

15

16

17

18

19

20

21

МАТЕМАТИКА

2015

ЕГЭ

Под редакцией И. В. Яценко

Г. И. Вольфсон, М. Я. Пратусевич,
С. Е. Рукшин, К. М. Столбов,
И. В. Яценко

АРИФМЕТИКА И АЛГЕБРА

ЗАДАЧА

21

ФГОС

УДК 373:51
ББК 22.1я72
В72

Вольфсон Г. И., Пратусевич М. Я., Рукшин С. Е., Столбов К. М., Яценко И. В.
ЕГЭ 2015. Математика. Задача 21. Арифметика и алгебра
Под ред. И. В. Яценко
Электронное издание
М.: МЦНМО, 2015
102 с.
ISBN 978-5-4439-2123-5

Рабочая тетрадь по математике серии «ЕГЭ 2015. Математика» ориентирована на подготовку учащихся старшей школы к успешной сдаче единого государственного экзамена по математике в 2015 году. В рабочей тетради представлены задачи по одной позиции контрольных измерительных материалов ЕГЭ-2015.

На различных этапах обучения пособие поможет обеспечить уровневый подход к организации повторения, осуществить контроль и самоконтроль уровня основных арифметических навыков и умения решать текстовые задачи. Рабочая тетрадь ориентирована на один учебный год, однако при необходимости позволит в кратчайшие сроки восполнить пробелы в знаниях выпускника.

Тетрадь предназначена для учащихся старшей школы, учителей математики, родителей.

Издание соответствует Федеральному государственному образовательному стандарту (ФГОС).

Подготовлено на основе книги: *Вольфсон Г. И.* и др. ЕГЭ 2015. Математика. Задача 21. Арифметика и алгебра / Под ред. И. В. Яценко. — М.: МЦНМО, 2015. — 102 с.

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования
119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11,
тел. (499) 241-08-04.
<http://www.mccme.ru>

© Вольфсон Г. И., Пратусевич М. Я., Рукшин С. Е.,
Столбов К. М., Яценко И. В., 2015.

ISBN 978-5-4439-2123-5

© МЦНМО, 2015.

Содержание

Предисловие	3
Диагностическая работа	4
Решения задач диагностической работы	5
§1. Делимость и ее свойства. Признаки делимости	9
Диагностическая работа 1	9
Краткая теоретическая справка	9
1.1. Свойства делимости	10
Примеры решения задач	10
Подготовительные задачи	12
Основные задачи	13
1.2. Признаки делимости	13
Примеры решения задач	13
Подготовительные задачи	15
Основные задачи	16
§2. Остатки	17
Диагностическая работа 2	17
Краткая теоретическая справка	17
Примеры решения задач	18
Подготовительные задачи	21
Основные задачи	22
§3. Десятичная запись числа	24
Диагностическая работа 3	24
Краткая теоретическая справка	24
Примеры решения задач	25
Подготовительные задачи	27
Основные задачи	28
§4. НОД и НОК. Основная теорема арифметики	32
Диагностическая работа 4	32
Краткая теоретическая справка	32
4.1. НОД и НОК	34
Примеры решения задач	34
Подготовительные задачи	36
Основные задачи	37
4.2. Основная теорема арифметики. Делители	38
Примеры решения задач	38

Подготовительные задачи	40
Основные задачи	40
§ 5. Уравнения в целых числах	42
Диагностическая работа 5	42
Краткая теоретическая справка	42
Примеры решения задач	43
Подготовительные задачи	45
Основные задачи	45
§ 6. Неравенства и оценки в задачах теории чисел	47
Диагностическая работа 6	47
Краткая теоретическая справка	47
6.1. Среднее арифметическое. Неравенство о средних	48
Примеры решения задач	48
Подготовительные задачи	49
Основные задачи	50
6.2. Неравенства и оценки	51
Примеры решения задач	51
Подготовительные задачи	51
Основные задачи	52
§ 7. Последовательности и прогрессии	53
Диагностическая работа 7	53
Краткая теоретическая справка	53
Примеры решения задач	54
Подготовительные задачи	57
Основные задачи	58
§ 8. Как решать задачу 21: задачи ЕГЭ прошлых лет	61
Ответы, указания, решения	83

Предисловие

Одной из целей математического образования, нашедшей отражение в федеральном компоненте государственного стандарта по математике, является интеллектуальное развитие учащихся. Эта цель выходит на одно из ведущих мест при углубленном изучении математики.

Поскольку одним из основных отличий задачи 21 от остальных задач ЕГЭ является ее явно выраженный нестандартный характер, а сведения, необходимые для решения этой задачи, могут относиться к самым различным разделам школьного курса, построение решения может потребовать нетривиальных идей и методов, постольку смыслом включения задачи 21 в состав контрольно-измерительных материалов ЕГЭ является именно диагностика уровня интеллектуального развития учащихся.

Целью данной книги является не столько подготовить к решению задачи 21, сколько помочь учителю систематически заниматься интеллектуальным развитием учащихся на материале содержания задачи 21.

Авторы сборника старались дать обзор тех тем, которым традиционно в школе уделяется меньше внимания, и показать некоторые специфические методы решения задач. В сборник включены и более трудные задачи, примыкающие к так называемой «олимпиадной тематике». Эти задачи отмечены звездочкой.

Материалы книги могут служить подспорьем в проведении элективных курсов, кружков и факультативов.

В заключение отметим, что, безусловно, перечень возможных сюжетов и тем задачи 21 не исчерпывается приведенными в данной книге.

Авторы будут благодарны за конструктивную критику и замечания по содержанию этой книги, которые можно присылать по адресу s6@mcsme.ru.

Диагностическая работа

1. На какие числа может быть сокращена дробь $\frac{2n+6}{3n+10}$, где n — натуральное число?

2. Дано натуральное число n . Его умножили на число m , полученное из n перестановкой цифр. Могло ли при этом получиться число 27812754?

3. Докажите, что число $21^{2012} + 439^{2011}$ делится на 440.

4. Докажите, что если к произвольному трехзначному числу приписать справа его же, то полученное шестизначное число будет делиться на 13.

5. НОК двух натуральных чисел в 7 раз больше, чем их НОД. Во сколько раз сумма этих чисел больше, чем их НОД?

6. Найдите все 4-значные четные числа, у которых ровно 22 делителя.

7. Решите уравнение в целых числах: $x^2 + 10xy - 5^y = 3$.

8. Даны две группы натуральных чисел. В первой группе 3 числа и их среднее арифметическое равно 8, а во второй — 2 числа и их среднее арифметическое равно 13. Может ли произведение всех пяти данных чисел быть равным 100000?

9. Решите уравнение в целых числах: $5^n + 12^n = 13^n$.

10. Какое наибольшее количество членов может быть в арифметической прогрессии, все члены которой — натуральные числа, если известно, что каждый следующий член этой прогрессии не менее чем в полтора раза больше предыдущего?

Решения задач диагностической работы

1. Пусть эта дробь сократима на целое число d , большее 1. Тогда $(2n + 6) : d$ и $(3n + 10) : d$. Поэтому по свойствам делимости $2(3n + 10) - 3(2n + 6) : d$, т. е. $2 : d$. Следовательно, d может быть равно только 2. Осталось подобрать хотя бы одно значение n , при котором дробь сократима на 2. Для этого достаточно выбрать любое четное значение n .

Ответ. 2 (при четных n).

2. Заметим, что 27812754 делится на 27, но не делится на 81. Разберем два случая.

1) Число n делится на 9. Значит, сумма цифр числа n делится на 9. Тогда и m делится на 9, так как сумма цифр числа m совпадает с суммой цифр числа n : эти числа отличаются лишь перестановкой цифр, а сами цифры — одни и те же. В этом случае произведение mn должно делиться на 81, а оно на 81 не делится.

2) Число n не делится на 9. Значит, сумма цифр числа n не делится на 9. Тогда и m не делится на 9, так как сумма цифр числа m совпадает с суммой цифр числа n . В этом случае произведение mn делится не более чем на вторую степень тройки, а оно делится на 27.

В каждом из случаев пришли к противоречию, значит, число 27812754 получиться не могло.

Ответ. Нет.

3. Решение 1.

1) Рассмотрим первое слагаемое: $21^{2012} = 441^{1006}$. Так как $441 = 440 + 1$, то $441^{1006} = (440 + 1)^{1006} = 440 \cdot k + 1$.

2) Рассмотрим второе слагаемое: $439^{2011} = (440 - 1)^{2011} = 440 \cdot n - 1$.

3) Из п. 1, 2 получаем: $21^{2012} + 439^{2011} = 440 \cdot k + 1 + 440 \cdot n - 1 = 440 \cdot (n + k)$, т. е. это выражение делится на 440, что и требовалось доказать.

Решение 2.

1) Рассмотрим первое слагаемое: $21^{2012} = 441^{1006}$. Так как $441 \equiv 1 \pmod{440}$, то $441^{2012} \equiv 1^{2012} \equiv 1 \pmod{440}$.

2) Рассмотрим второе слагаемое. Так как $439 \equiv -1 \pmod{440}$, то $439^{2011} \equiv (-1)^{2011} \equiv -1 \pmod{440}$.

3) Из п. 1, 2 получаем: $21^{2012} + 439^{2011} \equiv 1 - 1 \equiv 0 \pmod{440}$, что и требовалось доказать.

4. Пусть данное трехзначное число имеет вид $\overline{abc}$. Тогда после приписывания получится число $\overline{abcabc}$. Это число можно представить

в виде $1000\overline{abc} + \overline{abc} = 1001\overline{abc}$. Значит, это шестизначное число делится на 1001, а так как 1001 делится на 13, то и шестизначное число делится на 13, что и требовалось доказать.

5. Обозначим данные в условии задачи натуральные числа через x, y , а их НОД — через d . Тогда исходные числа можно представить в виде kd и nd , где $\text{НОД}(k, n) = 1$. В этом случае

$$\text{НОК}(x, y) = \frac{xy}{\text{НОД}(x, y)} = \frac{nd \cdot kd}{d} = knd.$$

Из условия следует, что $\text{НОК}(x, y) = 7 \cdot \text{НОД}(x, y)$, из чего с учетом введенных обозначений следует, что $knd = 7d$, $kn = 7$. Произведение двух натуральных чисел может быть равно 7 в том и только в том случае, если это числа 1 и 7, а значит, исходные числа равны d и $7d$. Тогда их сумма равна $8d$, т. е. она в 8 раз больше, чем их НОД.

Ответ. 8.

6. По формуле количества делителей числа (см. с. 34) можно представить 22 в виде произведения скобок вида $(k_i + 1)$, где k_i — натуральный показатель степени простого делителя, входящего в каноническое разложение исходного числа. Таких скобок может быть либо одна (само число 22), либо две (числа в них будут равны 2 и 11), а в виде произведения трех и более натуральных чисел, больших 1, число 22 представить невозможно. Разберем эти два случая.

1) Пусть есть всего одна скобка. Значит, $k_1 + 1 = 22$, и тогда искомое число имеет вид p^{21} , где p — простое число. Искомое число по условию четно, следовательно, $p = 2$, но в числе 2^{21} больше 4 цифр. Следовательно, в этом случае решений нет.

2) Пусть произведение состоит из двух скобок, равных 2 и 11. Тогда в разложении искомого числа присутствуют ровно два простых числа, степени которых равны 1 и 10. Известно, что одним из простых сомножителей должно быть число 2, значит, искомое число имеет вид $2 \cdot p^{10}$ или $2^{10} \cdot p$, где p — простое число, не равное 2. Первый случай не подходит, так как даже при наименьшем возможном значении p , равном 3, число $2 \cdot 3^{10}$ не является четырехзначным. Во втором же случае нужно отобрать все такие простые числа p , не равные 2, что $1024p$ — четырехзначное число. Последовательно убеждаемся, что числа 3, 5 и 7 подходят, а 11 — уже нет.

Следовательно, искомые числа — $2^{10} \cdot 3$, $2^{10} \cdot 5$ и $2^{10} \cdot 7$, т. е. 3072, 5120 и 7168.

Ответ. 3072, 5120 и 7168.

7. Разберем три случая для переменной y .

1) Если число y отрицательно, то 5^y — нецелое, а все остальные слагаемые в левой части — целые, а значит, сумма целой быть не может. Поэтому в этом случае решений нет.

2) Если $y = 0$, то $x^2 = 4$, $x = \pm 2$.

3) Если число y положительно, то, перенося из левой части второе и третье слагаемые вправо, получаем $x^2 = 5^y - 10xy + 3$.

Заметим, что 5^y оканчивается на 5, $10xy$ — на 0, а значит, сумма в правой части равенства оканчивается на 8. Но тогда и x^2 должен оканчиваться на 8, а квадраты натуральных чисел на 8 не оканчиваются. Следовательно, в этом случае решений нет.

Ответ. $(-2; 0)$, $(2; 0)$.

8. Обозначим числа первой группы через a_1, a_2, a_3 , а числа второй группы — через a_4, a_5 . По условию $\frac{a_1 + a_2 + a_3}{3} = 8$, а значит, $a_1 + a_2 + a_3 = 24$. Аналогично $\frac{a_4 + a_5}{2} = 13$, $a_4 + a_5 = 26$. По неравенству о средних

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5}{5} \geq \sqrt[5]{a_1 a_2 a_3 a_4 a_5},$$

т. е.

$$\sqrt[5]{a_1 a_2 a_3 a_4 a_5} \leq \frac{50}{5}, \quad a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 \leq 100000.$$

Если же $a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 = 100000$, то в неравенстве о средних достигается равенство, что возможно только в том случае, когда $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = a_5$. Но тогда средние арифметические первого и второго наборов должны совпадать, что не соответствует условию задачи. Значит, произведение данных чисел не может быть равным 100000.

Ответ. Нет.

9. Заметим, что $n = 2$ — решение данного уравнения. При увеличении переменной на 1 правая часть уравнения увеличивается в 13 раз, а левая — менее чем в 12, так как $5^{n+1} + 12^{n+1} < 12(5^n + 12^n)$. Следовательно, при $n > 2$ решений нет.

Аналогично, если уменьшить значение переменной на 1, то правая часть уменьшится в 13 раз, а левая — менее чем в 12 раз. Следовательно, и при $n < 2$ решений нет.

Ответ. 2.

10. Докажем от противного, что в искомой прогрессии не более 3 членов. Пусть искомая прогрессия состоит хотя бы из четырех членов

и имеет вид $a_1, a_2, \dots$, а ее разность равна d . Тогда $a_2 = a_1 + d$, $a_3 = a_1 + 2d$, $a_4 = a_1 + 3d$. Из условия следует, что $\frac{a_4}{a_3} \geq 1,5$, $a_4 \geq 1,5a_3$, или $a_1 + 3d \geq 1,5a_1 + 3d$, $0 \geq 0,5a_1$ — что противоречит тому, что a_1 — натуральное число.

Следовательно, в прогрессии не более трех членов.

Осталось привести пример прогрессии, состоящей из трех членов и удовлетворяющей условию задачи. Таким примером может служить прогрессия $\{1; 2; 3\}$.

Ответ. 3.

§ 1. Делимость и ее свойства. Признаки делимости

Диагностическая работа 1

1. Число $\overline{134*}$ кратно 3. Какую цифру можно поставить вместо звездочки? (Перечислите все возможные варианты.)
2. Делится ли число 314567891 на 11?
3. Какую цифру можно поставить вместо звездочки, если известно, что число $314159*6$ кратно 8? (Перечислите все возможные варианты.)
4. В буфете купили несколько пирожных по 35 рублей и 14 порций кофе (каждая порция кофе стоит целое число рублей). Мог ли весь купленный товар стоить 501 рубль?
5. Сумма и произведение двух натуральных чисел кратны 136. Докажите, что квадрат каждого из них кратен 136.

Краткая теоретическая справка

В этом параграфе все числа целые, если не оговаривается противное.

Определение. Число a делится на число $b \neq 0$, если существует такое число c , что $a = bc$.

Обозначение: $a : b$.

Свойства делимости

1. Если a делится на b , то для любого числа k число ka делится на b .
2. Если a делится на c и b делится на c , то сумма, разность и произведение чисел a и b делится на c .
3. Если a делится на b и b делится на c , то a делится на c .
4. Если a делится на c и b делится на d , то ab делится на cd .

Признаки делимости для десятичной записи числа

Число делится на 2 тогда и только тогда, когда его последняя цифра четна.

Число делится на 3 тогда и только тогда, когда сумма его цифр делится на 3. Более того, сумма цифр числа дает такой же остаток от деления на 3, как и само число.

Число делится на 4 тогда и только тогда, когда две его последние цифры составляют число, которое делится на 4.

Число делится на 5 тогда и только тогда, когда оно оканчивается на 0 или 5.

Число делится на 9 тогда и только тогда, когда сумма его цифр делится на 9. Более того, сумма цифр числа дает такой же остаток от деления на 9, как и само число.

Число делится на 11 тогда и только тогда, когда разность суммы цифр, стоящих на нечетных местах, и суммы цифр, стоящих на четных местах, делится на 11 (например, число 305792608 делится на 11, так как $(8 + 6 + 9 + 5 + 3) - (0 + 2 + 7 + 0) = 22$ делится на 11).

Простые и взаимно простые числа

Определение. Натуральное число, отличное от 1, называется простым, если у него нет натуральных делителей, отличных от 1 и него самого.

Числа, отличные от 1 и не являющиеся простыми, называются составными.

Важно! Единица не является ни простым, ни составным числом.

Определение. Два числа, наибольший общий делитель которых равен 1, называются взаимно простыми.

Если число a делится на числа b и c , причем числа b и c взаимно просты, то число a делится на их произведение bc . Данное утверждение верно не только для двух чисел, но и для любого количества попарно взаимно простых чисел (а именно: если число a делится на каждое из n чисел, причем любые два числа из данных n чисел взаимно просты, то число a делится на произведение данных n чисел).

1.1. Свойства делимости

Примеры решения задач

1. Найдите все такие $a \in \mathbb{N}$, что $\frac{2a+1}{a-2}$ — целое число.

Решение. Если число $\frac{2a+1}{a-2}$ целое, то это равносильно тому, что $2a+1 : a-2$. Тогда и разность этих чисел тоже будет делиться на $a-2$: $(2a+1) - (a-2) : a-2$, $a+3 : a-2$. Но и разность этих чисел тоже должна делиться на $a-2$: $(a+3) - (a-2) : a-2$, $5 : a-2$. Значит, $a-2$ — делитель числа 5. Но у 5 не так много делителей — это 1, 5, -1, -5.