19

Под редакцией
И. В. Ященко

ЕГЭ 2019

МАТЕМАТИКА

19
Профильный

АРИФМЕТИКА И АЛГЕБРА

Г. И. Вольфсон
М. Я. Пратусевич
С. Е. Рукшин
К. М. Столбов
И. В. Ященко

ЕГЭ 2019

ФГОС

МАТЕМАТИКА

УДК 373:51
ББК 22.1я72
В72

Авторы:
Г. И. Вольфсон, М. Я. Пратусевич, С. Е. Рукшин,
К. М. Столбов, И. В. Ященко

Вольфсон Г. И. и др.

В72 ЕГЭ 2019. Математика. Арифметика и алгебра. Задача 19 (профильный уровень) / Под ред. И. В. Ященко. — М.: МЦНМО, 2019. — 102 с.

ISBN 978-5-4439-1329-2

Пособия по математике серии «ЕГЭ 2019. Математика» ориентированы на подготовку учащихся старшей школы к успешной сдаче Единого государственного экзамена по математике. В данном учебном пособии представлен материал для подготовки к решению задачи 19.

Пособие предназначено для учащихся старшей школы, учителей математики, родителей.

Издание соответствует Федеральному государственному образовательному стандарту (ФГОС).

ББК 22.1я72

Приказом № 729 Министерства образования и науки Российской Федерации Московский центр непрерывного математического образования включён в перечень организаций, осуществляющих издание учебных пособий, допущенных к использованию в образовательном процессе.

12+

ISBN 978-5-4439-1329-2

§ 1. Делимость и её свойства. Признаки делимости

Диагностическая работа 1

1. Число $\overline{134*}$ кратно 3. Какую цифру можно поставить вместо звёздочки? (Перечислите все возможные варианты.)

2. Делится ли число 314567891 на 11?

3. Какую цифру нужно поставить вместо звёздочки, чтобы число $314159{*}6$ было кратно 8? (Перечислите все возможные варианты.)

4. В буфете купили несколько пирожных по 35 рублей и 14 порций кофе (каждая порция кофе стоит целое число рублей). Мог ли весь купленный товар стоить 501 рубль?

5. Сумма и произведение двух натуральных чисел кратны 136. Докажите, что квадрат каждого из них кратен 136.

Краткая теоретическая справка

В этом параграфе все числа целые, если не оговаривается противное.

Определение. Число a *делится на число* $b \neq 0$, если существует такое число c, что $a = bc$. В этом случае говорят, что b является делителем числа a.

Обозначение: $a \vdots b$.

Свойства делимости

1. Если a делится на b, то для любого числа k число ka делится на b.
2. Если a делится на c и b делится на c, то сумма, разность и произведение чисел a и b делятся на c.
3. Если a делится на b и b делится на c, то a делится на c.
4. Если a делится на c и b делится на d, то ab делится на cd.

Признаки делимости для десятичной записи числа

Число делится на 2 тогда и только тогда, когда его последняя цифра чётна.

Число делится на 3 тогда и только тогда, когда сумма его цифр делится на 3. Более того, сумма цифр числа даёт такой же остаток от деления на 3, как и само число.

Число делится на 4 тогда и только тогда, когда две его последние цифры составляют число, которое делится на 4.

Число делится на 5 тогда и только тогда, когда оно оканчивается на 0 или 5.

Число делится на 9 тогда и только тогда, когда сумма его цифр делится на 9. Более того, сумма цифр числа даёт такой же остаток от деления на 9, как и само число.

Число делится на 11 тогда и только тогда, когда разность суммы цифр, стоящих на нечётных местах, и суммы цифр, стоящих на чётных местах, делится на 11 (например, число 305792608 делится на 11, так как $(8+6+9+5+3)-(0+2+7+0)=22$ делится на 11).

Простые и взаимно простые числа

Определение. Натуральное число, отличное от 1, называется *простым*, если у него нет натуральных делителей, отличных от 1 и него самого. Числа, отличные от 1 и не являющиеся простыми, называются *составными*.

Важно! Единица не является ни простым, ни составным числом.

Определение. Два числа, наибольший общий делитель которых равен 1, называются *взаимно простыми*.

Если число a делится на числа b и c, причём числа b и c взаимно просты, то число a делится на их произведение bc. Данное утверждение верно не только для двух чисел, но и для любого количества попарно взаимно простых чисел (а именно: если число a делится на каждое из n чисел, причём любые два числа из данных n чисел взаимно просты, то число a делится на произведение данных n чисел).

1.1. Свойства делимости

Примеры решения задач

1. Найдите все такие $a\in\mathbb{N}$, что $\dfrac{2a+1}{a-2}$ — целое число.

Решение. Если число $\dfrac{2a+1}{a-2}$ целое, то это равносильно тому, что $(2a+1)\,\vdots\,(a-2)$. Тогда и разность этих чисел тоже будет делиться на $a-2$, т. е. $((2a+1)-(a-2))\,\vdots\,(a-2)$, откуда $(a+3)\,\vdots\,(a-2)$. Но и разность этих чисел тоже должна делиться на $a-2$: $((a+3)-(a-2))\,\vdots\,(a-2)$, т. е. $5\,\vdots\,(a-2)$. Значит, $a-2$ — делитель числа 5. Но у числа 5 не так много делителей — это $1, 5, -1, -5$.

Переберём все случаи.

1) $a-2=1$. Тогда $a=3$ и $\dfrac{2a+1}{a-2}=\dfrac{6+1}{3-2}=7\in\mathbb{Z}$. Значение $a=3$ подходит.

2) $a-2=-1$. Тогда $a=1$ и $\dfrac{2a+1}{a-2}=\dfrac{2+1}{1-2}=-3\in\mathbb{Z}$. Значение $a=1$ подходит.

3) $a-2=5$. Тогда $a=7$ и $\dfrac{2a+1}{a-2}=\dfrac{14+1}{7-2}=3\in\mathbb{Z}$. Значение $a=7$ подходит.

4) $a-2=-5$. Тогда $a=-3$ — не натуральное число. Этот случай не подходит.

Ответ. $\dfrac{2a+1}{a-2}\in\mathbb{Z}$ только при $a=1, 3, 7$.

2. Найдите все такие $a\in\mathbb{Z}$, что $\dfrac{2a+1}{a-2}$ — натуральное число.

Решение. Рассуждаем вначале аналогично задаче 1. Разберём 4 случая.

1) $a-2=1$. При $a=3$ имеем $\dfrac{2a+1}{a-2}=\dfrac{6+1}{3-2}=7\in\mathbb{N}$. Значит, $a=3$ подходит.

2) $a-2=-1$. При $a=1$ имеем $\dfrac{2a+1}{a-2}=\dfrac{2+1}{1-2}=-3\notin\mathbb{N}$. Значит, $a=1$ не подходит.

3) $a-2=5$. При $a=7$ имеем $\dfrac{2a+1}{a-2}=\dfrac{14+1}{7-2}=3\in\mathbb{N}$. Значит, $a=7$ подходит.

4) $a-2=-5$. При $a=-3$ имеем $\dfrac{2a+1}{a-2}=\dfrac{-6+1}{-3-2}=1\in\mathbb{N}$. Значит, $a=-3$ подходит.

Ответ. $\dfrac{2a+1}{a-2}\in\mathbb{N}$ только при $a=-3, 3, 7$.

3. Найдите все такие $a\in\mathbb{N}$, что $(a^2+a-1)\,\vdots\,(a-2)$.

Решение. Заметим, что число a^2+a-6 делится на $a-2$, так как

$$a^2+a-6=(a-2)(a+3).$$

Тогда если $(a^2+a-1)\,\vdots\,(a-2)$ и $(a^2+a-6)\,\vdots\,(a-2)$, то и

$$(a^2+a-1)-(a^2+a-6)\,\vdots\,(a-2), \quad \text{т. е. } 5\,\vdots\,(a-2).$$

Как и в прошлых задачах, переберём все возможные значения $a-2$ — делители 5.

1) $a-2=1$. Тогда $a=3$ и $a^2+a-1=9+3-1=11$, а $a-2=1$, и мы получаем $11\,\vdots\,1$, значит, $a=3$ нам подходит.

2) $a-2=-1$. Тогда $a=1$ и $a^2+a-1=1+1-1=1$, а $a-2=-1$, и мы получаем $1\,\vdots\,(-1)$, значит, $a=1$ нам подходит.

3) $a-2=5$. Тогда $a=7$ и $a^2+a-1=49+7-1=55$, а $a-2=5$, и мы получаем $55\,\vdots\,5$, значит, $a=7$ подходит.

4) $a-2=-5$. Тогда $a=-3$ и $a^2+a-1=(-3)^2+(-3)-1=5$ делится на $a-2=-5$, т. е. $a=-3$ подходит.

Ответ. $a=-3, 1, 3, 7$.

4. Докажите, что произведение любых трёх последовательных чисел делится на 6.

Решение. Давайте заметим, что из трёх последовательных чисел хотя бы одно с гарантией будет чётным (так как чётные и нечётные числа чередуются и трёх подряд нечётных чисел не бывает). Также давайте заметим, что одно из трёх последовательных чисел делится на 3 (так как числа, делящиеся на 3, идут через два и они просто не могут «проскочить» наши три подряд идущих числа). Значит, в произведении любых трёх последовательных чисел есть число, кратное трём, и число, кратное 2, поэтому произведение делится на 6.

5. Натуральные числа m и n таковы, что и m^3+n, и m^3+m делятся на m^2+n^2. Найдите m и n.

Решение. Заметим, что если $(m^3+m) \vdots (m^2+n^2)$ и $(m^3+n) \vdots (m^2+n^2)$, то

$$((m^3+n)-(m^3+m)) \vdots (m^2+n^2),$$

т. е. $(n-m) \vdots (m^2+n^2)$. Будем считать, что $n \geqslant m$ (иначе будем рассматривать дальше $m-n$ вместо $n-m$). Отсюда либо $n-m \geqslant m^2+n^2$, чего, очевидно, не бывает, либо $n-m=0$, значит, $m=n$. Тогда можно считать, что нам дано следующее: $(m^3+m) \vdots 2m^2$. Заметим, что $m^3 \vdots m^2$, значит, и m должно делиться на m^2, а такое бывает только при $m=1$.

Ответ. $m=n=1$.

Подготовительные задачи

1. Верно ли, что если число делится на 4 и на 6, то оно делится на 24?

2. Число a делится на 3. Может ли число $2a$ не делиться на 3?

3. Число a чётно. Верно ли, что $3a$ делится на 6?

4. Число $15a$ делится на 6. Верно ли, что a делится на 6?

5. Число $n+1$ делится на 3. Докажите, что $4+7n$ также делится на 3.

6. Найдите все такие $a \in \mathbb{N}$, что $(a^2+1) \vdots a$.

7. Найдите все такие $a \in \mathbb{N}$, что $(a+1) \vdots a^2$.

8. Найдите все такие $a \in \mathbb{N}$, что $(a^2+2a-3) \vdots a$.

9. Найдите все такие $a \in \mathbb{N}$, что $(a^2+3) \vdots (a^2-2)$.

10. Докажите, что произведение любых пяти последовательных чисел делится на 30.

11. Придумайте 5 различных натуральных чисел, сумма которых делится на каждое из них.

Основные задачи

1. Докажите, что дробь $\dfrac{6n+7}{10n+12}$ несократима ни при каких натуральных n.

2. Докажите, что число $n^3 - n$ делится на 24 при любом нечётном n.

3. Докажите, что сумма n последовательных натуральных чисел является составным числом (т. е. имеет хотя бы один делитель, отличный от единицы и самого числа) при любом натуральном $n > 2$.

4. Произведение двух чисел, каждое из которых не делится нацело на 10, равно 1000. Найдите сумму этих чисел.

5. Число умножили на сумму его цифр и получили 2008. Найдите исходное число.

1.2. Признаки делимости

Примеры решения задач

1. На доске написано: $72{*}3{*}$. Замените звёздочки цифрами так, чтобы полученное число делилось на 45.

Решение. Пусть на доске написано такое число: $72x3y$, где x и y — некие цифры. Тогда если это число делится на 45, то оно делится на 5 и на 9.

1) Делимость на 9.

По признаку делимости на 9 сумма цифр числа должна делиться на 9: $(7+2+x+3+y) \vdots 9$, $(12+x+y) \vdots 9$.

2) Делимость на 5.

Последняя цифра нашего числа должна быть либо 0, либо 5, т. е. либо $y=5$, либо $y=0$.

Пусть $y=0$. Тогда $(12+x+0) \vdots 9$, т. е. $(12+x) \vdots 9$, значит, $x=6$.

Пусть $y=5$. Тогда $(12+x+5) \vdots 9$, т. е. $(17+x) \vdots 9$, значит, $x=1$.

Ответ. 72 135, 72 630.

2. Два числа отличаются перестановкой цифр. Может ли их разность быть равной 20072008?

Решение. У обоих исходных чисел совпадают остатки от деления на 9 (они совпадают с остатками сумм цифр этих чисел, а цифры этих чисел по условию одинаковы). Тогда разность этих чисел должна быть кратна 9, а число 20072008 не делится на 9.

3. Докажите, что для любого натурального n число $10^n - 1$ делится на 9.

Решение. Число $10^n - 1$ записывается как $9\ldots9$ (n девяток). Поэтому оно кратно 9.

4. Докажите, что число $11\ldots1$ (всего $2n$ единиц, $n > 1$) составное (т. е. имеет хотя бы один делитель, отличный от единицы и самого числа).

Решение. Это число делится на число, составленное из n единиц. Результатом деления является число вида $10\ldots01$ (количество нулей равно $n-1$).

5. В ряд выписаны числа от 1 до 10. Можно ли расставить между ними знаки «+» и «−» так, чтобы значение полученного выражения было равно нулю?

Решение. Так как среди чисел от 1 до 10 имеется 5 нечётных, то сумма этих чисел, взятых с любыми знаками, окажется нечётной, т. е. не сможет быть равной 0.

Ответ. Нет.

6. Чтобы открыть сейф, нужно ввести код — семизначное число из двоек и троек. Известно, что в кодовом числе двоек больше, чем троек. Кроме того, известно, что кодовое число делится на 3 и на 4. Найдите код сейфа.

Решение. Давайте заметим, что раз число делится на 4, то число, образованное двумя его последними цифрами, тоже делится на 4 (это просто признак делимости на 4). Посмотрим, каким может быть это число:

1) 22 не делится на 4; 2) 23 не делится на 4;
3) 32 делится на 4; 4) 33 не делится на 4.

Значит, наш код заканчивается на 32. Теперь заметим, что вся сумма цифр должна делиться на 3, так как число делится на 3. Переберём все возможные варианты кода:

1) 7 двоек не может быть, так как последние цифры 32.

2) 6 двоек. Сумма цифр $12+3=15$ делится на 3, значит, код делится на 3. Положение цифры 3 известно, она предпоследняя. Код имеет вид 2222232.

3) 5 двоек. Сумма цифр $10+6=16$, что не делится на 3, значит, код не делится на 3.

4) 4 двойки. Сумма цифр $8+9=17$, что не делится на 3, значит, код не делится на 3.

5) Меньше 4 двоек быть не может, так как двоек больше, чем троек.

Ответ. 2222232.

7. Докажите, что число, состоящее из 100 нулей, 100 единиц и 100 двоек, не может быть квадратом натурального числа.

Решение. Посчитаем сумму цифр этого числа:

$$S = 100\cdot 1 + 100\cdot 0 + 100\cdot 2 = 300.$$

Заметим, что S делится на 3, но не делится на 9. Но, как известно, если $a^2 \vdots p$, где p — простое число, то $a^2 \vdots p^2$. Значит, S не может быть квадратом, так как оно делится на 3 и не делится на 3^2.

Подготовительные задачи

1. Какие из чисел 863, 362, 99 832 476 252, 2012, 79 255 делятся: а) на 3; б) на 4; в) на 5; г) на 6; д) на 8; е) на 9; ж) на 11?

2. Докажите, что из трёх целых чисел всегда можно найти два, сумма которых чётна.

3. Докажите, что если сумма двух натуральных чисел нечётна, то их произведение чётно.

4. Разность двух натуральных чисел умножили на их произведение. Могло ли при этом получиться число 14 765 817 541 782 545?

5. На доске написано 645∗7235. Замените звёздочку цифрой так, чтобы полученное число делилось на 9.

6. К числу 15 припишите слева и справа по одной цифре, чтобы полученное число делилось на 15.

7. К числу 10 припишите слева и справа по одной цифре, чтобы полученное число делилось на 72.

8. Из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 составляются всевозможные натуральные числа, в записи которых каждая из этих цифр присутствует ровно 1 раз. Докажите, что сумма всех таких чисел делится на 9.

9. Найдите наибольшее натуральное число, делящееся на 36, в записи которого участвуют все 10 цифр по одному разу.

10. Можно ли из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6 составить шестизначное число, делящееся на 11?

11. В примере на умножение одинаковые цифры заменены одинаковыми буквами, разные — разными. Докажите, что не могла получиться запись $\overline{ab}\cdot\overline{cd}=\overline{eeff}$.

Основные задачи

1. Допишите к числу 523 три цифры справа так, чтобы полученное шестизначное число делилось на 7, 8 и 9.

2. Можно ли числа от 1 до 21 разбить на несколько групп, в каждой из которых наибольшее число равно сумме всех остальных чисел группы?

3. В числах МИХАЙЛО и ЛОМОНОСОВ каждая буква обозначает цифру (разным буквам соответствуют разные цифры, одинаковым — одинаковые). Известно, что произведения цифр у этих чисел равны. Могут ли оба числа быть нечётными?

4. Найдите наибольшее четырёхзначное число, все цифры которого различны и которое делится на 2, 5, 9 и 11.

5. В натуральном числе a переставили цифры и получили новое число b. Известно, что $a - b = 11\ldots1$ (число из n единиц). Найдите наименьшее возможное значение n.

6. Найдутся ли 11 натуральных чисел, делящихся на 11, в записи каждого из которых по одному разу использованы: а) все цифры от 0 до 9; б) все цифры от 0 до 8; в) все цифры от 0 до 5?

7. Использовав все цифры от 1 до 9 по одному разу, составьте наибольшее девятизначное число, делящееся на 11.

8. Произведение натурального числа и числа, записанного теми же цифрами, но в обратном порядке, равно 2430. Чему может быть равно исходное число?

9. Можно ли выдать 25 рублей ровно десятью монетами достоинством в 1 или 5 рублей?

10. Последняя цифра квадрата натурального числа 6. Докажите, что его предпоследняя цифра нечётна.

11. Числа от 1 до 37 записали в строку так, что сумма любых первых нескольких чисел делится на следующее за ними число. Какое число стоит на третьем месте, если на первом месте стоит число 37, а на втором — 1?