

# МАТЕМАТИКА

# ЕГЭ

# 2018

ПРОФИЛЬНЫЙ

19

Под редакцией И. В. Ященко

Г. И. Вольфсон, М. Я. Пратусевич,  
С. Е. Рукшин, К. М. Столбов, И. В. Ященко

## АРИФМЕТИКА И АЛГЕБРА

МАТЕМАТИКА

19

ПРОФИЛЬНЫЙ  
УРОВЕНЬ

ФГОС

УДК 373:51  
ББК 22.1я72  
В72

Авторы:

Г. И. Вольфсон, М. Я. Пратусевич, С. Е. Рукшин,  
К. М. Столбов, И. В. Яценко

**Вольфсон Г. И. и др.**

В72 ЕГЭ 2018. Математика. Арифметика и алгебра. Задача 19  
(профильный уровень) / Под ред. И. В. Яценко. — М.: МЦНМО,  
2018. — 112 с.

ISBN 978-5-4439-1219-6

Пособия по математике серии «ЕГЭ 2018. Математика» ориентированы на подготовку учащихся старшей школы к успешной сдаче единого государственного экзамена по математике. В данном учебном пособии представлен материал для подготовки к решению задачи 19.

Пособие предназначено для учащихся старшей школы, учителей математики, родителей.

Издание соответствует Федеральному государственному образовательному стандарту (ФГОС).

ББК 22.1я72

*Приказом № 729 Министерства образования и науки Российской Федерации Московский центр непрерывного математического образования включен в перечень организаций, осуществляющих издание учебных пособий, допущенных к использованию в образовательном процессе.*

12+

ISBN 978-5-4439-1219-6

© Вольфсон Г. И., Пратусевич М. Я.,  
Рукшин С. Е., Столбов К. М.,  
Яценко И. В., 2018.

© МЦНМО, 2018.

## Диагностическая работа

1. На какие числа может быть сокращена дробь  $\frac{2n+6}{3n+10}$ , где  $n$  — натуральное число?
2. Дано натуральное число  $n$ . Его умножили на число  $m$ , полученное из  $n$  перестановкой цифр. Могло ли при этом получиться число 27812754?
3. Докажите, что число  $21^{2012} + 439^{2011}$  делится на 440.
4. Докажите, что если к произвольному трёхзначному числу приписать справа его же, то полученное шестизначное число будет делиться на 13.
5. НОК двух натуральных чисел в 7 раз больше, чем их НОД. Во сколько раз сумма этих чисел больше, чем их НОД?
6. Найдите все 4-значные чётные числа, у которых ровно 22 делителя.
7. Решите уравнение в целых числах:  $x^2 + 10xy - 5y = 3$ .
8. Даны две группы натуральных чисел. В первой группе 3 числа и их среднее арифметическое равно 8, а во второй — 2 числа и их среднее арифметическое равно 13. Может ли произведение всех пяти данных чисел быть равным 100000?
9. Решите уравнение в целых числах:  $5^n + 12^n = 13^n$ .
10. Какое наибольшее количество членов может быть в арифметической прогрессии, все члены которой — натуральные числа, если известно, что каждый следующий член этой прогрессии не менее чем в полтора раза больше предыдущего?

## Решения задач диагностической работы

1. Пусть эта дробь сократима на целое число  $d$ , большее 1. Тогда  $(2n + 6) : d$  и  $(3n + 10) : d$ . Поэтому по свойствам делимости  $2(3n + 10) - 3(2n + 6) : d$ , т. е.  $2 : d$ . Следовательно,  $d$  может быть равно только 2. Осталось подобрать хотя бы одно значение  $n$ , при котором дробь сократима на 2. Для этого достаточно выбрать любое чётное значение  $n$ .

**Ответ.** 2 (при чётных  $n$ ).

2. Заметим, что 27812754 делится на 27, но не делится на 81. Разберём два случая.

1) Число  $n$  делится на 9. Значит, сумма цифр числа  $n$  делится на 9. Тогда и  $m$  делится на 9, так как сумма цифр числа  $m$  совпадает с суммой цифр числа  $n$ : эти числа отличаются лишь перестановкой цифр, а сами цифры — одни и те же. В этом случае произведение  $mn$  должно делиться на 81, а оно на 81 не делится.

2) Число  $n$  не делится на 9. Значит, сумма цифр числа  $n$  не делится на 9. Тогда и  $m$  не делится на 9, так как сумма цифр числа  $m$  совпадает с суммой цифр числа  $n$ . В этом случае произведение  $mn$  делится не более чем на вторую степень тройки, а оно делится на 27.

В каждом из случаев пришли к противоречию, значит, число 27812754 получиться не могло.

**Ответ.** Нет.

### 3. Решение 1.

1) Рассмотрим первое слагаемое:  $21^{2012} = 441^{1006}$ . Так как  $441 = 440 + 1$ , то  $441^{1006} = (440 + 1)^{1006} = 440 \cdot k + 1$ .

2) Рассмотрим второе слагаемое:  $439^{2011} = (440 - 1)^{2011} = 440 \cdot n - 1$ .

3) Из п. 1, 2 получаем:  $21^{2012} + 439^{2011} = 440 \cdot k + 1 + 440 \cdot n - 1 = 440 \cdot (n + k)$ , т. е. это выражение делится на 440, что и требовалось доказать.

### Решение 2.

1) Рассмотрим первое слагаемое:  $21^{2012} = 441^{1006}$ . Так как  $441 \equiv 1 \pmod{440}$ , то  $441^{2012} \equiv 1^{2012} \equiv 1 \pmod{440}$ .

2) Рассмотрим второе слагаемое. Так как  $439 \equiv -1 \pmod{440}$ , то  $439^{2011} \equiv (-1)^{2011} \equiv -1 \pmod{440}$ .

3) Из п. 1, 2 получаем:  $21^{2012} + 439^{2011} \equiv 1 - 1 \equiv 0 \pmod{440}$ , что и требовалось доказать.

4. Пусть данное трёхзначное число имеет вид  $\overline{abc}$ . Тогда после приписывания получится число  $\overline{abcabc}$ . Это число можно представить

в виде  $1000\overline{abc} + \overline{abc} = 1001\overline{abc}$ . Значит, это шестизначное число делится на 1001, а так как 1001 делится на 13, то и шестизначное число делится на 13, что и требовалось доказать.

5. Обозначим данные в условии задачи натуральные числа через  $x, y$ , а их НОД — через  $d$ . Тогда исходные числа можно представить в виде  $kd$  и  $nd$ , где  $\text{НОД}(k, n) = 1$ . В этом случае

$$\text{НОК}(x, y) = \frac{xy}{\text{НОД}(x, y)} = \frac{nd \cdot kd}{d} = knd.$$

Из условия следует, что  $\text{НОК}(x, y) = 7 \cdot \text{НОД}(x, y)$ , из чего с учётом введённых обозначений следует, что  $knd = 7d$ ,  $kn = 7$ . Произведение двух натуральных чисел может быть равно 7 в том и только в том случае, если это числа 1 и 7, а значит, исходные числа равны  $d$  и  $7d$ . Тогда их сумма равна  $8d$ , т. е. она в 8 раз больше, чем их НОД.

**Ответ. 8.**

6. По формуле количества делителей числа (см. с. 34) можно представить 22 в виде произведения скобок вида  $(k_i + 1)$ , где  $k_i$  — натуральный показатель степени простого делителя, входящего в каноническое разложение исходного числа. Таких скобок может быть либо одна (само число 22), либо две (числа в них будут равны 2 и 11), а в виде произведения трёх и более натуральных чисел, больших 1, число 22 представить невозможно. Разберём эти два случая.

1) Пусть есть всего одна скобка. Значит,  $k_1 + 1 = 22$ , и тогда искомое число имеет вид  $p^{21}$ , где  $p$  — простое число. Искомое число по условию чётно, следовательно,  $p = 2$ , но в числе  $2^{21}$  больше 4 цифр. Следовательно, в этом случае решений нет.

2) Пусть произведение состоит из двух скобок, равных 2 и 11. Тогда в разложении искомого числа присутствуют ровно два простых числа, степени которых равны 1 и 10. Известно, что одним из простых множителей должно быть число 2, значит, искомое число имеет вид  $2 \cdot p^{10}$  или  $2^{10} \cdot p$ , где  $p$  — простое число, не равное 2. Первый случай не подходит, так как даже при наименьшем возможном значении  $p$ , равном 3, число  $2 \cdot 3^{10}$  не является четырёхзначным. Во втором же случае нужно отобрать все такие простые числа  $p$ , не равные 2, что  $1024p$  — четырёхзначное число. Последовательно убеждаемся, что числа 3, 5 и 7 подходят, а 11 — уже нет.

Следовательно, искомые числа —  $2^{10} \cdot 3$ ,  $2^{10} \cdot 5$  и  $2^{10} \cdot 7$ , т. е. 3072, 5120 и 7168.

**Ответ. 3072, 5120 и 7168.**

7. Разберём три случая для переменной  $y$ .

1) Если число  $y$  отрицательно, то  $5^y$  — нецелое, а все остальные слагаемые в левой части — целые, а значит, сумма целой быть не может. Поэтому в этом случае решений нет.

2) Если  $y = 0$ , то  $x^2 = 4$ ,  $x = \pm 2$ .

3) Если число  $y$  положительно, то, перенося из левой части второе и третье слагаемые вправо, получаем  $x^2 = 5^y - 10xy + 3$ .

Заметим, что  $5^y$  оканчивается на 5,  $10xy$  — на 0, а значит, сумма в правой части равенства оканчивается на 8. Но тогда и  $x^2$  должен оканчиваться на 8, а квадраты натуральных чисел на 8 не оканчиваются. Следовательно, в этом случае решений нет.

**Ответ.**  $(-2; 0)$ ,  $(2; 0)$ .

8. Обозначим числа первой группы через  $a_1, a_2, a_3$ , а числа второй группы — через  $a_4, a_5$ . По условию  $\frac{a_1 + a_2 + a_3}{3} = 8$ , а значит,  $a_1 + a_2 + a_3 = 24$ . Аналогично  $\frac{a_4 + a_5}{2} = 13$ ,  $a_4 + a_5 = 26$ . По неравенству о средних

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5}{5} \geq \sqrt[5]{a_1 a_2 a_3 a_4 a_5},$$

т. е.

$$\sqrt[5]{a_1 a_2 a_3 a_4 a_5} \leq \frac{50}{5}, \quad a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 \leq 100000.$$

Если же  $a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 = 100000$ , то в неравенстве о средних достигается равенство, что возможно только в том случае, когда  $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = a_5$ . Но тогда средние арифметические первого и второго наборов должны совпадать, что не соответствует условию задачи. Значит, произведение данных чисел не может быть равным 100000.

**Ответ.** Нет.

9. Заметим, что  $n = 2$  — решение данного уравнения. При увеличении переменной на 1 правая часть уравнения увеличивается в 13 раз, а левая — менее чем в 12, так как  $5^{n+1} + 12^{n+1} < 12(5^n + 12^n)$ . Следовательно, при  $n > 2$  решений нет.

Аналогично, если уменьшить значение переменной на 1, то правая часть уменьшится в 13 раз, а левая — менее чем в 12 раз. Следовательно, и при  $n < 2$  решений нет.

**Ответ.** 2.

10. Докажем от противного, что в искомой прогрессии не более 3 членов. Пусть искомая прогрессия состоит хотя бы из четырёх членов

и имеет вид  $a_1, a_2, \dots$ , а её разность равна  $d$ . Тогда  $a_2 = a_1 + d$ ,  $a_3 = a_1 + 2d$ ,  $a_4 = a_1 + 3d$ . Из условия следует, что  $\frac{a_4}{a_3} \geq 1,5$ ,  $a_4 \geq 1,5a_3$ , или  $a_1 + 3d \geq 1,5a_1 + 3d$ ,  $0 \geq 0,5a_1$  — что противоречит тому, что  $a_1$  — натуральное число.

Следовательно, в прогрессии не более трёх членов.

Осталось привести пример прогрессии, состоящей из трёх членов и удовлетворяющей условию задачи. Таким примером может служить прогрессия  $\{1; 2; 3\}$ .

**Ответ.** 3.

# § 1. Делимость и её свойства. Признаки делимости

## Диагностическая работа 1

1. Число  $\overline{134*}$  кратно 3. Какую цифру можно поставить вместо звёздочки? (Перечислите все возможные варианты.)

2. Делится ли число 314567891 на 11?

3. Какую цифру можно поставить вместо звёздочки, если известно, что число  $314159*6$  кратно 8? (Перечислите все возможные варианты.)

4. В буфете купили несколько пирожных по 35 рублей и 14 порций кофе (каждая порция кофе стоит целое число рублей). Мог ли весь купленный товар стоить 501 рубль?

5. Сумма и произведение двух натуральных чисел кратны 136. Докажите, что квадрат каждого из них кратен 136.

## Краткая теоретическая справка

В этом параграфе все числа целые, если не оговаривается противное.

**Определение.** Число  $a$  делится на число  $b \neq 0$ , если существует такое число  $c$ , что  $a = bc$ .

Обозначение:  $a : b$ .

### *Свойства делимости*

1. Если  $a$  делится на  $b$ , то для любого числа  $k$  число  $ka$  делится на  $b$ .
2. Если  $a$  делится на  $c$  и  $b$  делится на  $c$ , то сумма, разность и произведение чисел  $a$  и  $b$  делится на  $c$ .
3. Если  $a$  делится на  $b$  и  $b$  делится на  $c$ , то  $a$  делится на  $c$ .
4. Если  $a$  делится на  $c$  и  $b$  делится на  $d$ , то  $ab$  делится на  $cd$ .

### *Признаки делимости для десятичной записи числа*

Число делится на 2 тогда и только тогда, когда его последняя цифра чётна.

Число делится на 3 тогда и только тогда, когда сумма его цифр делится на 3. Более того, сумма цифр числа даёт такой же остаток от деления на 3, как и само число.

Число делится на 4 тогда и только тогда, когда две его последние цифры составляют число, которое делится на 4.

Число делится на 5 тогда и только тогда, когда оно оканчивается на 0 или 5.

Число делится на 9 тогда и только тогда, когда сумма его цифр делится на 9. Более того, сумма цифр числа даёт такой же остаток от деления на 9, как и само число.

Число делится на 11 тогда и только тогда, когда разность суммы цифр, стоящих на нечётных местах, и суммы цифр, стоящих на чётных местах, делится на 11 (например, число 305792608 делится на 11, так как  $(8 + 6 + 9 + 5 + 3) - (0 + 2 + 7 + 0) = 22$  делится на 11).

### *Простые и взаимно простые числа*

**Определение.** Натуральное число, отличное от 1, называется простым, если у него нет натуральных делителей, отличных от 1 и него самого.

Числа, отличные от 1 и не являющиеся простыми, называются составными.

**Важно!** Единица не является ни простым, ни составным числом.

**Определение.** Два числа, наибольший общий делитель которых равен 1, называются взаимно простыми.

Если число  $a$  делится на числа  $b$  и  $c$ , причём числа  $b$  и  $c$  взаимно просты, то число  $a$  делится на их произведение  $bc$ . Данное утверждение верно не только для двух чисел, но и для любого количества попарно взаимно простых чисел (а именно: если число  $a$  делится на каждое из  $n$  чисел, причём любые два числа из данных  $n$  чисел взаимно просты, то число  $a$  делится на произведение данных  $n$  чисел).

## 1.1. Свойства делимости

### Примеры решения задач

1. Найдите все такие  $a \in \mathbb{N}$ , что  $\frac{2a+1}{a-2}$  — целое число.

**Решение.** Если число  $\frac{2a+1}{a-2}$  целое, то это равносильно тому, что  $2a+1 : a-2$ . Тогда и разность этих чисел тоже будет делиться на  $a-2$ :  $(2a+1) - (a-2) : a-2$ ,  $a+3 : a-2$ . Но и разность этих чисел тоже должна делиться на  $a-2$ :  $(a+3) - (a-2) : a-2$ ,  $5 : a-2$ . Значит,  $a-2$  — делитель числа 5. Но у 5 не так много делителей — это 1, 5,  $-1$ ,  $-5$ .

## Содержание

Предисловие . . . . .	3
Диагностическая работа . . . . .	4
Решения задач диагностической работы . . . . .	5
§ 1. Делимость и её свойства. Признаки делимости . . . . .	9
Диагностическая работа 1 . . . . .	9
Краткая теоретическая справка . . . . .	9
1.1. Свойства делимости . . . . .	10
Примеры решения задач . . . . .	10
Подготовительные задачи . . . . .	12
Основные задачи . . . . .	13
1.2. Признаки делимости . . . . .	13
Примеры решения задач . . . . .	13
Подготовительные задачи . . . . .	15
Основные задачи . . . . .	16
§ 2. Остатки . . . . .	17
Диагностическая работа 2 . . . . .	17
Краткая теоретическая справка . . . . .	17
Примеры решения задач . . . . .	18
Подготовительные задачи . . . . .	21
Основные задачи . . . . .	22
§ 3. Десятичная запись числа . . . . .	24
Диагностическая работа 3 . . . . .	24
Краткая теоретическая справка . . . . .	24
Примеры решения задач . . . . .	25
Подготовительные задачи . . . . .	27
Основные задачи . . . . .	28
§ 4. НОД и НОК. Основная теорема арифметики . . . . .	32
Диагностическая работа 4 . . . . .	32
Краткая теоретическая справка . . . . .	32
4.1. НОД и НОК . . . . .	34
Примеры решения задач . . . . .	34
Подготовительные задачи . . . . .	36
Основные задачи . . . . .	37
4.2. Основная теорема арифметики. Делители . . . . .	38
Примеры решения задач . . . . .	38

---

Подготовительные задачи . . . . .	40
Основные задачи . . . . .	40
§ 5. Уравнения в целых числах . . . . .	42
Диагностическая работа 5 . . . . .	42
Краткая теоретическая справка . . . . .	42
Примеры решения задач . . . . .	43
Подготовительные задачи . . . . .	45
Основные задачи . . . . .	45
§ 6. Неравенства и оценки в задачах теории чисел . . . . .	47
Диагностическая работа 6 . . . . .	47
Краткая теоретическая справка . . . . .	47
6.1. Среднее арифметическое. Неравенство о средних . . . . .	48
Примеры решения задач . . . . .	48
Подготовительные задачи . . . . .	49
Основные задачи . . . . .	50
6.2. Неравенства и оценки . . . . .	51
Примеры решения задач . . . . .	51
Подготовительные задачи . . . . .	51
Основные задачи . . . . .	52
§ 7. Последовательности и прогрессии . . . . .	53
Диагностическая работа 7 . . . . .	53
Краткая теоретическая справка . . . . .	53
Примеры решения задач . . . . .	54
Подготовительные задачи . . . . .	57
Основные задачи . . . . .	58
§ 8. Как решать задачу 19: задачи ЕГЭ прошлых лет . . . . .	61
Ответы, указания, решения . . . . .	89