$ и $\sqrt[n]{a} < a$; если $0 < a < 1$, то $0 < \sqrt[n]{a} < 1$; $\sqrt[n]{a} > a$	$\sqrt[7]{5} > \sqrt[7]{3}$, т. к. $5 > 3$; $\sqrt[5]{2} > 1, \sqrt[5]{2} < 2$; $\sqrt[3]{\frac{1}{2}} < 1, \sqrt[3]{\frac{1}{2}} > \frac{1}{2}$

1.1.6. Степень с рациональным показателем и её свойства

Степень с рациональным показателем	
$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$, $a \neq 0, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}, n > 2$	$36^{\frac{1}{2}} = \sqrt{36} = 6$; $27^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{27^2} = 3^2 = 9$; $(-8)^{\frac{1}{3}} = -2$; $32^{-\frac{2}{5}} = \frac{1}{32^{\frac{2}{5}}} = \frac{1}{\sqrt[5]{32^2}} = \frac{1}{4}$

1.1.7. Свойства степени с действительным показателем

Степень с иррациональным показателем	
a^k , где k — иррациональное число, $a \neq 0$	$10^{\sqrt{2}} \approx 10^{1,4142\dots} \approx 25,9$

**ПРИМЕРЫ ЗАДАНИЙ ЕГЭ ПО ТЕМЕ 1.1.
«ЧИСЛА, КОРНИ И СТЕПЕНИ»**

Ответом к каждому заданию является конечная десятичная дробь, целое число или последовательность цифр. Запишите ответ к заданию в поле ответа. Единицы измерения писать не нужно.

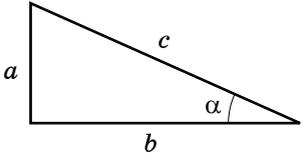
- 1** Шоколадный батончик стоит 6 рублей 30 копеек. Какое наибольшее число шоколадных батончиков можно купить на 50 рублей?
Ответ: _____.
- 2** Фёдор решил подарить Екатерине на праздник букет из нечётного числа роз. Одна роза стоит 70 рублей. Из какого наибольшего числа роз он сможет купить Екатерине букет на 400 рублей?
Ответ: _____.
- 3** Вычислите значение выражения $8^4 \cdot 3^7 : 12^5$.
Ответ: _____.
- 4** Упростите выражение $\frac{(7x^3)^2 \cdot (3y)^3}{(21x^2y)^3}$.
Ответ: _____.
- 5** Ручка стоит 5 рублей 40 копеек. Какое наибольшее число таких ручек можно купить на 70 рублей?
Ответ: _____.
- 6** Найдите значение выражения $25^7 \cdot 6^{10} : 150^7$.
Ответ: _____.
- 7** Дезодорант стоит 180 рублей. Какое наибольшее число дезодорантов можно купить на 800 рублей во время распродажи, если скидка составляет 25%?
Ответ: _____.
- 8** Карандаш стоит 60 рублей. Какое наибольшее число таких карандашей можно будет купить на 500 рублей после повышения цены на 15%?
Ответ: _____.
- 9** Линейка стоит 10 рублей. Какое наибольшее число таких линеек можно будет купить на 300 рублей после повышения цены на 20%?
Ответ: _____.
- 10** Флакон шампуня стоит 120 рублей. Какое наибольшее количество флаконов можно купить на 700 рублей во время распродажи, когда скидка составляет 35%?
Ответ: _____.
- 11** Найдите значение выражения: $\frac{x^8 \cdot x^7}{x^{13}}$ при $x = 3$.
Ответ: _____.
- 12** Найдите значение выражения $\frac{y^{-9} \cdot y^{-5}}{y^{-16}}$ при $y = -3$.
Ответ: _____.

- 13 Найдите значение выражения $\frac{(0,04)^7 \cdot 5^6}{(-125)^{-5} \cdot (-5)^3}$.
 Ответ: _____.
- 14 Найдите значение выражения $12a^{-6} \cdot (-4a^{-3}y^7)^{-2}$ при $a = 4728$, $y = -1$.
 Ответ: _____.
- 15 Найдите значение выражения $\frac{t^7 \cdot t^9}{t^{12}}$ при $t = -5$.
 Ответ: _____.
- 16 Найдите значение выражения $\frac{18^6 \cdot 2^{-8}}{36^{-3} \cdot 9^9}$.
 Ответ: _____.
- 17 Найдите значение выражения $(\sqrt{5-2\sqrt{6}} - \sqrt{5+2\sqrt{6}})^2$.
 Ответ: _____.
- 18 Найдите $f(4+x) + f(4-x)$, если $f(x) = \sqrt[3]{x-8} + \sqrt[3]{x}$.
 Ответ: _____.
- 19 Найдите значение выражения $\sqrt[5]{1-\sqrt{2}} \cdot \sqrt[10]{3+2\sqrt{2}}$.
 Ответ: _____.
- 20 Найдите значение выражения $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt[6]{a} \cdot \sqrt[12]{a}}$ при $a = 144$.
 Ответ: _____.
- 21 Найдите значение выражения $\sqrt[3]{2-\sqrt{3}} \cdot \sqrt[6]{7+4\sqrt{3}}$.
 Ответ: _____.
- 22 Найдите значение выражения $\frac{5^{8,5}}{25^{3,25}}$.
 Ответ: _____.
- 23 Найдите значение выражения $7^{\sqrt{5+9}} \cdot 7^{-6-\sqrt{5}}$.
 Ответ: _____.
- 24 Найдите значение выражения $\frac{8p^{\frac{2}{3}}}{p^{\frac{1}{15}} \cdot p^{\frac{3}{5}}}$.
 Ответ: _____.
- 25 Найдите значение выражения $45^{-8,3} \cdot 9^{9,3} : 5^{-7,3}$.
 Ответ: _____.
- 26 Найдите значение выражения $\frac{(\sqrt{7b})^4 \cdot \sqrt[10]{b^6}}{(b^2)^{1,3}}$ при $b = 1$.
 Ответ: _____.
- 27 Найдите значение выражения $3^{\frac{4}{7}} \cdot 81^{\frac{3}{28}}$.
 Ответ: _____.
- 28 Найдите значение выражения $\frac{(16y)^2 \cdot y^{3,6}}{y^{5,1}}$ при $y = 1$.
 Ответ: _____.

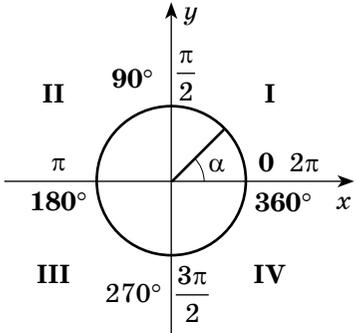
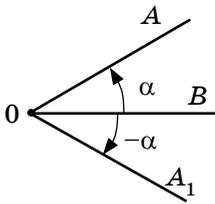
1.2. ОСНОВЫ ТРИГОНОМЕТРИИ

1.2.1. Синус, косинус, тангенс, котангенс произвольного угла

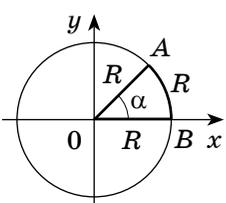
Синус, косинус, тангенс и котангенс острого угла прямоугольного треугольника

	a, b — катеты; c — гипотенуза; α — острый угол
<p>Синусом угла α называется отношение противолежащего катета к гипотенузе</p>	$\sin \alpha = \frac{a}{c}$
<p>Косинусом угла α называется отношение прилежащего катета к гипотенузе</p>	$\cos \alpha = \frac{b}{c}$
<p>Тангенсом угла α называется отношение противолежащего катета к прилежащему</p>	$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}$
<p>Котангенсом угла α называется отношение прилежащего катета к противолежащему</p>	$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{b}{a}$

Углы в тригонометрии

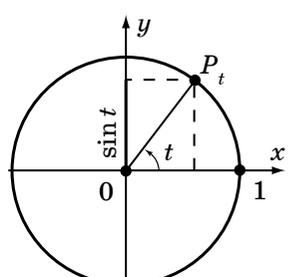
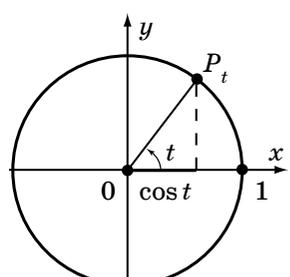
	<p>Оси координат Ox и Oy разбивают окружность на четыре четверти:</p> <p>I четверть: $0^\circ < \alpha < 90^\circ$; II четверть: $90^\circ < \alpha < 180^\circ$; III четверть: $180^\circ < \alpha < 270^\circ$; IV четверть: $270^\circ < \alpha < 360^\circ$</p>
 <p>$\angle AOB = \alpha$; $\angle A_1OB = -\alpha$</p>	<p>В тригонометрии угол рассматривается как фигура, образованная вращением луча вокруг своей начальной точки O.</p> <p>Вращение против часовой стрелки — положительное, по часовой — отрицательное</p>

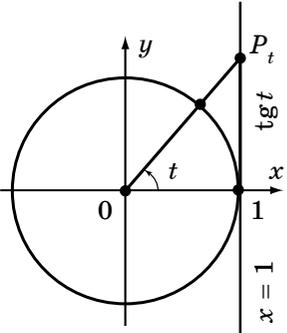
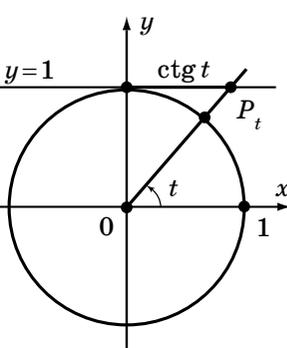
1.2.2. Радианная мера угла

Углы измеряются в градусах и радианах	
<p>1° — это угол, который равен $\frac{1}{180}$ части развёрнутого угла.</p> <p>$1^\circ = 60'$ (60 минут)</p> <p>$1' = 60''$ (60 секунд)</p> $1^\circ = \frac{\pi}{180^\circ}$ $n^\circ = \frac{\pi \cdot n}{180^\circ}$ $135^\circ = \frac{\pi \cdot 135^\circ}{180^\circ} = \frac{3\pi}{4}$	<div style="text-align: center;">  </div> <p style="text-align: center;">$\cup AB = R, \alpha = 1$</p> <p>1 радиан — это центральный угол, которому соответствует длина дуги, равная радиусу этой окружности.</p> $1 \text{ радиан} = \frac{180^\circ}{\pi}$ $\frac{5\pi}{6} = \frac{5 \cdot 180^\circ}{6} = 150^\circ$

Градусы	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	270°	360°
Радианы	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π

1.2.3. Синус, косинус, тангенс и котангенс числа

<p>Синусом ($\sin t$) числа t называется ордината точки P_t единичной окружности.</p> <p>Наименьший положительный период $T = 2\pi$</p>	
<p>Косинусом ($\cos t$) числа t называется абсцисса точки P_t единичной окружности.</p> <p>Наименьший положительный период $T = 2\pi$</p>	

<p>Тангенсом ($\operatorname{tg}t$) числа t называют отношение $\sin t$ и $\cos t$. Ось тангенсов — прямая $x=1$. $\operatorname{tg}t$ — ордината соответствующей точки оси тангенсов: $\operatorname{tg}t = \frac{\sin t}{\cos t}$. Наименьший положительный период $T=\pi$</p>	
<p>Котангенсом ($\operatorname{ctg}t$) числа t называют отношение $\cos t$ и $\sin t$. Ось котангенсов — прямая $y=1$. $\operatorname{ctg}t$ — абсцисса соответствующей точки оси котангенсов: $\operatorname{ctg}t = \frac{\cos t}{\sin t}$. Наименьший положительный период $T=\pi$</p>	

Значение синуса, косинуса, тангенса и котангенса некоторых углов

t , рад	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
t , градусы	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	270°	360°
$\sin t$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
$\cos t$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	0	1
$\operatorname{tg}t$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	—	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	—	0
$\operatorname{ctg}t$	—	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$	—	0	—

Знаки синуса, косинуса, тангенса, котангенса

$\sin t$	$\cos t$	$\operatorname{tg} t / \operatorname{ctg} t$

1.2.4. Основные тригонометрические тождества

$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$	$\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha$	$\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha, \alpha \in R$
$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, a \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$	$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, a \neq \pi n, n \in Z$	
$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1, n \neq \frac{\pi n}{2}, n \in Z$		
$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}, a \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$	$1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}, a \neq \pi n, n \in Z$	

Сумма и разность тригонометрических функций

$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2};$	$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2};$
$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2};$	$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$

Произведение тригонометрических функций

$\sin \alpha \cdot \sin \beta = \frac{\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)}{2};$	$\sin \alpha \cdot \cos \beta = \frac{\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)}{2};$
$\cos \alpha \cdot \cos \beta = \frac{\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)}{2};$	
$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta = \frac{\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)} = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta};$	
$\operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \beta = \frac{\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)} = \frac{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta};$	
$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \beta = \frac{\sin(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)}{\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)}$	

1.2.5. Формулы приведения

t	$\pi + \alpha$	$\pi - \alpha$	$2\pi + \alpha$	$2\pi - \alpha$	$\frac{\pi}{2} + \alpha$	$\frac{\pi}{2} - \alpha$	$\frac{3\pi}{2} + \alpha$	$\frac{3\pi}{2} - \alpha$
$\sin t$	$-\sin \alpha$	$\sin \alpha$	$\sin \alpha$	$-\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\cos \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\cos \alpha$
$\cos t$	$-\cos \alpha$	$-\cos \alpha$	$\cos \alpha$	$\cos \alpha$	$-\sin \alpha$	$\sin \alpha$	$\sin \alpha$	$-\sin \alpha$
$\operatorname{tg} t$	$\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$
$\operatorname{ctg} t$	$\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$

1.2.6. Синус, косинус и тангенс суммы и разности двух углов

$$\begin{aligned} \sin(\alpha \pm \beta) &= \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta; \\ \cos(\alpha \pm \beta) &= \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta; \\ \operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) &= \frac{\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta}{1 \mp \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}, \quad \alpha, \beta, \alpha \pm \beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}; \\ \operatorname{ctg}(\alpha \pm \beta) &= \frac{\operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta \mp 1}{\operatorname{ctg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta}, \quad \alpha, \beta, \alpha \pm \beta \neq \pi n, \quad n \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

1.2.7. Синус и косинус двойного угла

$$\begin{aligned} \sin 2\alpha &= 2 \sin \alpha \cos \alpha; \\ \cos 2\alpha &= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha; \\ \operatorname{tg} 2\alpha &= \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}, \\ \alpha &\neq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z} \\ \operatorname{ctg} 2\alpha &= \frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha - 1}{2 \operatorname{ctg} \alpha}, \\ \alpha &\neq \frac{\pi n}{2}, \quad n \in \mathbb{Z} \\ 2 \sin^2 \alpha &= 1 - \cos 2\alpha \\ 2 \cos^2 \alpha &= 1 + \cos 2\alpha \end{aligned}$$

**ПРИМЕРЫ ЗАДАНИЙ ЕГЭ ПО ТЕМЕ 1.2.
«ОСНОВЫ ТРИГОНОМЕТРИИ»**

Ответом к каждому заданию является конечная десятичная дробь, целое число или последовательность цифр. Запишите ответ к заданию в поле ответа. Единицы измерения писать не нужно.

- 1** Найдите значение выражения $\cos 34^\circ \cos 26^\circ - \sin 34^\circ \sin 26^\circ$.
Ответ: _____.
- 2** Упростите выражение $\left(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha + \frac{1}{\sin^2 \alpha}\right) \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha$ и найдите его значение, если $\alpha = 18^\circ$.
Ответ: _____.
- 3** Найдите значение выражения $\sin 105^\circ - \sin 75^\circ$.
Ответ: _____.
- 4** Упростите выражение $\frac{\cos 2\beta - \cos 6\beta}{\sin 6\beta + \sin 2\beta}$ и найдите его значение, если $\beta = 22^\circ 30'$.
Ответ: _____.
- 5** Упростите выражение $\frac{\sin 2\alpha + \sin 5\alpha - \sin 3\alpha}{\cos \alpha + 1 - 2\sin^2 2\alpha}$ и найдите его значение, если $\sin \alpha = 0,3$.
Ответ: _____.
- 6** Упростите выражение $\cos \alpha + \cos\left(\frac{2\pi}{3} + \alpha\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{3} - \alpha\right)$ и найдите его значение, если $\alpha = \frac{\pi}{7}$.
Ответ: _____.
- 7** Упростите выражение $\frac{\sin 2\alpha + \sin 4\alpha}{\cos 2\alpha - \cos 4\alpha}$ и найдите его значение, если $\operatorname{ctg} \alpha = 10$.
Ответ: _____.
- 8** Найдите значение выражения $\sin(\alpha + \beta)$, если $\sin \alpha = \frac{8}{17}$, $\cos \beta = \frac{4}{5}$, α и β — углы первой четверти.
Ответ: _____.
- 9** Найдите значение выражения $\cos(\alpha + \beta)$, если $\sin \alpha = \frac{4}{5}$, $\cos \beta = -\frac{15}{17}$, α и β — углы второй четверти.
Ответ: _____.

10 Найдите значение выражения $\sin 25^\circ + \sin 35^\circ - \cos 5^\circ$.

Ответ: _____.

11 Найдите значение выражения $\cos 103^\circ \cos 13^\circ + \sin 103^\circ \sin 13^\circ$.

Ответ: _____.

12 Найдите значение выражения $\cos 32^\circ \cos 58^\circ - \sin 32^\circ \sin 58^\circ$.

Ответ: _____.

13 Вычислите $\sin 20^\circ + \sin 40^\circ - \cos 10^\circ$.

Ответ: _____.

14 Найдите значение выражения $\sin 70^\circ - \sin 50^\circ - \sin 10^\circ$.

Ответ: _____.

1.3. ЛОГАРИФМЫ

1.3.1. Логарифм числа

Логарифмом числа b по основанию a называется показатель степени, в которую нужно возвести число a, чтобы получить число b						
Обозначается: $\log_a b$ $a > 0; a \neq 1; b > 0$	Читается: логарифм b по основанию a					
<p>Показательное равенство</p> $a^x = b$ <p>x — показатель степени;</p> <p>a — основание степени;</p> <p>b — степень числа a</p>	<p style="text-align: center;">\Leftrightarrow</p> <table border="1" style="width: 100%;"> <tr> <td style="text-align: center;">Логарифмическое равенство</td> </tr> <tr> <td style="text-align: center;">$x = \log_a b$</td> </tr> <tr> <td>x — логарифм числа a по основанию b;</td> </tr> <tr> <td>a — основание логарифма;</td> </tr> <tr> <td>b — число, стоящее под знаком логарифма</td> </tr> </table>	Логарифмическое равенство	$x = \log_a b$	x — логарифм числа a по основанию b ;	a — основание логарифма;	b — число, стоящее под знаком логарифма
Логарифмическое равенство						
$x = \log_a b$						
x — логарифм числа a по основанию b ;						
a — основание логарифма;						
b — число, стоящее под знаком логарифма						

$$2^7 = 128 \Leftrightarrow \log_2 128 = 7;$$

$$\log_3 \frac{1}{9} = -2 \Leftrightarrow 3^{-2} = \frac{1}{9}; \left(\frac{1}{5}\right)^{-3} = 125 \Leftrightarrow \log_{\frac{1}{5}} 125 = -3$$

Основное логарифмическое тождество	
$a^{\log_a b} = b,$ $a > 0, a \neq 1, b > 0$	$5^{\log_5 3} = 3; 3^{\log_3 5} = 5;$ $10^{\lg 7} = 7; e^{\ln 3} = 3$
$\log_a 1 = 0, \log_a a = 1,$ $a > 0, a \neq 1$	$\log_3 1 = 0; \lg 1 = 0;$ $\log_{\sqrt{7}} \sqrt{7} = 1; \ln 1 = 0$

1.3.2. Логарифм произведения, частного, степени

Логарифм произведения	
$\log_c(ab) = \log_c a + \log_c b$ $a > 0, b > 0, c > 0, c \neq 1$	$\log_8 2 + \log_8 4 = \log_8 2 \cdot 4 = \log_8 8 = 1;$ $\log_3 18 = \log_3(9 \cdot 2) =$ $= \log_3 9 + \log_3 2 = 2 + \log_3 2$
Логарифм частного	
$\log_c \frac{a}{b} = \log_c a - \log_c b,$ $a > 0, b > 0, c > 0, c \neq 1$	$\log_3 15 - \log_3 5 = \log_3 \frac{15}{5} = \log_3 3 = 1;$ $\log_2 \frac{2}{7} = \log_2 2 - \log_2 7 = 1 - \log_2 7$

Логарифм степени	
$\log_c a^k = k \log_c a;$ $a > 0, c > 0, c \neq 1, k \in \mathbb{R}$	$\log_3 3^{10} = 10 \log_3 3 = 10;$ $\lg 10^p = p \lg 10 = p;$ $3 \log_8 4 = \log_8 4^3 = \log_8 64 = 2$
$\log_{a^m} b^n = \frac{n}{m} \log_a b,$ $a > 0, b > 0, a \neq 1,$ $m, n \in \mathbb{R}, m \neq 0$	$\log_{25} 125 = \log_{5^2} 5^3 = \frac{3}{2} \log_5 5 = \frac{3}{2} = 1,5$
Переход к новому основанию	
$\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b};$ $a > 0, b > 0, b \neq 1, c > 0, c \neq 1$	$\log_a b = \frac{\lg b}{\lg a}; \log_3 7 = \frac{\ln 7}{\ln 3}$
$\log_a b = \frac{1}{\log_b a};$ $a > 0, a \neq 1, b > 0, b \neq 1$	$\log_{36} 6 = \frac{1}{\log_6 36} = \frac{1}{2}$
$a^{\log_c b} = b^{\log_c a};$ $a > 0, a \neq 1, b > 0, b \neq 1, c > 0, c \neq 1$	$8^{\log_2 5} = 5^{\log_2 8} = 5^3 = 125$
Сравнение логарифмов	
<p>Если $a > 1$ и $0 < x_1 < x_2$, то $\log_a x_1 < \log_a x_2$ (знак неравенства не меняется)</p>	$2 < 3, \lg 2 < \lg 3$
<p>Если $0 < a < 1$ и $0 < x_1 < x_2$, то $\log_a x_1 > \log_a x_2$ (знак неравенства меняется)</p>	$2 < 3, \log_{0,5} 2 > \log_{0,5} 3$

1.3.3. Десятичный и натуральный логарифм, число e

<p>Логарифмы по основанию 10 называются десятичными:</p> $\log_{10} a = \lg a$	$\lg 10 = 1; \lg 0,1 = -1;$ $\lg 100 = 2; \lg 0,01 = -2;$ $\lg 1000 = 3; \lg 0,001 = -3$
<p>Логарифмы по основанию e называются натуральными:</p> $\log_e a = \ln a.$ <p>$e = 2,718281\dots$ — иррациональное число; $e \approx 2,7$</p>	$\ln e = 1; \ln \frac{1}{e} = -1;$ $\ln e^2 = 2; \ln \frac{1}{e^2} = -2$

**ПРИМЕРЫ ЗАДАНИЙ ЕГЭ ПО ТЕМЕ 1.3.
«ЛОГАРИФМЫ»**

Ответом к каждому заданию является конечная десятичная дробь, целое число или последовательность цифр. Запишите ответ к заданию в поле ответа. Единицы измерения писать не нужно.

- 1** Найдите значение выражения $\log_7 343$.
Ответ: _____.
- 2** Вычислите $\log_4 8$.
Ответ: _____.
- 3** Вычислите $\log_{\sqrt{3}} \frac{1}{3}$.
Ответ: _____.
- 4** Найдите значение выражения $3^{2-\log_3 18}$.
Ответ: _____.
- 5** Найдите значение выражения $2^{3\log_2 3}$.
Ответ: _____.
- 6** Найдите значение выражения $\frac{\log_3 16}{\log_3 4}$.
Ответ: _____.
- 7** Найдите значение выражения $\log_2 11 - \log_2 44$.
Ответ: _____.
- 8** Найдите значение x , если $\lg x = \frac{1}{2} \lg 9 - \frac{2}{3} \lg 8$.
Ответ: _____.
- 9** При каком значении x верно равенство $\lg x = \lg 8 + \lg 20 - \lg 40$?
Ответ: _____.
- 10** При каком значении x верно равенство $\lg x = \lg 12 + \lg 15 - \lg 18$?
Ответ: _____.
- 11** Вычислите $\frac{\log_5 12 - 2\log_5 2}{\log_5 18 + \log_5 0,5}$.
Ответ: _____.
- 12** Найдите значение x , если $\lg x = \frac{1}{2} \lg 9 - \frac{1}{3} \lg 8$.
Ответ: _____.
- 13** Вычислите $4^{\log_2 5 + \log_{0,25} 10}$.
Ответ: _____.
- 14** Вычислите $\frac{\log_5 27}{\log_5 9}$.
Ответ: _____.
- 15** Вычислите $\frac{\log_7 8}{\log_7 15 - \log_7 30}$.
Ответ: _____.

1.4. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ВЫРАЖЕНИЙ

1.4.1. Преобразование выражений, включающих арифметические операции

Числовые выражения. Действия с десятичными дробями	
<p>Сложение и вычитание десятичных дробей:</p> <p>а) уравнивать количество знаков после запятой, записать запятую под запятой;</p> <p>б) выполнить сложение, вычитание, не обращая внимания на запятую;</p> <p>в) поставить в ответе запятую под запятой</p>	$0,37 + 26,5 = 26,87$ $\begin{array}{r} 0,37 \\ + 26,50 \\ \hline 26,87 \end{array}$ $37 - 0,075 = 36,925$ $\begin{array}{r} 37,000 \\ - 0,075 \\ \hline 36,925 \end{array}$
<p>Умножение десятичных дробей:</p> <p>а) выполнить действие, не обращая внимания на запятую;</p> <p>б) отделить в произведении столько знаков, сколько их имеется после запятой в обоих множителях вместе</p>	$\begin{array}{r} \times 0,21\overline{5} \\ 0,03 \\ \hline 0,0064\overline{5} \end{array} \quad \begin{array}{r} \times 15 \\ 0,00\overline{3} \\ \hline 0,04\overline{5} \end{array}$
<p>Деление десятичных дробей:</p> <p>1. <i>На натуральное число:</i></p> <p>а) разделить дробь на число, не обращая внимания на запятую;</p> <p>б) поставить в частном запятую после того, как закончено деление целой части;</p> <p>в) если целая часть меньше делителя, то частное начинается с нуля целых.</p> <p>2. <i>На десятичную дробь:</i> в делимом и делителе запятую перенести на столько цифр, сколько их после запятой в делителе, и выполнить деление десятичной дроби на натуральное число</p>	$\begin{array}{r} \overline{) 30,6} \quad \overline{) 9} \quad \overline{) 3,56} \quad \overline{) 4} \\ \underline{27} \quad \underline{3,4} \quad \underline{32} \quad \underline{0,89} \\ \hline 36 \quad \quad \quad 36 \\ \underline{36} \quad \quad \quad \underline{36} \\ \hline 0 \quad \quad \quad 0 \end{array}$ $8,46 : 0,6 = 84,6 : 6 = 14,1;$ $0,00612 : 0,03 = 0,612 : 3 = 0,204;$ $27 : 0,15 = 2700 : 15 = 180$
Арифметические действия с рациональными числами	
<p>Сложение чисел с одинаковыми знаками: сложить модули данных чисел, перед суммой поставить общий знак</p>	<p>а) $(-6) + (-3,7) = -(6 + 3,7) = -9,7;$</p> <p>б) $-5\frac{7}{8} + \left(-6\frac{3}{4}\right) = -\left(5\frac{7}{8} + 6\frac{6}{8}\right) =$ $= -11\frac{13}{8} = -12\frac{5}{8}$</p>

Окончание таблицы

Сложение чисел с разными знаками: модуль суммы равен разности модулей слагаемых, знак суммы совпадает со знаком слагаемого, имеющего больший модуль	а) $4 + (-10) = -(10 - 4) = -6$; б) $5,6 + (-4,1) = 5,6 - 4,1 = 1,5$
Вычитание чисел: чтобы вычесть из числа a число b , достаточно к уменьшаемому прибавить число, противоположное вычитаемому: $a - b = a + (-b)$	а) $-7 - 3 = -7 + (-3) = -10$; б) $-5 - (-11,3) = -5 + 11,3 = 6,3$; в) $10 - 25 = 10 + (-25) = -15$
Умножение и деление чисел: а) произведение (частное) чисел одного знака есть число положительное;	$-6 \cdot (-2,1) = 12,6$; $-22 : \left(-\frac{11}{17}\right) = \frac{22 \cdot 17}{11} = 34$;
б) произведение (частное) двух чисел с разными знаками есть число отрицательное	$24 : (-3) = -8$; $-5 : 8 = -\frac{5}{8}$

**Правила раскрытия скобок в числовых выражениях
и выражениях с переменной**

1. Если перед скобками стоит знак «+», то, раскрывая скобки, можно: а) опустить скобки и знак «+»; б) записать слагаемые, стоящие в скобках, сохранив их знаки; в) если первое слагаемое, стоящее в скобках, записано без знака, то его нужно записать со знаком «+»	а) $-7,21 + (3,5 + 7,21) =$ $= -7,21 + 3,5 + 7,21 = 3,5$; б) $3,7 + (-2,3 + 5) =$ $= 3,7 - 2,3 + 5 = 6,4$; в) $a + (b - 2a) = a + b - 2a = b - a$; г) $3x + (-x + 2y) =$ $= 3x - x + 2y = 2x + 2y$
2. Если перед скобками стоит знак «-», то, раскрывая скобки, можно: а) опустить скобки и знак «-»; б) записать слагаемые, стоящие в скобках, поменяв знаки всех слагаемых на противоположные; в) если первое слагаемое, стоящее в скобках, записано без знака, то его нужно записать со знаком «-»	а) $-2,5 - (5,6 + 2,5) =$ $= -2,5 - 5,6 - 2,5 = -10,6$; б) $-7,8 - (-3,2 - 6,8) =$ $= -7,8 + 3,2 + 6,8 = 2,2$; в) $a - (b - 2a) = a - b + 2a = 3a - b$; г) $3x - (-x + 2y) =$ $= 3x + x - 2y = 4x - 2y$

1.4.2. Преобразование выражений, включающих операцию возведения в степень

Формулы сокращённого умножения	
Квадрат суммы	$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Квадрат разности	$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
Куб суммы	$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3a^2b + b^3$
Куб разности	$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
Сумма кубов	$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$
Разность квадратов	$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$
Разность кубов	$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

**Преобразование выражений, включающих
операцию возведения в степень**

Произведение степеней с одинаковыми основаниями	$a^p \cdot a^q = a^{p+q}; a^{p+q} = a^p \cdot a^q$
Частное степеней с одинаковым показателем	$a^p : a^q = a^{p-q}; a^{p-q} = a^p : a^q = \frac{a^p}{a^q}$
Степень степени	$(a^p)^q = a^{pq}; a^{pq} = (a^p)^q = (a^q)^p$
Степень произведения и частного	$(ab)^p = a^p \cdot b^p; \left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p}; a^p \cdot b^p = (ab)^p; \frac{a^p}{b^p} = \left(\frac{a}{b}\right)^p$

Сравнение степеней

Основания различны	Основания одинаковы
Если $0 < a < b$, то $a^r < b^r$ при $r > 0$, $a^r > b^r$ при $r < 0$, r — рациональное число	Если $r > p$, то $a^r > a^p$ при $a > 1$ $a^r < a^p$ при $0 < a < 1$, r, p — рациональные числа

**1.4.3. Преобразование выражений, включающих
корни натуральной степени**

Корень из произведения и произведение корней	Если $a \geq 0, b \geq 0$, то $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$ и $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$
Корень из частного, частное корней	Если $a \geq 0, b > 0$, то $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ и $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$, $n \in \mathbb{N}$
Корень из степени и степень из корня	Если $a > 0$, то $(\sqrt[n]{a})^k = \sqrt[n]{a^k}$, $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ $\sqrt[nk]{a^{mk}} = \sqrt[n]{a^m}$, $a \geq 0, n \in \mathbb{N}, n \geq 2$
Корень степени m из корня степени n	Если $a \geq 0$, то $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$, $m \geq 2, n \geq 2, m, n \in \mathbb{N}$